الفصل الثاني- تطبيق على نظرية الانتاج

التمرين الأول:

إذا كانت دالة الإنتاجية المتوسطة بالشكل التالي: $\boldsymbol{PML = 30 + 12L - L2}$

المطلوب:

1. حدد الإنتاجية الحدية لعنصر العمل.
2. حدد عدد العمال اللازم لتعظيم الإنتاج.
3. إنطلاقا من أي قيمة يزداد الإنتاج بمعدل متناقص.
4. حدد مناطق الإنتاج الثلاث.
5. ماذا يعني وجود إنتاجية حدية موجبة، إنتاجية حدية سالبة وإنتاجية حدية معدومة.

الاجابة:

1- تحديد الإنتاجية الحدية العنصر العمل:

أ - إيجاد الإنتاج الكلي:

$$PM_L = \frac{X}{L}$$
$$X = L(PM_L) = L(30 + 12L - L2)$$
$$X = 30L + 12L^2 - L^3$$

ب – إيجاد الإنتاجية الحدية لعنصر العمل:

$$Pm_L = \frac{\partial X}{\partial L} = 30 + 24L - 3L^2$$

2- عدد العمال اللازم لتعظيم الإنتاج:

$$MAXX \Rightarrow \frac{\partial X}{\partial L} = 0$$
$$\frac{\partial X}{\partial L} = 30 + 24L - 3L^2 = \mathbf{0}$$

لحل هذه المعادلة المستخدم المميزة:

$$\Delta = B^2 - 4AC$$
$$\Delta = (24)^2 - 4(-3)\ (30) = 576 + 360 = 936$$
$$\sqrt{\Delta} = 30,59$$
$$L = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} \cong 9 \text{ عامل}$$

عدد العمال اللازم لتعظيم الإنتاج هو $\boldsymbol{L = 9}$

3- القيمة التي يزداد إنطلاقا منها الإنتاج بمعدل متناقص:

يزداد الانتاج الكلي بمعدل متناقص انطلاقا من القيمة العظمى للإنتاجية الحدية للعمل أي:

$$\text{MAX } Pm_L \Rightarrow \frac{\partial Pm_L}{\partial L} = 0$$
$$\frac{\partial Pm_L}{\partial L} = 24 - 6\text{L} = 0$$
$$L = \frac{24}{6}$$
$$\boldsymbol{L = 4}$$

4- **تحديد مناطق الإنتاج الثلاث:**

حدود منطقة الإنتاج الأولى: $0 \rightarrow$ $Pm_L = PM_L$ أو $\frac{\partial PM_L}{\partial L} = 0$

$$\frac{\partial PM_L}{\partial L} = 12 - 2L = 0$$
$$\boldsymbol{L = 6}$$
$$\boldsymbol{L = 0} \rightarrow \boldsymbol{L = 6}$$

حدود منطقة الإنتاج الثانية: $Pm_L = PM_L$ أو $\frac{\partial PM_L}{\partial L} = 0$ $\rightarrow$ $Pm_L = 0$ أو $MAX\ X$

$$\boldsymbol{L = 6} \rightarrow \boldsymbol{L = 9}$$

حدود منطقة الإنتاج الثالثة : $Pm_L = 0$ أو $MAX\ X$ $\rightarrow$ $L = +\infty$

$$\boldsymbol{L = 9} \rightarrow +\infty$$

5- **تفسير معنى وجود إنتاجية حدية موجبة، إنتاجية حدية سالبة وإنتاجية حدية معدومة.**

تعني إنتاجية حدية موجبة ومتزايدة تزايد الإنتاج بمعدل متزايد بينما تعني انتاجية حدية موجبة ومناقصة تزايد الإنتاج بمعدل متناقص. في حين تعني انتاجية حدية معدومة أن الإنتاج في أقصى قيمة له (القيمة العظمى)، في الاخير تعني إنتاجية حدية سالبة تناقص الإنتاج.

التمرين الثاني:

لتكن دالة الانتاج التالية: $\boldsymbol{X = 2K^{1/2}L^{1/2}}$ ، وإذا كانت w و r أسعار عوامل الإنتاج العمل L و راس المال K على الترتيب.

