CHAPITRE II :
TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION

Introduction :
La conduction est la transmission de la chaleur à travers un corps sans déplacement de la matière. Le transfert de la chaleur comme l'énergie, est associe aux mouvements de vibration et de rotation des molécules et atomes, (énergie transformée en chaleur irréversiblement).

1. Loi de FOURIER

Soit un corps solide, homogène et isotrope à travers lequel passe un courant unidirectionnel de chaleur et soit une petite couche plane perpendiculaire à la direction x de propagation de la chaleur d'épaisseur dx et d'aire S à l'intérieur de ce milieu *(voir figure 1)* . Les deux faces de cette couche sont considérées des surfaces isothermes. La première est à la température $\boldsymbol{\Theta}$ et la seconde à la température $\boldsymbol{\Theta + d\Theta}$ *(avec $d\Theta < 0$).le transfert de chaleur se produit de la température la plus haute vers la température la plus basse.*

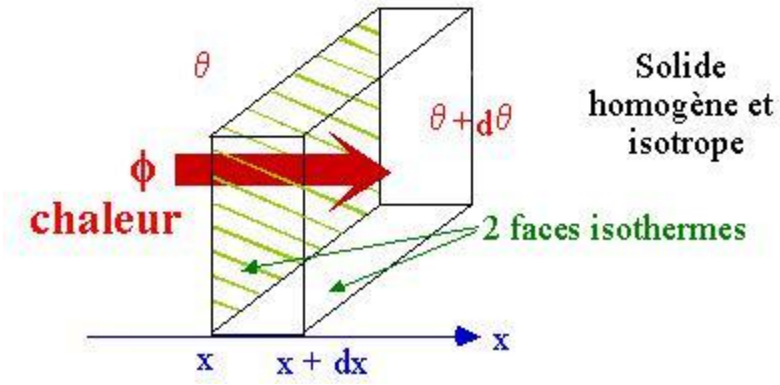


Figure 1 : Conduction dans une couche élémentaire de mur plan

Le gradient de température $\frac{d\theta}{dx}$, est la variation de la température par unité de longueur, lorsqu'on se déplace dans la direction de propagation de la chaleur.

La densité de flux thermique traversant la couche est proportionnelle au gradient de température

$$\varphi = -\lambda \frac{d\theta}{dx}$$

Tel que :

$\frac{d\theta}{dx}$ représente la variation de la température par unité de longueur, lorsqu'on se déplace dans la direction de propagation de la chaleur.

λ est la conductivité thermique du matériau. Elle dépend du matériau et de sa température.

λ s'exprime en $W.m^{-1}.K^{-1}$ dans le système international ou en $kcal.h^{-1}.m^{-1}.K^{-1}$.

les conductivités de quelque matériaux est présenté sur le tableau 1

Tableau 1. Conductivité thermique des matériaux

MATERIAUX CONDUCTEURS	CONDUCTIVITE THERMIQUE (λ)	MATERIAUX ISOLANTS	CONDUCTIVITE THERMIQUE (λ)
ALUMINIUM	230,00	EAU	0,660
CUIVRE	380,00	PLATRE HAUTE DENSITE	0,500
FONTE	56,00	CAOUTCHOUC	0,400
ACIER	52,00	PLAQUES DE PLATRE	0,350
PLOMB	35,00	BETON CELLULAIRE	0,270
GRANITE	3,00	BOIS NATUREL (chêne)	0,230
PIERRE FROIDE (Marbre)	2,90	PLEXIGLAS	0,190
ARDOISE	2,10	PANNEAUX PARTICULES DE BOIS	0,140
POLY CARBONATE ALVEOLAIRE	2,00	LIEGE COMPRIME	0,100
PIERRE MEULIERE	1,80	CARTON	0,07
BETON PLEIN	1,75	FIBRES MINERALES (LV/LR)	0,040
PVC	1,7	LAINE DE VERRE	0,04
ENDUIT CIMENT	1,15	PAILLE	0,04
TERRE CUITE (Brique)	1,15	POLYURETHANE EXPANSE	0,039
VERRE	1,15	POLYURETHANE EXTRUDE	0,033
PIERRE TENDRE	1,00	AIR	0,028

La densité de flux thermique à travers la couche plane est :

$$\varphi = -\lambda d\theta / dx$$

Le flux thermique à travers la couche plane, d'aire S est donc :

$$\phi = \varphi * S = -\lambda S\, d\theta / dx$$

2. Conduction à travers un mur plan homogène

Soit un mur plan homogène, d'aire *S* et d'épaisseur *e*, constitué par un matériau de conductivité thermique moyenne λ.

