تقدير المعلمات بطريقة المربعات الصغرى:

تتمثل طريقة المربعات الصغرى في إيجاد قيم تقديرية للمعلمات، وهذا عن طريق تدنية مجموع مربعات الأخطاء أي:

$$Min \sum_{i=1}^{n} e_i{}^2 = Min \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{b} X_i - \hat{a})^2$$

حيث:

$\hat{a}$: القيمة المقدرة لـ a.

$\hat{b}$: القيمة المقدرة لـ b.

$e_i = (Y_i - \hat{Y}_i)$: وتمثل البواقي.

Y_i : النموذج الاقتصادي.

$\hat{Y}_i$: النموذج المقدر.

- **فرضيات النموذج:**

لهذا النموذج جملة من الفرضيات :

H1 : يكون النموذج خطيا في X_i (أو في أي تحويل لـ X_i)

H2: قيم X_i تمت مشاهدتها دون أخطاء (X_i ليس عشوائي)

H3 :الأمل الرياضي للخطأ معدوم $E(\varepsilon_i) = 0$

H4 : تباين الخطأ ثابت $E(\varepsilon_i{}^2) = \delta_\varepsilon{}^2$

H5: لا يوجد ارتباط بين الأخطاء أي: $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

H6: الخطأ (ε_i) مستقل عن المتغير X_i أي: $\text{cov}(\varepsilon_i, X_i) = 0$

ولإيجاد قيم $\hat{a}$ و $\hat{b}$ نشتق $\sum_{i=1}^{n} e_i{}^2$ بالنسبة لكل من $\hat{a}$ و $\hat{b}$ أي:

$$\begin{cases} \partial \sum_{i=1}^{n} e_i{}^2 / \partial \hat{a} = -2\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{b} X_i - \hat{a}) = 0 \\ \partial \sum_{i=1}^{n} e_i{}^2 / \partial \hat{b} = -2 \sum_{i=1}^{n} X_i (Y_i - \hat{b} X_i - \hat{a}) = 0 \end{cases}$$

وبعد التبسيط نجد:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} Y_i = n\hat{a} + \hat{b} \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \hat{a} \sum_{i=1}^{n} X_i + \hat{b} \sum_{i=1}^{n} X_i{}^2 \end{cases}$$

ومنه نجد قيمتي $\hat{a}$ و $\hat{b}$ المقدرتين:

$$\begin{cases} \hat{b} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i Y_i - n\overline{XY})}{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - n\bar{X}} = \dfrac{\mathrm{COV}(X_i, Y_i)}{\mathrm{V}(Y_i)} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} \\ \hat{a} = \bar{Y} + \hat{b}\bar{X} \end{cases}$$

حيث:

$\bar{X}$: الوسط الحسابي للمشاهدات X_i.

$\bar{Y}$: الوسط الحسابي للمشاهدات Y_i.

x_i و y_i : قيم المشاهدات المركزة بالنسبة لوسطها.

- **حساب معامل التحديد (R^2):**

هو مقياس يوضح نسبة المتغير التابع (Y_i) التي سببها التغير في المتغير المستقل(X_i) أي نسبة الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار إلى الانحدارات الكلية.[1]

ويتم حساب هذا المعامل كالآتي:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y} - \bar{y})^2 + \sum_{i=\&}^{n}(y_i - \hat{y})^2$$

وعليه:

$$\sum_{i=1}^{n} {e_i}^2 = (Y_i - \bar{Y})^2 - 2\hat{b}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X}) + \hat{b}^2 \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

وبالتبسيط نجد:

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = \hat{b}^2 \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n} {e_i}^2$$

أي

$$SCT = SCE + SCR$$

بقسمة طرفي المعادلة على $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$ نحصل على:

$$\hat{b}^2 \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 + \partial \sum_{i=1}^{n} {e_i}^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = 1$$

[1] – حسين علي بخيت وسحر فتح الله، مرجع سابق، ص81.