المطلوب:

1. اوجد معادلة المسار الامثل لتطور المؤسسة
2. أوجد دالة الطلب على عنصر العمل $\boldsymbol{L}$ بفرضية ان كمية راس المال تساوي $\boldsymbol{K=4}$

الاجابة

1- **اوجد معادلة المسار الامثل لتطور المؤسسة**

$$\pi = RT - CT$$

$$\pi = PX - (wL + rK)$$

$$\pi = P\left(2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}\right) - wL - rK$$

$$\pi = 2PK^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} - wL - rK$$

من الشروط الاولى لتعظيم الربح نجد:

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = 2\left(\frac{1}{2}\right)PK^{\frac{1}{2}}L^{\frac{-1}{2}} - w = 0 \;\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = 2\left(\frac{1}{2}\right)PK^{\frac{-1}{2}}L^{\frac{1}{2}} - r = 0 \;\ldots\ldots(2)$$

بقسمة المعادلة (1) على المعادلة (2) نجد:

$$\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)PK^{\frac{1}{2}}L^{\frac{-1}{2}}}{2\left(\frac{1}{2}\right)PK^{\frac{-1}{2}}L^{\frac{1}{2}}} = \frac{w}{r}$$

$$\frac{K}{L} = \frac{w}{r}$$

$$\boldsymbol{K = \frac{w}{r}L} \;\ldots\ldots(3)$$

تمثل المعادلة (3) المحل الهندسي لتوازن المنتج وبالتالي تمثل مسار تطور (توسع) المؤسسة.

2- **أيجاد دالة الطلب على عنصر العمل $\boldsymbol{L}$ بفرضية أن كمية راس المال تساوي $\boldsymbol{K=4}$**

تستخرج دوال الطلب على عناصر الإنتاج من الشروط الاولى لتعظيم الربح:

$$\pi = RT - CT$$

$$\pi = PX - (wL + rK)$$

$$\pi = P\left(2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}\right) - wL - rK$$

$$\pi = 2P4^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} - wL - rK$$

$$\pi = 4PL^{\frac{1}{2}} - wL - rK$$

من الشروط الاولى لتعظيم الربح نجد:

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = 2PL^{\frac{-1}{2}} - w = 0$$

$$\frac{2P}{L^{\frac{-1}{2}}} = w$$

$$\frac{2P}{w} = L^{\frac{-1}{2}}$$

$$\boldsymbol{L_D = \frac{4P^2}{w^2}}$$ دالة الطلب على عنصر العمل

التمرين الثالث:

إذا كانت دالة الإنتاج لمؤسسة ما من الشكل: $\boldsymbol{X = 2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}}$، وان اسعار عوامل الانتاج هي $\boldsymbol{w = 6}$ و$\boldsymbol{r = 2}$

المطلوب:

1. ما هو أمثل انتاج اذا كانت ميزانية المؤسسة $\boldsymbol{Ct = 600}$.
2. اذا تغير السعر $\boldsymbol{w}$ وأصبح $\boldsymbol{w = 3}$ وحاولت المؤسسة انتاج $\boldsymbol{X^\circ = 50}$، أوجد أدنى تكلفة ممكنة.
3. اذا كان ازدياد السعر النسبي للعمل يؤدي الى ازدياد بـ $\boldsymbol{10\%}$ في النسبة $\boldsymbol{\frac{K}{L}}$ بينما مرونة الإحلال $\boldsymbol{\sigma = 0.9}$ ما هي نسبة هذا الازدياد؟

الاجابة:

-1 **<u>أمثل انتاج اذا كانت ميزانية المؤسسة $\boldsymbol{Ct = 600}$:</u>**

يكون تركيب معادلة لاقرانج بالشكل التالي:

$$L = f(K, L) + [C^\circ - wL - rK]$$

$$L = 2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} + [600 - 6L - 2K]$$

الشروط الأولى اللازمة لتعظيم و هي:

$$\begin{cases} L'_L = 2\left(\frac{1}{2}\right)K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{-1}{2}} - 6\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad (1) \\ L'_K = 2\left(\frac{1}{2}\right)K^{\frac{-1}{2}}L^{\frac{1}{2}} - 2\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad (2) \\ L'_\lambda = 600 - 6L - 2K = 0 \quad \rightarrow \quad (3) \end{cases}$$