L'une des faces est à la température Θ1 et l'autre à la température Θ2 *(voir figure .2)*

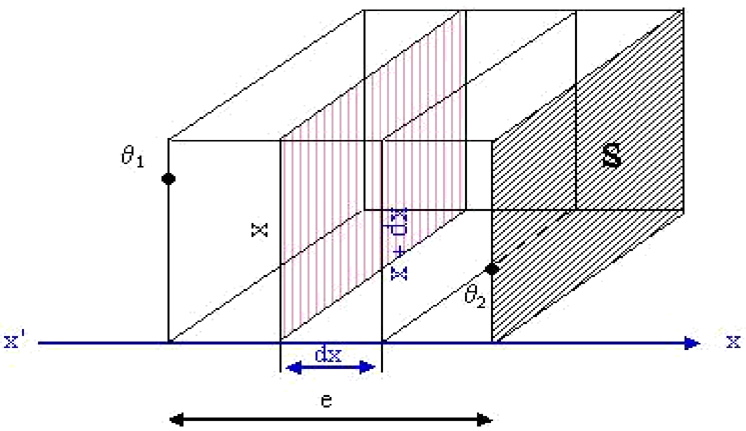


Figure 2 : Conduction dans un mur plan

2.1. Expression du flux thermique de conduction dans un mur plan

Si Θ1 > Θ2, un flux thermique s'écoule par conduction à travers le mur de la face 1 vers la face 2.

On suppose qu'il n'y a aucune perte de chaleur par les faces latérales du mur.

Les lignes d'écoulement de la chaleur sont rectilignes et perpendiculaires aux faces isothermes 1 et 2. Les faces latérales du mur limitent un tube d'écoulement et la loi de conservation de la chaleur nous permet d'écrire :

flux thermique **Φ1**= entrant par la face 1.	flux de chaleur **Φ** = traversant toute section intérieure parallèle aux faces.	flux de chaleur **Φ2** = sortant par la face 2

Le flux thermique traversant par conduction une mince paroi d'épaisseur ***dx*** située à une distance ***x*** de la face 1 et dont les faces sont respectivement aux températures ***Θ*** et ***Θ* + d*Θ*** , est donné par **la loi de FOURIER** :

$$\phi = -\lambda.S.\frac{d\theta}{dx}$$

En séparant les variables

$$\phi.\ dx = -\lambda.S.\ d\theta$$

après introduisant l'intégrale des deux cotés de l'équation et en limitant l'intervale de dx entre 0 et e et la variable dθ entre θ1 et θ2 on obtient :

$$\phi.\int_0^e dx = -\lambda.S.\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta$$

soit

$$\phi.\ e = -\lambda.S.\ (\theta_2 - \theta_1)$$

d'où l'expression du **flux thermique** :

$$\phi = \frac{\lambda.S.(\theta_1 - \theta_2)}{e}$$

et la densité de flux thermique est le flux rapporté à l'unité de surface soit :

$$\varphi = \frac{\lambda\ .\ (\theta_1 - \theta_2)}{e}$$

2.2. Expression de la résistance thermique de conduction d'un mur plan

Comme en électricité, **la résistance** est le rapport d'une différence de potentiel donc ici de température et d'un débit d'énergie donc ici **le flux Φ**, d'où l'expression suivante de **la résistance thermique.**

2.3. Profil des températures à travers le mur

Reprenons l'expression de **la loi de FOURIER** : **Φ.dx = - λ.S. dΘ**

Intégrons cette équation entre la face 1 d'abscisse **x = 0** et une surface d'abscisse **x** à la température **Θ** :

On obtient : **Φ. x = -λ . S. (Θ – Θ1)**

soit : $$\theta = \theta_1 - \frac{\phi \;.\; x}{\lambda \;.\; S}$$

La température diminue donc linéairement avec x entre les 2 faces du mur. Le profil des températures est donc linéaire.