حيث نجد (R^2):

$$R^2 = 1 - \left(\sum_{i=1}^{n} {e_i}^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2 \right)$$

- وتتراوح قيمة R^2 بين $[0،1]$ ، وكلما كان R^2 قريبا من الواحد، كلما كان النموذج أحسن.

كما أن R^2 هو مربع معامل الارتباط الخطي البسيط "r" والذي يعطى بالعلاقة التالية[1]:

$$r_{X,Y} = \frac{COV(X,Y)}{\delta_X \delta_Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})\ \ (Y_i-\bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}}$$

و δ_Y ،δ_X يمثلان الانحراف المعياري لـ X و Y.

حيث أنه إذا كان:

$r = 1$: هناك ارتباط كلي موجب بين X و Y.

$r = -1$: هناك ارتباط كلي سالب بين X و Y .

$r = 0$: لا يوجد ارتباط بين X و Y .

1. نموذج الانحدار المتعدد:

يستند نموذج الانحدار المتعدد على افتراض وجود علاقة بين متغير تابع Y_i وعدد من المتغيرات التفسيرية $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots X_k$ وحد عشوائي ε_i.

ويعبر عن هذه العلاقة بالنسبة لـ n من المشاهدات و k من المتغيرات المستقلة بالشكل التالي:

$$\boxed{Y_i = B_0 + B_1 X_{i1} + B_2 X_{i2} + \ \ldots\ldots + B_k X_{ik} + \varepsilon_i}$$

وفي واقع الأمر فإن هذه المعادلة هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها (n) تكون نظام المعادلات الآتي:

[1]. REGIS BOURBONNAIS, Econométrie(6eme édition), Dunod, Paris, 2005, page10

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \cdots\cdots + \beta_k X_{k1} + \varepsilon_1 \\
Y_2 &= \beta_0 + \beta_1 X_{12} + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \cdots\cdots + \beta_k X_{k2} + \varepsilon_2 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
Y_n &= \beta_0 + \beta_1 X_{1n} + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kn} + \varepsilon_n
\end{aligned}$$

هذه المعادلة تتضمن $(k+1)$ من المعلمات المطلوب تقديرها، علما بأن الحد الأول منها (B_0)يمثل الحد الثابت، الأمر الذي يتطلب اللجوء إلى المصفوفات والأشعة لتقدير المعلمات، عليه يمكن صياغة هذه المعادلات على الشكل الآتي:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ Y_i \\ . \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & \cdots\cdots\cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots\cdots\cdots & X_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & X_{i1} & X_{i2} & \cdots\cdots\cdots & X_{ik} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \cdots\cdots\cdots & X_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ . \\ B_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ \varepsilon_i \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

ويمكن كتابتها على الشكل الآتي:

$$Y_{(n,1)} = X_{(n,k+1)} B_{(k+1,1)}$$

حيث أن:

Y : شعاع عمودي أبعاده $(n+1)$ يحتوي على مشاهدات المتغير التابع.

X : مصفوفة أبعادها $(k+1 \times n)$ تحتوي مشاهدات المتغيرات المستقلة.

B : شعاع عمودي أبعاده $(1 \times k+1)$ يحتوي على المعلمات المطلوب تقديرها.

ε : شعاع عمودي أبعاده $(1 \times n)$ يحتوي على الأخطاء العشوائية.

1) فرضيات النموذج[1]:

للنموذج المتعدد مجموعة من الفرضيات هي:

[1]– Régis bourbonnais, op-cit, page53.

H_1 : قيم (X_{ik}) تمت مشاهدتها دون أخطاء.

