التمرين الاول:

يمتلك مستهلك ما وقت كلي متاح قدره (T). يخصص سواء للعمل بمقدار (W) أو للراحة بمقدار (L) ويستهلك السلعة (X) بسعر (P_X).

وتكتب دالة منفعته كما يلي $U = 2X^2L^2$

المطلوب

1. أكتب دالة الميزانية.
2. أوجد دوال الطلب على الراحة والسلعة (X).
3. أوجد المعدل الحدى للإحلال TMS_{XL}

الحل

1- ايجاد دالة الميزانية:

$$T = W + L$$

الوقت الكلي — وقت العمل — وقت الراحة (التسلية)

$$W = T - L$$

الإنفاق: XP_x

الدخل: $R = Wr$ حيث r معدل الاجرة.

$$R = (T - L)r$$

$$R = rT - rL$$

$$\text{الإنفاق} = \text{الدخل}$$

$$XP_x = rT - rL$$

$$X = \frac{rT}{P_x} - \frac{rL}{P_x}$$

2- دوال الطلب على الراحة (L) العمل (W) والسلعة (X):

تكتب معادلة لاقرونج بالشكل التالي:

$$L = 2X^2L^2 + \lambda(rT - rL - xP_x)$$

تكتب الشروط الاولى لتعظيم دالة المنفعة على الشكل:

$$\begin{cases} L'_L = 4X^2L - r\lambda = 0 \rightarrow (1) \\ L'_X = 4XL^2 - P_x\lambda = 0 \rightarrow (2) \\ L'_\lambda = rT - rL - xP_x = 0 \rightarrow (3) \end{cases}$$

بقسمة المعادلة (1) و (2) نجد:

$$\frac{4X^2L}{4XL^2} = \frac{\lambda r}{\lambda P_x}$$

$$xP_x = rL \rightarrow (4)$$

بتعويض المعادلة (4) في المعادلة (3) نجد دالة الطلب على السلعة X:

$$rT - xP_x - xP_x = 0$$

$$rT = 2xP_x$$

$$\bar{X} = \frac{R}{2P_x}$$

بتعويض $\bar{X}$ بقيمتها في المعادلة (4) نجد دالة الطلب على وقت الراحة L:

$$rL = (\frac{rT}{2P_x})P_x$$

$$\bar{L} = \frac{T}{2}$$

لإيجاد دالة الطلب على وقت العمل (W) لدينا:

$$W = T - L$$

$$W = T - \frac{T}{2}$$

$$\bar{W} = \frac{T}{2}$$

3- ايجاد المعدل الحدي لاحلال السلعة X بوقت التسلية (الراحة):

$$TMS_{XL} = \frac{\frac{\partial U}{\partial L}}{\frac{\partial U}{\partial X}} = -\frac{dX}{dL}$$

$$TMS_{XL} = \frac{4X^2L}{4XL^2} = \frac{X}{L}$$

نعوض X وL بقيمتهما نجد:

$$TMS_{XL} = \frac{X}{L} = \frac{{}^{rT}/_{2P_x}}{{}^{T}/_{2}} = \frac{r}{P_x}$$

التمرين الثاني:

لدى مستهلك دالة منفعة عبر الزمن كمايلي: $U = C_1C_2$

حيث تمثل:

C_1 : الإنفاق في الفترة الأولى.

C_2 : الانفاق في الفترة الثانية.

و يمكن أن يدخر جزء من دخله في الفقرة الاولى لينفقه في الفترة الثانية ، حيث يوظفه بمعدل فائدة ($i = 10\%$)

المطلوب :

1- أوجد قيد الميزانية للمستهلك.

2- أوجد دوال الإنفاق في الفترة الاولى والثانية.

3- اذا كان $y_1 = 4000$ و $y_2 = 3000$ أحسب الإنفاق في الفترة الأولى والثانية.

الحل

1- ايجاد قيد الميزانية للمستهلك:

$$C_2 = y_1(1+i) - C_1(1+i) + y_2$$

$$C_2 = 4000(1+0.1) - C_1(1+0.1) + 3000$$

$$C_2 = 4000(1.1) - C_1(1.1) + 3000$$

$$C_2 = 7400 - C_1(1.1)$$

2- أيجاد دوال الإنفاق في الفترة الاولى والثانية.

$$L = C_1C_2 + \lambda[y_1(1+i) - C_1(1+i) + y_2 - C_2]$$

$$\begin{cases} L'_{C_1} = C_2 - (1+i)\lambda = 0 \ \rightarrow \ (1) \\ L'_{C_2} = C_1 - \lambda = 0 \ \rightarrow \ (2) \\ L'_{\lambda} = y_1(1+i) - C_1(1+i) + y_2 - C_2 = 0 \ \rightarrow \ (3) \end{cases}$$

بقسمة المعادلة $\frac{(1)}{(2)}$ نجد :