*Rq. Pour un mur d'épaisseur donnée, la chute de température (**Θ**1 - **Θ**2) est d'autant plus grande que la conductivité thermique du matériau constituant le mur est petite.*

3. Conduction à travers plusieurs murs plans homogènes, en série

Considérons **plusieurs murs** limités par des plans parallèles *(voir figure 3)*, constitués par des matériaux de conductivités différentes, mais en contact parfait.

Soient **λ1**, **λ2**, **λ3**, les conductivités thermiques moyennes de chaque mur dont les épaisseurs sont respectivement **e1**, **e2**, **e3**.
On suppose comme précédemment qu'il n'y a pas de pertes latérales de chaleur.

Chaque mur est donc traversé par le même flux thermique Φ.

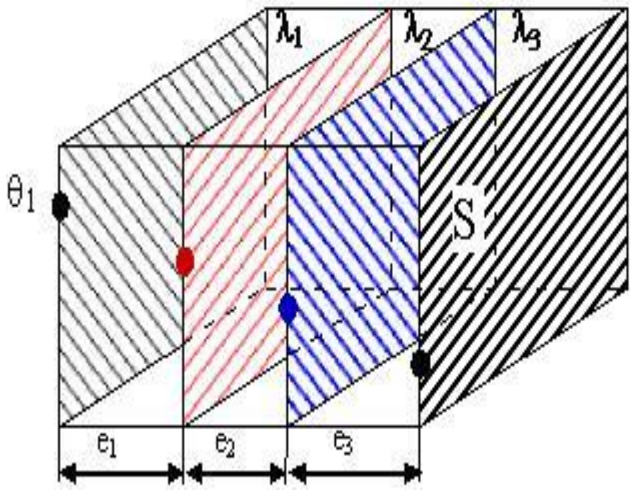


Figure 3 . Conduction à travers plusieurs murs plans en série

3.1. Expression du flux thermique de conduction à travers des murs en série

On peut écrire d'après le paragraphe précédent **le flux traversant chaque mur**, et en déduire les différences de température entre les faces de chaque mur :

- Pour le mur 1 :

$$\phi = \lambda_1 \cdot \frac{S}{e_1}(\theta_1 - \theta_2) \quad \Rightarrow \quad (\theta_1 - \theta_2) = \frac{\phi}{S} \; \frac{e_1}{\lambda_1}$$

Pour le mur 2 :

$$\phi = \lambda_2 \cdot \frac{S}{e_2}(\theta_2 - \theta_3) \quad \Rightarrow \quad (\theta_2 - \theta_3) = \frac{\phi}{S} \; \frac{e_2}{\lambda_2}$$

Pour le mur 3 :

$$\phi = \lambda_3 \cdot \frac{S}{e_3}(\theta_3 - \theta_4) \quad \Rightarrow \quad (\theta_3 - \theta_4) = \frac{\phi}{S} \; \frac{e_3}{\lambda_3}$$

et en additionnant membre à membre :

$$(\theta_1 - \theta_4) = \frac{\phi}{S} \left(\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3} \right)$$

d'où l'expression du flux thermique :

$$\phi = S \;.\; \left[\frac{1}{\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3}} \right] . (\theta_1 - \theta_4)$$

3.2. Expression de la résistance thermique équivalente à des murs en série

L'expression précédente du flux peut être en faisant passer ***S*** au dénominateur :

$$\phi = \left[\frac{1}{\underbrace{\frac{e_1}{\lambda_1 . S}}_{\text{Résistance du mur 1}} + \underbrace{\frac{e_2}{\lambda_2 . S}}_{\text{Résistance du mur 2}} + \underbrace{\frac{e_3}{\lambda_3 . S}}_{\text{Résistance du mur 3}}} \right] . (\theta_1 - \theta_4) = \underbrace{\left[\frac{1}{R_1 + R_2 + R_3} \right]}_{\text{Résistance équivalente}} . (\theta_1 - \theta_4)$$