H_2 : الأمل الرياضي للخطأ معدوم: $E(\varepsilon_i) = 0$

H_3 : تباين الخطأ ثابت $E({\varepsilon_i}^2) = {\delta_\varepsilon}^2, \forall i$

H_4 : لا يوجد ترابط بين الأخطاء أي: $\mathrm{E}\,(\varepsilon_i\ ,\varepsilon_j) = 0\ ,\ \ \forall i \neq j$

H_5 : الخطأ (ε_i) مستقل عن المتغير (X_{ik}) أي: $\mathrm{COV}\,(X_{ik}\ ,\varepsilon_j) = 0$

H_6 : لا يوجد ارتباط بين المتغيرات المستقلة.

H_7 : عدد المشاهدات يجب أن يزيد عن عدد المعلمات المطلوب تقديرها أي: $(k+1<n)$.

2) تقدير المعلمات بطريقة المربعات الصغرى:

لتقدير معلمات نموذج الانحدار المتعدد نستخدم طريقة المربعات الصغرى مثلما رأينا في النموذج السابق.

لدينا النموذج على الشكل العام التالي:

$$Y = XB + \varepsilon$$
$$\hat{Y} = X\hat{B}$$
$$e = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{B}$$

وبما أن طريقة المربعات الصغرى تقوم على تدنية مجموع مربعات البواقي يصبح لدينا:

$$Min\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = Min\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$$

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i \qquad i = 1 \ldots\ldots n$$

$$Min\ e'e = Min\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = Min\left(Y - \hat{Y}\right)'\left(Y - \hat{Y}\right)$$

$$e'e = \left(Y - \hat{Y}\right)'\left(Y - \hat{Y}\right) = \hat{Y}'\hat{Y} - 2\hat{Y}'Y + Y'Y = \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} - 2\hat{\beta}'X'Y + Y'Y$$

حيث: $\hat{Y} = X\hat{B}$ و منه الهدف هو تصغير $Min\, e'e$:

$$\frac{\partial(e'e)}{\partial\beta} = 0$$

$$\Rightarrow 2(X'X)\hat{\beta} - 2X'Y$$

وبما أن رتبة x هي K فإن: (x'x) مصفوفة مربعة (K'×K) رتبتها K وتقبل معكوس $(X'X)^{-1}$

ومنه: $$2(X'X)\hat{\beta} - 2X'Y = 0 \;\; \Rightarrow (X'X)\hat{\beta} - X'Y = 0$$

نضرب طرفي المعادلة $(X'X)^{-1}$ نحصل على:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

3) حساب معامل التحديد R^2:

كما رأينا في الانحدار البسيط، فإن معامل التحديد يتم حسابه بالعلاقة التالية:

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

حيث :

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e'e = y'y - \hat{\beta}'x'y$$

$$y'y = \hat{\beta}'x'y + e'e$$

$$SCT = SCE + SCR$$

ومنه نحصل على :

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{\hat{\beta}'x'y}{y'y}$$

إن إضافة متغيرات مستقلة جديدة يؤدي إلى رفع قيمة R^2 ، وذلك لتغير قيمة البسط (SCE) مع ثبات قيمة المقام، غير أن الاستمرار بإضافة المتغيرات المستقلة سيؤدي إلى انخفاض درجة الحرية $(n-k-1)$ ممايتطلب استخراج معامل التحديد المصحح $\bar{R}^2$ وهو كالآتي:

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2)[(N-1)/(N-K-1)$$

ومنه $R^2 > \bar{R}^2$ ، وإذا كان n كبيرا فإن $R^2 \approx \bar{R}^2$.

4) اختبارات الفروض:

1-اختبار المعنوية:

a) اختبار ستودنت (*Test de Student*)

ستخدم اختبار (T) لتقييم معنوية تأثير المتغير أو المتغيرات المستقلة في المتغير التابع، ويعتمد هذا الاختبار على الفرضيتين التاليتين: $H_0 : B_i = 0$

$H_1 : B_i \neq 0 \qquad i: 0 \ldots\ldots k$

ويتم هذا الاختبار بحساب الإحصائية: T حيث:

$$T = \left|\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}}\right| \rightarrow \qquad T^{\alpha/2}_{n-k-1}$$

$\hat{B}_i$: هي القيمة المقدرة لـ B_i.