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{(1+i)\lambda}{\lambda}$$

$$C_2 = C_1(1+i) \ \rightarrow \ (4)$$

نعوض المعادلة (4) في المعادلة (3) نجد دالة الانفاق في الفترة الاولى:

$$y_1(1+i) - C_1(1+i) + y_2 - C_1(1+i) = 0$$

$$y_1(1+i) + y_2 = C_1(1+i) + C_1(1+i)$$

$$y_1(1+i) + y_2 = 2C_1(1+i)$$

$$\boldsymbol{C_1 = \frac{y_1(1+i) + y_2}{2(1+i)}} \quad \text{(دالة الانفاق في الفترة الاولى)}$$

نعوض دالة الانفاق فب الفترة الاول في المعادلة (4) نجد دالة الانفاق في الفترة الثانية:

$$C_2 = C_1(1+i)$$

$$C_2 = (1+i)\left[\frac{y_1(1+i) + y_2}{2(1+i)}\right]$$

$$\boldsymbol{C_2 = \frac{y_1(1+i) + y_2}{2}} \quad \text{(دالة الانفاق في الفترة الثانية)}$$

3- حساب الإنفاق في الفترة الأولى والثانية:

نعوض كل من معدل فائدة ودخل الفترة الاولى ودخل الفترة الثانية بقيمها في دوال الانفاق للفترة الاول والثانية:

$$C_1 = \frac{y_1(1+i) + y_2}{2(1+i)} = \frac{4000(1+0.1)+3000}{2(1+0.1)} = \frac{7400}{2.2} = 3363.64$$

$$C_2 = \frac{y_1(1+i) + y_2}{2} = \frac{4000(1+0.1)+3000}{2} = \frac{7400}{2} = 3700$$

التمرين الثالث:

لدى مستهلك دالة منفعة عبر الزمن كمايلي: $U = C_1 {C_2}^{3/5}$

حيث تمثل:

C_1 : الإنفاق في الفترة الأولى.

C_2 : الانفاق في الفترة الثانية.

و يمكن أن يدخر جزء من دخله في الفقرة الاولى لينفقه في الفترة الثانية ، حيث يوظفه بمعدل فائدة ($i = 20\%$)

المطلوب :

1- أوجد قيد الميزانية للمستهلك.

2- اذا كان $y_1 = 1000$ و $y_2 = 648$ أحسب الإنفاق في الفترة الأولى والثانية.

الحل

1- ايجاد قيد الميزانية للمستهلك:

$$C_2 = y_1(1+i) - C_1(1+i) + y_2$$

$$C_2 = 1000(1+0.1) - C_1(1+0.2) + 684$$

$$C_2 = 1000(1.1) - C_1(1.2) + 648$$

$$C_2 = 1748 - C_1(1.2)$$

2- حساب الإنفاق في الفترة الاولى والثانية.

$$L = C_1 {C_2}^{3/5} + \lambda[y_1(1+i) - C_1(1+i) + y_2 - C_2]$$

$$\begin{cases} L'_{C_1} = {C_2}^{3/5} - (1+i)\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad (1) \\ L'_{C_2} = \frac{3}{5} C_1 {C_2}^{-2/5} - \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad (2) \\ L'_{\lambda} = y_1(1+i) - C_1(1+i) + y_2 - C_2 = 0 \quad \rightarrow \quad (3) \end{cases}$$

بقسمة المعادلة $\frac{(1)}{(2)}$ نجد:

$$\frac{{C_2}^{3/5}}{\frac{3}{5} C_1 {C_2}^{-2/5}} = \frac{(1+i)\lambda}{\lambda}$$

$$\frac{C_2}{\frac{3}{5} C_1} = (1+i)$$

$$C_2 = \frac{3}{5}C_1(1+i) \rightarrow (4)$$

نعوض المعادلة (4) في المعادلة (3) نجد دالة الانفاق في الفترة الاولى:

$$y_1(1+i) - C_1(1+i) + y_2 - \frac{3}{5}C_1(1+i) = 0$$

$$y_1(1+i) + y_2 = C_1(1+i) + \frac{3}{5}C_1(1+i)$$

$$y_1(1+i) + y_2 = \frac{8}{5}C_1(1+i)$$

$$\left(\text{دالة الانفاق في الفترة الاولى}\right) \quad \boldsymbol{C_1 = \frac{5[y_1(1+i) + y_2]}{8(1+i)}}$$

نعوض دالة الانفاق فب الفترة الاول في المعادلة (4) نجد دالة الانفاق في الفترة الثانية:

$$C_2 = C_2 = \frac{3}{5}C_1(1+i)$$

$$C_2 = (1+i)\left[\frac{5(y_1(1+i) + y_2)}{8(1+i)}\right]$$

$$\left(\text{دالة الانفاق في الفترة الثانية}\right) \; \boldsymbol{C_2 = \frac{5[y_1(1+i) + y_2]}{8}}$$

نعوض كل من معدل فائدة ودخل الفترة الاولى ودخل الفترة الثانية بقيمها في دوال الانفاق للفترة الاول والثانية:

$$C_1 = \frac{5[y_1(1+i) + y_2]}{8(1+i)} = \frac{5[1000(1+0.2) + 648]}{8(1+0.2)} = \frac{9240}{9.6} = 962.5$$

$$C_2 = \frac{5[y_1(1+i) + y_2]}{8} = \frac{5[1000(1+0.2) + 648]}{8} = \frac{9240}{8} = 1155$$

التمرين الرابع:

لدى مستهلك دالة منفعة عبر الزمن كمايلي: $U = {C_1}^{1/2}C_2 + 4$

حيث تمثل:

C_1 : الإنفاق في الفترة الأولى.