On voit ainsi apparaître la résistance thermique de chacun des murs :
Ces 3 résistances sont placées en série et leur somme constitue la résistance thermique équivalente des 3 murs en série, soit :

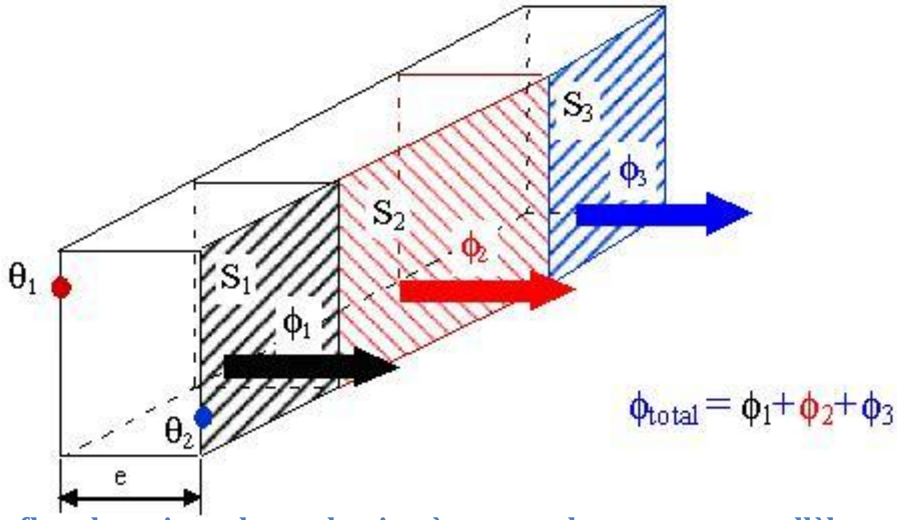
donc $\phi = \frac{\theta_1 - \theta_4}{R}$ avec **R = R1 + R2 + R3**

Comme en électricité, la résistance équivalente à des murs en série et la somme des résistances de chaque mur.

4. Conduction à travers plusieurs murs plans homogènes, en parallèle

Supposons maintenant que différents éléments solides soient juxtaposés par bandes, les uns à cotés des autres et que la température soit uniforme sur chacune de leurs deux faces *(voir figure 4).*

La différence de température **(Θ1-Θ2)** est donc la même pour chacun des éléments traversé respectivement par les flux thermiques **Φ1 , Φ2 , Φ3.**



4.1. Expression du flux thermique de conduction à travers des murs en parallèle

Si **R1, R2, R3** représentent les résistances thermiques de chacun des éléments, alors les flux traversant chaque mur sont donnés par :

$$\phi_1 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{R_1} \qquad \phi_2 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{R_2} \qquad \phi_3 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{R_3}$$

avec : $R_1 = \dfrac{e}{\lambda_1 . S_1}$ et $R_2 = \dfrac{e}{\lambda_2 . S_2}$ et $R_3 = \dfrac{e}{\lambda_3 . S_3}$

Le flux thermique total à travers l'ensemble est : **Φ**

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = (\theta_1 - \theta_2)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

4.2. Expression de la résistance thermique équivalente à des murs en parallèle

Les résistances thermiques **R1, R2, R3** de chacun des éléments sont en **parallèle** et **R** est la résistance équivalente.

Si les différents éléments en parallèle n'ont pas la même épaisseur comme représenté sur la *figure II.5*. Le raisonnement précédent s'applique à condition de pouvoir négliger les échanges thermiques par les faces latérales des bandes juxtaposées.