$\hat{\delta}_{B_i}$: الانحراف المعياري للمعلمة المقدرة $\hat{B}_i$.

و بما أن الفرضية H_0 تنص على انعدام B_i فإن قيمة T تصبح:

$$T = \left|\frac{\beta_i}{\delta_{b_i}}\right|$$

وبعد احتساب قيمة T تقارن مع قيمتها الجدولية المعطاة في الجدول الخاص بها عند درجة حرية $(n-k-1)$ ومستوى المعنوية المطلوبة (1%، 5%) لتحديد قبول أو فرضية العدم حيث:

k : هو عدد المعلمات.

n: هو عدد المشاهدات.

وقرار هذا الاختبار يكون كالآتي:

-إذا كان $|T_c| > T_t$ نرفض الفرضية H_0 .

-إذا كان $|T_c| < T_t$ نقبل الفرضية H_0 ، أي أن المعامل(X_i) ليس له تأثير على (Y_i) .

b) اختبار فيشر(*Test de Fisher*)

الهدف منه معرفة دلالة النموذج بصورة عامة وذلك باختبار الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0 : B_1 = B_2 = \ldots\ldots\ldots = B_k = 0 \\ H_1 : \exists i / B_i \neq 0, i = 1 \ldots\ldots k \end{cases}$$

يتم هذا الاختبار بحساب الإحصائية حيث:

$$F_c = \frac{R^2/(k)}{(1-R^2)/(n-k-1)} \quad \rightarrow F(kn-k-1)$$

- نقوم بمقارنة قيمة F_c (المحسوبة) مع F_t (الجدولية) عند درجة الحرية $(k, n-k-1)$، عند مستوى معنوية معين.
- فإذا كان $F_c < F_t$ فإننا نقبل H_0 ، أي أن العلاقة غير معنوية (ليس ثمة تأثير من أي متغير من المتغيرات على المتغير التابع).
- وإذا كان $F_c > F_t$ فإننا نرفض H_0 ، أي أن العلاقة معنوية (على الأقل متغير مستقل واحد يؤثر في المتغير التابع).

2–اختبار الارتباط الذاتي للأخطاء:

من جملة الفرضيات التي يقوم عليها النموذج القياسي، فرضية انعدام الارتباط الذاتي للأخطاء، إلا أن اختلال هذه الفرضية يؤدي إلى عدم الدقة في قياس العلاقات الاقتصادية عند استخدام طريقة المربعات الصغرى.

ولتحليل الارتباط الذاتي للأخطاء نفترض الآلية التالية لتولد الخطأ:

$$\varepsilon_i = p\varepsilon_{i-1} + \mu_i$$
$$E(\mu_i \mu_{i-1}) = 0 \qquad \mu_i \rightarrow N(0, \delta_\mu^2)$$
$$E\left(\mu_i^2\right) = \delta_\mu^2$$

ومن أهم اختبارات الارتباط الذاتي للأخطاء من الدرجة الأولى اختبار داربن واطسون.

3–اختبار داربن واطسون (**Test de Durbin Watson**)

يعتمد هذا الاختبار على الفرضيتين التاليتين

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0: \\ H_1 : \rho = 0 \end{cases}$$

ومن أجل اختبار هذه الفرضية نقوم بحساب إحصائية داربن واطسون "DW" حيث:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n}(e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2} \approx 2(1-\rho)$$

مع :

$$\rho \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i e_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} e_i}$$

بعد حساب DW نقارنها مع القيمتين المجدولتين (d_1) والتي تمثل الحد الأدنى لانعدام الارتباط الذاتي، و(d_2) التي تمثل الحد الأقصى، وذلك حسب عدد المشاهدات (n) وعدد المتغيرات المستقلة في النموذج لكل مستوى من مستويات الدلالة α $(1\%$ أو $5\,\%)$ ويتم قبول أو رفض الفرضيتين حسب المخطط التالي الذي يبين كافة الحالات الممكنة:

	$P > 0$	؟	$P = 0$	$P = 0$	؟	$P < 0$
0	d_1	d_2	2	$4-d_2$	$4-d_1$	4

قيمة d الوسطية هي "2"، وعندما ينعدم الارتباط الذاتي فإن $p = 0$.