بقسمة المعادلة (1) على المعادلة (2) نجد:

$$\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{-1}{2}}}{2\left(\frac{1}{2}\right)K^{\frac{-1}{2}}L^{\frac{1}{2}}}=\frac{w}{r}$$

$$\frac{K}{L}=3$$

$$K=3L \;\ldots\ldots(4)$$

بتعويض المعادلة (4) في المعادلة (3) نجد:

$$600-6L-2K=0$$

$$600-6L-2(3L)=0$$

$$600=12L$$

$$\boldsymbol{\bar{L}=50}$$

بتعويض $\bar{L}=50$ في المعادلة (4) نجد:

$$K=3L=3(50)$$

$$\boldsymbol{\bar{K}=150}$$

بتعويض $\bar{L}=50$ و $\bar{K}=150$ في دالة الانتاج نجد أعظم انتاج:

$$X=2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}=2(150)^{\frac{1}{2}}(50)^{\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{\bar{X}=173.20}$$

2- **إيجاد أدنى تكلفة ممكنة اذا حاولت المؤسسة انتاج $\boldsymbol{X^{\circ}=50}$**

يكون تركيب معادلة لاقرانج بالشكل التالي:

$$L=wL+rK+\lambda[X^{\circ}-f(K,L)]$$

$$L=3L+2K+\lambda[50-2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}]$$

من الشروط الأولى لتقليل التكاليف نجد:

$$\begin{cases} L'_L=3-\lambda 2\left(\frac{1}{2}\right)K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{-1}{2}}=0 & \rightarrow (1)' \\ L'_K=2-\lambda 2\left(\frac{1}{2}\right)K^{\frac{-1}{2}}L^{\frac{1}{2}}=0 & \rightarrow (2)' \\ L'_\lambda=50-2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}=0 & \rightarrow (3)' \end{cases}$$

بقسمة المعادلة $(1)'$ على المعادلة $(2)'$ نجد:

$$\frac{3}{2} = \frac{\lambda 2\left(\frac{1}{2}\right) K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{-1}{2}}}{\lambda 2\left(\frac{1}{2}\right) K^{\frac{-1}{2}} L^{\frac{1}{2}}}$$

$$K = \frac{3}{2} L \quad \dots \dots (4)'$$

بتعويض المعادلة $(4)'$ في المعادلة $(3)'$ نجد:

$$50 - 2K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$50 - 2(\frac{3}{2} L)^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$50 = 2.45L$$

$$\bar{\bar{\boldsymbol{L}}} = \mathbf{20.5}$$

بتعويض $\bar{\bar{L}} = 20.5$ في المعادلة (4) نجد:

$$K = \frac{3}{2} L = \frac{3}{2}(20.5)$$

$$\bar{\bar{\boldsymbol{K}}} = \mathbf{30.75}$$

بتعويض $\bar{\bar{L}} = 20.5$ و $\bar{\bar{K}} = 30.75$ في دالة التكلفة نجد قيمة أدنى تكلفة:

$$CT = wL + rK$$

$$CT = 3(20.5) + 3(30.75) = 61.5 + 61.5$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{CT}}} = \mathbf{123}$$

3- <u>نسبة ازدياد السعر النسبي للعمل:</u>

$$\sigma = \frac{\Delta\left[\frac{K}{L}\right] \Big/ \frac{K}{L}}{\Delta[TMST] / TMST}$$

نعلم ان في التوازن:

$$TMST = \frac{w}{r}$$

$$\sigma = \frac{\Delta\left[\frac{K}{L}\right] \Big/ \frac{K}{L}}{\Delta\left[\frac{w}{r}\right] \Big/ \frac{w}{r}}$$

$$\Delta\left[\frac{w}{r}\right] \Big/ \frac{w}{r} = \frac{\Delta\left[\frac{K}{L}\right] \Big/ \frac{K}{L}}{\sigma} = \frac{10\%}{0.9} = 11.11\%$$

التمرين الرابع:

نفترض دوال الانتاج الثلاث التالية:

$$\boldsymbol{X_1 = K^{0.2}L^{\,0.5}} \quad , \qquad \boldsymbol{X_2 = 2L^{3/4}K^{\beta}} \quad , \quad \boldsymbol{X_3 = 2K^{1/2}L^{1/2}}$$

المطلوب:

1. أوجد المعدل الحدي للإحلال التقني $\boldsymbol{TMST}$ في الحالة العامة للدالة $\boldsymbol{X = f(K, L)}$.
2. أحسب المعدل الحدي للإحلال التقني $\boldsymbol{TMST}$ للدالتين $\boldsymbol{X_1}$ و$\boldsymbol{X_2}$.
3. ما هي قيمة المعدل الحدي للإحلال التقني $\boldsymbol{TMST}$ بالنسبة لدالة الانتاج $\boldsymbol{X_3}$ في حالة $\boldsymbol{L = 3}$ و $\boldsymbol{X_3 = 2}$.

الاجابة:

1- **<u>أوجد المعدل الحدي للإحلال التقني $\boldsymbol{TMST}$ في الحالة العامة للدالة $\boldsymbol{X = f(K, L)}$.</u>**

الحالة العامة لدالة الإنتاج $X = f(L, K)$

وبأخذ التفاضل الكلي لهذه الدالة: $dX = \frac{dX}{dL}dL + \frac{dX}{dK}dK$

بما أن تفاضل الثابت يساوي الصفر أي $dX = 0$ (مستوى الانتاج لا يتغير) وعليه فإن:

$$\frac{dX}{dL}dL + \frac{dX}{dK}dK = 0 \Rightarrow Pm_L dL + Pm_K dK = 0$$

$$\Rightarrow Pm_L dL = -Pm_K dK$$

$$\Rightarrow \frac{Pm_L}{Pm_K} = -\frac{dK}{dL}$$

$$TMST_{K,L} = -\frac{dK}{dL} = \frac{Pm_L}{Pm_K}$$

2- حساب المعدل الحدي للإحلال التقني $\boldsymbol{TMST}$ للدالتين $\boldsymbol{X_1}$ و $\boldsymbol{X_2}$.

❖ المعدل الحدي للإحلال التقني $TMST$ للدالة X_1

$$X_1 = K^{0.2}L^{0.5}$$

$$TMST_{X_1} = \frac{f_L'}{f_K'} = \frac{0.5K^{0.2}L^{-0.5}}{0.2K^{-0.8}L^{0.5}}$$

$$\boldsymbol{TMST_{X_1} = \frac{0.5K}{0.2L}}$$

❖ حساب المعدل الحدي للإحلال التقني $TMST$ للدالة X_2.

$$X_2 = 2L^{3/4}K^{\beta}$$

$$TMST_{X_2} = \frac{f_L'}{f_K'} = \frac{\frac{3}{2}L^{-1/4}K^{\beta}}{\beta 2L^{3/4}K^{\beta-1}}$$

$$\boldsymbol{TMST_{X_2} = \frac{3K}{4\beta L}}$$

3- قيمة المعدل الحدي للإحلال التقني $\boldsymbol{TMST}$ بالنسبة لدالة الانتاج $\boldsymbol{X_3}$ في حالة $\boldsymbol{L = 3}$ و $\boldsymbol{X_3 = 2}$.

$$X_3 = 2K^{1/2}L^{1/2}$$

$$2 = 2K^{1/2}(3)^{1/2}$$

$$K^{1/2} = \frac{2}{2\sqrt{3}}$$

$$K = \frac{1}{3}$$

$$TMST_{X_3} = \frac{f_L'}{f_K'} = \frac{K^{1/2}L^{-1/2}}{K^{-1/2}L^{1/2}} = \frac{K}{L}$$

لحساب قيمة المعدل الحدي للإحلال التقني $TMST$ بالنسبة لدالة الانتاج X_3 نعوض K و L بقيمتهما في $TMST$:

$$\boldsymbol{TMST_{X_3} = \frac{K}{L} = \frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{9}}$$

التمرين الخامس:

يتم انتاج السلعة X باستخدام عناصر الانتاج K و L، ودالة الانتاج التي تربط بين حجم الانتاج وكميات عناصر الانتاج ممثلة بالعلاقة التالية: $X = AL^{\alpha}K^{\beta}$

المطلوب:

1. ماذا يمكن أن تعلق على غلة الحجم لهذه الدالة.
2. ما هي قيمة زيادة X اذا كانت $\alpha + \beta = 2$ واذا كانت الكمية المضروبة في كل عنصر من عناصر الانتاج تساوي **2**.
3. أحسب قيمة العاملين α و β علماً أن:

- مرونة الانتاج بالنسبة الى عنصر رأس المال تساوي **0.5**.
- دالة الانتاج متجانسة من الدرجة الثانية.

الاجابة:

1- **التعليق على غلة الحجم لهذه الدالة:**

$$X^* = A(TL)^{\alpha}(TK)^{\beta}$$
$$X^* = AT^{\alpha}L^{\alpha}T^{\beta}K^{\beta}$$
$$X^* = T^{\alpha+\beta}AL^{\alpha}K^{\beta}$$
$$X^* = T^{\alpha+\beta}X$$

- اذا كانت $\alpha + \beta > 1$ تكون غلة الحجم مزايدة.

- اذا كانت $\alpha + \beta < 1$ تكون غلة الحجم متناقصة.

- اذا كانت $\alpha + \beta = 1$ تكون غلة الحجم ثابتة.

2- **قيمة زيادة X اذا كانت $\alpha + \beta = 2$ واذا كانت الكمية المضروبة في كل عنصر من عناصر الانتاج تساوي 2**

$$X^* = T^{\alpha+\beta}X$$
$$X^* = 2^2X$$
$$\boldsymbol{X^* = 4X}$$

يعني أن الإنتاج يتزايد بـ 4 مرات عند تكون علة الحجم متزايدة وتساوي 2 أي زيادة عناصر الإنتاج بـ 2 مرة أدى الى زيادة الإنتاج بـ 4 مرات .

3- **حساب قيمة العاملين α و β:**

$$\omega_K = \frac{\partial \log_X}{\partial \log_K} = \frac{\frac{\partial X}{X}}{\frac{\partial K}{K}} = \frac{\partial X}{\partial K}\frac{K}{X}$$

$$\omega_K = X = A\beta L^{\alpha} K^{\beta-1} \frac{K}{AL^{\alpha}K^{\beta}}$$

$$\omega_K = \beta$$

حسب المعطيات:

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_K = 0.5 \\ \omega_K = \beta \end{array}\right. \Longrightarrow \boldsymbol{\beta = 0.5}$$

بما أن الدالة متجانسة من الدرجة الثانية هذا يعني: $\alpha + \beta = 2$

$$\left\{\begin{array}{l} \beta = 0.5 \\ \alpha + \beta = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \boldsymbol{\alpha = 1.5}$$

التمرين السادس:

اذا أعطيت دالة الانتاج بالشكل التالي: $\boldsymbol{X = L^{1/2}K^{\beta}}$، حيث أن $\boldsymbol{X = L = K}$

1. أحسب قيمة $\boldsymbol{\beta}$.
2. ما هي نسبة الازدياد النسبي في الانتاج عندما تزيد كمية عنصر العمل **L**بنسبة **10%** (مع ثبات عنصر رأس المال $\boldsymbol{K}$).

الاجابة:

1- <u>حساب قيمة</u> $\boldsymbol{\beta}$:

$$X = L^{1/2}K^{\beta}$$
$$X = X^{1/2}X^{\beta}$$
$$1 = \frac{1}{2} + \beta$$
$$\beta = 1 - \frac{1}{2}$$
$$\boldsymbol{\beta = \frac{1}{2}}$$