On obtient $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = (\theta_1 - \theta_2)\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}\right) = \dfrac{(\theta_1 - \theta_2)}{R}$

avec $R_1 = \frac{e}{\lambda_1.S_1}$ et $R_2 = \frac{e}{\lambda_2.S_2}$ et $R_3 = \frac{e}{\lambda_3.S_3}$

1/Req=1/Somme (1/Ri)

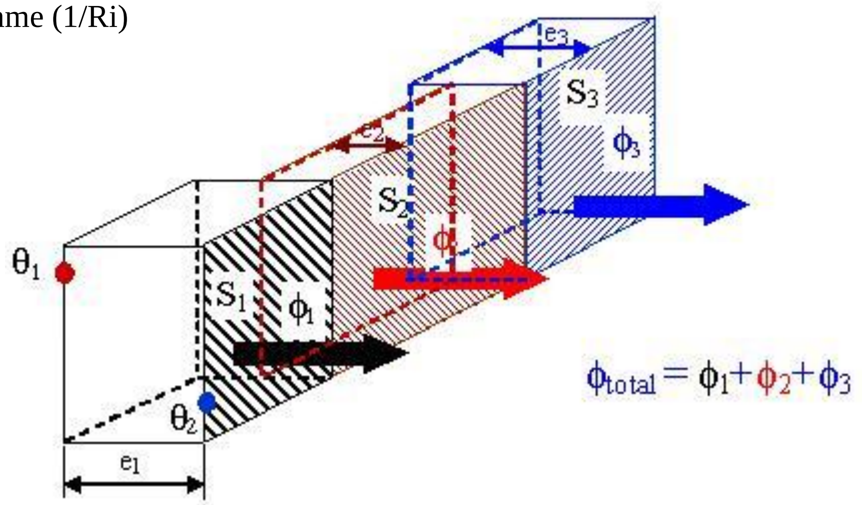


Figure 5 . Conduction à travers plusieurs murs plans d'épaisseurs différentes en parallèle.

En résumé, comme en électricité :

Si les résistances thermiques sont en série, la résistance équivalente est égale à la somme des résistances Si les résistances thermiques sont en parallèle, l'inverse de la résistance équivalente est égale à la somme des inverses des résistances.

5. Conduction à travers la paroi d'un tube cylindrique circulaire

Considérons un tube cylindrique *(voir figure 6)*

Soient **r1** le rayon de la paroi interne, **r2** celui de la paroi externe, **Θ1** et **Θ2** , les températures respectives des faces interne et externe et **λ** la conductivité thermique moyenne entre **Θ1** et **Θ2** du matériau constituant le tube.

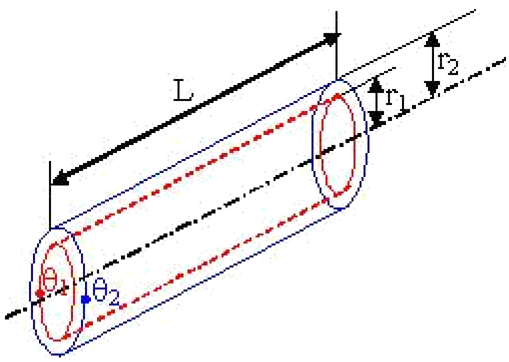


Figure 6 : Vue d'un tube cylindrique traversé par un flux de conduction

2.5.1. Expression du flux thermique à travers un tube cylindrique

On désire connaître le flux thermique qui traverse le tube de l'intérieur vers l'extérieur (lorsque **$\Theta 1$** > **$\Theta 2$)** pour une longueur **L** de tube. Par raison de symétrie, les lignes d'écoulement de la chaleur sont des droites dirigées selon des rayons. On dit que le transfert de chaleur est radial

Soit un cylindre de rayon intermédiaire r avec r1< r < r2 et ***d'épaisseur dr***

(voir figure 7)