ويتم رفض أو قبول H_0 حسب الحالات التالية:

$0 < d < d_1$: وجود ارتباط ذاتي موجب.

$d_1 < d < d_2$: مجال غير محسوم(هناك شك في وجود أو عدم وجود ارتباط ذاتي).

$d_2 < d < 4 - d_2$: عدم وجود ارتباط ذاتي.

$4 - d_2 < d < 4 - d_1$:مجال غير محسوم.

$4 - d_1 < d < 4$:وجود ارتباط ذاتي سالب.

4-اختبار بروش-غودفراي *(Breusch – Godfrey)*[1] :

يسمح باختبار الارتباط الذاتي للأخطاء الذي رتبته تفوق الواحد $(1 < p)$، يقوم هذا الاختبار بالبحث عن علاقة معنوية بين الباقي (e_i) وباقيه المتأخر، ويمر الاختبار بالمراحل التالية:

- حساب بواقي نموذج الانحدار (e_i).
- تقدير النماذج:

$$e_1 = b_0 + b_0 X_{1i} + b_2 X_{2i} + \ \ldots\ldots . b_k X_{ki} + p_1 e_{i-1} + p_2 e_{i-2} + V_i$$

- حساب الإحصائية $LM = nR^2$ ، حيث أن R^2 معامل التحديد لنموذج الانحدار.

إذا كان $LM = nR^2 > x^2_{(p)}$ ، نرفض فرضية عدم وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الثانية بين الأخطاء.

5-اختبار وايت *(White)*:

[1] – Régis Bourbonnais, op-cit, page 124-125.

يسمح هذا الاختبار بالكشف عن وجود أو عدم وجود مشكلة التجانس، أي أن البواقي لا تعاني من مشكلة التجانس.ومن خصائص هذا الاختبار:

- لا يتطلب معلومات سابقة عن مشكلة عدم ثبات التباين.
- لا يعتمد على افتراض اعتدال التوزيع.
- يصلح للعينات كبيرة الحجم.

وخطوات إجراء هذا الاختبار هي:

- تقدير دالة الانحدار الأصلية باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1t} + \alpha_2 X_{2t} + \cdots + \alpha_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

حيث:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_1 X_{1t} + b_1 X_{1t}^2 + \cdots + \alpha_k X_{kt} + b_k X_{kt}^2 + \alpha_0 + \mu_t$$

نقوم باختبار فرض العدم H_0 وذلك بمقارنة (nR^2) مع $\chi^2_{(q)}$ ، عند مستوى معنوية 5% ودرجات حرية عدد المعلمات الانحدارية في صيغة الانحدار المساعد (أي مع استبعاد المعلمات التقاطعية).

$$\begin{cases} H_0: \alpha_1 = b_1 = \cdots = \alpha_k = b_k = 0 \\ H_1: \alpha_1 \neq b_1 \neq \cdots \neq a_k \neq b_k \neq 0 \end{cases}$$

و العلاقة الإحصائية تكون كالأتي :

$$LM = nR^2 \sim \chi^2_{2k}$$

إذا رفضنا الفرضية H_0 فمعناه انه يوجد احتمال عدم تجانس تباينات الأخطاء و العكس صحيح

n: حجم العينة. R^2: معامل التحديد.

إذا كان $nR^2 > \chi^2_{(p)}$ نرفض فرض العدم ، وتوجد مشكلة عدم التباين.

حيث : p=2k