2- **نسبة الازدياد النسبي في الانتاج عندما تزيد كمية عنصر العمل L بنسبة 10% (مع ثبات عنصر رأس المال K):**

$$\omega_L = \frac{\partial \log_X}{\partial \log_L} = \frac{\frac{\Delta X}{X}}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{\Delta \mathrm{X}}{\Delta \mathrm{L}}\frac{L}{X} = \frac{1}{2}L^{-1/2}K^{\beta}\,\frac{L}{L^{1/2}K^{\beta}}$$

$$\omega_L = \frac{1}{2}L^{-1/2}K^{\beta}\,\frac{L}{L^{1/2}K^{\beta}}$$

$$\omega_L = \frac{1}{2}$$

بالتعويض في قانون المرونة نجد:

$$\omega_L = \frac{\frac{\Delta X}{X}}{\frac{\Delta L}{L}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{\Delta X}{X}}{10\%}$$

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{1}{2}(10\%)$$

$$\boldsymbol{\frac{\Delta X}{X} = 5\%}$$

التمرين السابع:

حدد مرونة الانتاج لعناصر الانتاج في الدوال التالية:

$$X_1 = 2K^{\beta}L^{\alpha}T^{\lambda}$$

$$X_2 = 2aKL - bK^2 - cL^2$$

الاجابة:

❖ **تحديد مرونة الانتاج لعناصر الانتاج بالنسبة للدالة $\boldsymbol{X_1 = 2K^{\beta}L^{\alpha}T^{\lambda}}$:**

- مرونة الانتاج بالنسبة لعنصر العمل:

$$\omega_L = \frac{\partial \log_X}{\partial \log_L} = \frac{\frac{\partial X_1}{X_1}}{\frac{\partial L}{L}} = \frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial \mathrm{L}}\frac{L}{X_1} = \frac{Pm_L}{PM_L}$$

$$\omega_L = \alpha 2K^{\beta}L^{\alpha-1}T^{\lambda}\frac{L}{2K^{\beta}L^{\alpha}T^{\lambda}}$$

$$\omega_L = \alpha$$

- مرونة الانتاج بالنسبة لعنصر راس المال:

$$\omega_K = \frac{\partial \log_X}{\partial \log_K} = \frac{\frac{\partial X_1}{X_1}}{\frac{\partial K}{K}} = \frac{\partial X_1}{\partial K}\frac{K}{X_1} = \frac{Pm_K}{PM_K}$$

$$\omega_K = \beta 2K^{\beta-1}L^{\alpha}T^{\lambda}\frac{K}{2K^{\beta}L^{\alpha}T^{\lambda}}$$

$$\omega_L = \beta$$

- مرونة الانتاج بالنسبة لعنصر الارض:

$$\omega_T = \frac{\partial \log_X}{\partial \log_T} = \frac{\frac{\partial X_1}{X_1}}{\frac{\partial T}{T}} = \frac{\partial X_1}{\partial T}\frac{T}{X_1} = \frac{Pm_T}{PM_T}$$

$$\omega_T = \beta 2K^{\beta}L^{\alpha}T^{\lambda-1}\frac{K}{2K^{\beta}L^{\alpha}T^{\lambda}}$$

$$\omega_L = \lambda$$

- **تحديد مرونة الانتاج لعناصر الانتاج بالنسبة للدالة $X_2 = 2aKL - bK^2 - cL^2$:**

- مرونة الانتاج بالنسبة لعنصر العمل:

$$\omega_L = \frac{\partial \log_X}{\partial \log_L} = \frac{\frac{\partial X_2}{X_2}}{\frac{\partial L}{L}} = \frac{\partial X_2}{\partial L}\frac{L}{X_2} = \frac{Pm_L}{PM_L}$$

$$\omega_L = [2aK - 2cL]\left[\frac{L}{2aKL - bK^2 - cL^2}\right]$$

$$\omega_L = \frac{2aKL - 2cL^2}{2aKL - bK^2 - cL^2}$$

- مرونة الانتاج بالنسبة لعنصر راس المال:

$$\omega_K = \frac{\partial \log_X}{\partial \log_K} = \frac{\frac{\partial X_2}{X_2}}{\frac{\partial K}{K}} = \frac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial \mathrm{K}} \frac{K}{X_2} = \frac{Pm_K}{PM_K}$$

$$\omega_L = [2aL - 2bK]\left[\frac{K}{2aKL - bK^2 - cL^2}\right]$$

$$\omega_L = \frac{2aKL - 2bLK^2}{2aKL - bK^2 - cL^2}$$