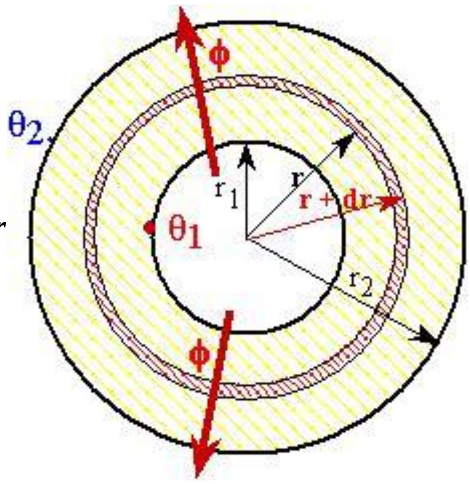


Figure.7 : Vue en coupe d'un tube cylindrique traversé par un flux de conduction

La densité de flux thermique à travers ce cylindre est donnée par la loi de FOURIER :

$$\phi = -\lambda . S . \frac{d\theta}{dr}$$

Le flux thermique correspondant est : $\phi = -\lambda . S . \frac{d\theta}{dr}$

S étant l'aire de la surface latérale du cylindre de rayon **r** et de longueur **L** soit : S = 2.Π.r.L

donc :

$$\phi = -\lambda . 2\pi . L . r . \frac{d\theta}{dr}$$

ou encore

$$d\theta = \frac{-\phi}{\lambda . 2\pi . L} . \frac{dr}{r}$$

Comme Φ est constant à travers tout cylindre coaxial de rayon **r** compris entre **r1** et **r2** , l'équation précédente peut donc s'intégrer de l'intérieur à l'extérieur du cylindre de la manière suivante :

d'où : $\theta_2 - \theta_1 = \frac{-\phi}{\lambda . 2\pi . L} . (\ln \ r_2 - \ln \ r_1) = \frac{-\phi}{\lambda . 2\pi . L} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$

On en déduit l'expression *du flux thermique*

$$\phi = \frac{\lambda . 2\pi . L}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} (\theta_1 - \theta_2)$$

5.3. Profil radial des températures à travers le tube

Chaque cylindre concentrique constitue une surface isotherme. On peut donc parler de profil radial de température.

On intègre l'expression donnant d *Θ* en fonc tion de Φ et r et d*r* entre la face interne du tube de rayon r1 et un cylindre de rayon r (r1 < r < r2) à la température Θ.

d'où $\int_{\theta_1}^{\theta} d\theta = \frac{-\phi}{\lambda.2\pi.L}.\int_{r_1}^{r}\frac{dr}{r}$ et $\theta = \theta_1 - \frac{\phi}{\lambda.2\pi.L}.\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$.

Cette expression montre que le long d'un rayon, la température décroît de Θ1 et Θ2 , selon une loi logarithmique. Le profil radial des températures n'est pas linéaire.

.6. Conduction à travers deux tubes concentriques accolés

Θ1 est la température de la face interne du **tube 1** de conductivité thermique **λ1**.

Θ3 est la température de la face externe du **tube 2** de conductivité thermique **λ2**.

Θ2 est la température de l'interface entre les 2 tubes

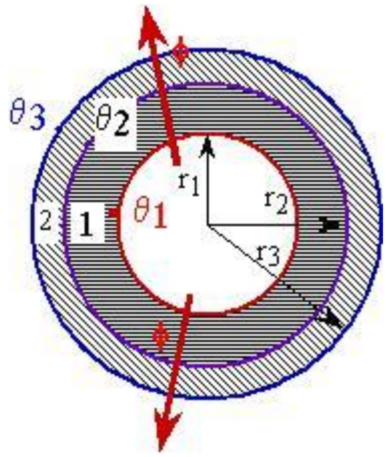


Figure 8 : Vue en coupe de 2 tubes cylindriques accolés

Considérons 2 tubes concentriques de longueur **L** en contact thermique parfait *(voir figure 8)*.

6.2. Expression du flux thermique à travers deux tubes cylindriques accolés

D'après la résistance équivalente calculée ci-dessus, **on déduit l'expression du flux thermique** :

$$\phi = \frac{(\theta_1 - \theta_3)}{R_1 + R_2} = \frac{(\theta_1 - \theta_3)}{\frac{e_1}{\lambda_1.S_{1ml}} + \frac{e_2}{\lambda_2.S_{2ml}}}$$