C_2 : الانفاق في الفترة الثانية.

و يمكن أن يدخر جزء من دخله في الفقرة الاولى لينفقه في الفترة الثانية ، حيث يوظفه بمعدل فائدة $(i = 8\%)$

المطلوب :

1- أوجد قيد الميزانية للمستهلك.

2- أوجد دوال الطلب على الإنفاق في الفترة الاولى والثانية.

3- اذا كان $y_1 = 7000$ و $y_2 = 6000$ أحسب الإنفاق في الفترة الأولى والثانية.

الحل

1- ايجاد قيد الميزانية للمستهلك:

$$C_2 = y_1(1+i) - C_1(1+i) + y_2$$
$$C_2 = 7000(1+0.08) - C_1(1+0.08) + 6000$$
$$C_2 = 7000(1.08) - C_1(1.08) + 6000$$
$$C_2 = 13560 - C_1(1.08)$$

2- أيجاد دوال الإنفاق في الفترة الاولى والثانية.

$$L = {C_1}^{1/2}C_2 + 4 + \lambda[y_1(1+i) - C_1(1+i) + y_2 - C_2]$$

$$\begin{cases} L'_{C_1} = \frac{1}{2}C_1^{-1/2}C_2 - (1+i)\lambda = 0 \ \rightarrow \ (1) \\ L'_{C_2} = {C_1}^{1/2} - \lambda = 0 \ \rightarrow \ (2) \\ L'_{\lambda} = y_1(1+i) - C_1(1+i) + y_2 - C_2 = 0 \ \rightarrow \ (3) \end{cases}$$

بقسمة المعادلة $\frac{(1)}{(2)}$ نجد:

$$\frac{\frac{1}{2}C_1^{-1/2}C_2}{{C_1}^{1/2}} = \frac{(1+i)\lambda}{\lambda}$$
$$\frac{\frac{1}{2}C_2}{C_1} = (1+i)$$
$$C_2 = 2C_1(1+i) \ \rightarrow \ (4)$$

نعوض المعادلة (4) في المعادلة (3) نجد دالة الانفاق في الفترة الاولى:

$$y_1(1+i) - C_1(1+i) + y_2 - 2C_1(1+i) = 0$$
$$y_1(1+i) + y_2 = C_1(1+i) + 2C_1(1+i)$$
$$y_1(1+i) + y_2 = 3C_1(1+i)$$
$$\boldsymbol{C_1 = \frac{y_1(1+i) + y_2}{3(1+i)}} \ \left(\textbf{دالة الانفاق في الفترة الاولى}\right)$$

نعوض دالة الانفاق فب الفترة الاول في المعادلة (4) نجد دالة الانفاق في الفترة الثانية:

$$C_2 = 2C_1(1+i)$$
$$\boldsymbol{C_2 = \frac{2[y_1(1+i) + y_2]}{3}} \ \left(\textbf{دالة الانفاق في الفترة الثانية}\right)$$

3- حساب الإنفاق في الفترة الاولى والثانية:

نعوض كل من معدل فائدة ودخل الفترة الاولى ودخل الفترة الثانية بقيمها في دوال الانفاق للفترة الاول والثانية:

$$C_1 = \frac{y_1(1+i) + y_2}{3(1+i)} = \frac{7000(1+0.08)+6000}{3(1+0.08)} = \frac{13560}{3.24} = 4185.2$$

$$C_2 = \frac{2[y_1(1+i) + y_2]}{3} = \frac{2[7000(1+0.08)+6000]}{3} = \frac{27120}{3} = 9040$$

التمرين الخامس: للمحاولة

لدى مستهلك دالة منفعة عبر الزمن كمايلي: $U = \frac{1}{2}logC_1 + \frac{1}{2}logC_2$

حيث تمثل:

C_1 : الإنفاق في الفترة الأولى.

C_2 : الانفاق في الفترة الثانية.

المطلوب :

1- أوجد قيد الميزانية للمستهلك.

2- أوجد دوال الطلب على الإنفاق في الفترة الاولى والثانية.

3- اذا كان $C_1 = X_1P_1$ و $C_2 = X_2P_2$ حدد دوال الطلب على السلع X_1 و X_2.

4- اذا كان $y_1 = 1000$ و $y_2 = 600$ و $i = 20\%$ و $P_1 = 5$ و $P_2 = 10$ أحسب الإنفاق في الفترة الأولى والثانية، والكميات X_1 و X_2.