نظريه المنفعة :

تنطلق نظريه الطلب بدراسة سلوك المستهلك الفردي حيث يفترض ان طلب المستهلك يكون ممثلا في جمع طلبات المستهلكين الفرديين يكون المستهلك ال المدروس النيوكلاسكي مستهلك عقلاني يبحث على اعظم رفاهيه باعتبار دخله (يدعى هذا القانون بقانون تعظيم المنفعة)، ويأخذ المستهلك قراره باستعمال كل المعلومات الضرورية للوصول الى القرار الامثل يجب على المستهلك ان يقارن بين منفعة عدة مجموعات من السلع التي يستطيع شرائها بدخله.

توجد طريقتان لتحليل المنفعة: 1- طريقه المنفعة المقاسة، 2- طريقه المنفعة المرتبة.

1- نظريه المنفعة المقاسة:

يفترض في هذا الاطار ان المستهلك يستطيع قياس المنفعة التي يأخذها من استهلاك سلعه او مجموعه من السلع.

فرضيات النظرية:

- العقلانية: يبحث المستهلك على تعظيم رفاهيته في اطار دخله المحدود؛
- قياس المنفعة: قد تقاس واحسن مقياس يكون مقياس نقديا؛
- ثبات المنفعة الحديه للنقود : يعني ان قيمه النقود تبقى ثابته؛
- تناقص المنفعة الحديه: تكون المنفعة المشتقة من وحدات متتاليه من سلعه ما متناقصه؛
- تكون المنفعة الكلية لمجموعة سلع داله للكميات المستهلكة وتكتب داله المنفعة بالشكل التالي: $U=f(x_1,x_2,x3\ldots x_n)$ حيث تدل xi على كمية من السلعة i.

1-1- المنفعة الكلية والمنفعة الحديه والعلاقة بينهما:

1-1-1- *تعريفات:*

انما نشعر به من رغبات يولد عندنا حاجات تدفعنا للحصول على السلع والخدمات القابلة لإشباع هذه الحاجات ومن هنا تكتسب السلع والخدمات صفة المنفعة بالمعنى الاقتصادي.

يمكن أن تعرف منفعة سلعة ما بالنسبة لشخص معين بأنها: "تعبير عن شده الرغبة التي يبديها هذا الشخص للحصول على هذه السلعة في لحظه معينه وضمن اطار ظروف محدده"

اعتبر الجدول التالي تقييم السلعة X من طرف مستهلك ما.

Qx	Ut_x	UM_x
1	40	-
2	64	24
3	80	16
4	88	8
5	95	7
6	101	6

- يشير العمود الثاني الى المنفعة الكلية وتعرف على أنها: "مجموع المنافع التي يحصل عليها الفرد من مجموع السلع والخدمات المستهلكة خلال فتره زمنيه معينه".

- من ملاحظه بيانات الجدول تتزايد المنفعة الكلية بزياده الوحدات المستهلكة من اي سلعه ولكن بمعدل المتناقص حتى يبلغ المستهلك الاشباع الكامل.

- يشير الى عمود الثالث الى المنفعة الحديه وتعرف على أنها: "مقدار التغير في المنفعة الكلية الناتجة عن التغير في الكمية المستهلكه من السلعة بوحدة واحد في فتره زمنيه معينه".

$$UM=\frac{\Delta Ut}{\Delta Q}=\frac{Ut_2-Ut_1}{Q_2-Q_1}$$

- تظهر بيانات الجدول تناقص المنفعه الحديه (القانون الاول لقوسن- Gossen)

1-1-2-العلاقة بين المنفعة الحديه والمنفعة الكلية:

يمكن توضيح العلاقة بين المنفعة الحديه والمنفعة الكلية من خلال الجدول التالي:

Qx	Utx	UMx
0	0	-
1	10	10
2	16	6
3	20	4
4	22	2
5	22	0
6	20	-2

نسجل من خلال البيانات الجدول الملاحظات التالية:

- المنفعة الكلية ما هي الا مجموع المنافع الحدية [أخر وحدة مستهلكة $Q_x = 6$ تعطي منفعة كلية تساوي 20، في نفس الوقت مجموع المنافع الحدية 20=10+6+4+2+0+(-2)].

- تزايد المنفعة الكلية بمعدل متناقص ما هو الا انعكاس لتناقص المنفعة الحديه حتى الوحدة السادسة تقابلها منفعة حدية متناقصة عندما تصل المنفعة الكلية الى اقصاها عند $Q_x = 5$ تكون المنفعة الحدية صفراً وتتناقص المنفعة الكلية بعد $Q_x = 5$ تقابلها منفعة حدية سالبة.

1-2- توازن المستهلك:

ان الهدف الذي يسعى اليه المستهلك العقلاني هو تعظيم المنفعة الكلية التي يمكن ان يحصل عليها عند انفاق دخله النقدي على السلع والخدمات المتاحة. ويحقق المستهلك هدفه هذا، أو يقال أنه في حاله توازن عندما ينفق دخله بطريقة تتساوي من خلالها المنفعة التي تعود اليه عليه من اخر دينار منفق على السلع المختلفة.

ويتحقق توازن المستهلك عند توفر الشروط التالية:

- ❖ شرط المنافع الحدية للنقود:

$$\frac{UM_x}{P_x} = \frac{UM_y}{P_y} = \cdots = \frac{UM_n}{P_n}$$

في التوازن الدينار الاخير المنفق على السلعة X يقدم نفس المنفعة كالدينار الاخير المنفق على السلعة Y (وهذه الحالة تدعى بالقانون الثاني لقوسن).

- ❖ شرط الانفاق:

ان يكون مجموع المبالغ المنفقة على السلع مساوي للدخل النقدي أي أن:

$$Q_xP_x + Q_yP_y + \cdots + Q_nP_n = R$$

حيث تمثل Q_x، Q_y و Q_n كميات السلع X،Y وN على التوالي، وتمثل P_x،P_y و P_n اسعار السلع X،Y وN على التوالي، وR يمثل الدخل النقدي للمستهلك.

لتوضيح كيفيه اختيار المستهلك لمجموعة السلع التي تحقق له اقصى قدر ممكن من الاشباع في حدود دخله يعطى المثال التالي:

مثال 1: نفترض ان مستهلك ما يقوم بشراء سلعتين X وY مع العلم ان سعر السلعة X هو $P_x = 1$ وسعر السلعة Y هو $P_y = 2$ والدخل النقدي $R = 12$ وتوضح الكمية المستهلكة من السلعتين والمنافع الحدية منهما في الجدول التالي:

Q	UMx	UM_Y
1	38	60
2	34	54
3	31	50
4	28	46
5	27	42
6	25	38
7	23	33
8	20	28

أ. حدد نقطه توازن المستهلك؟

ب. حدد المنفعه الكلية المكتسبة؟

الحل:

أ- تحديد نقطة توازن المستهلك:

يمكن الوصول الى نقطه توازن المستهلك (اقصى اشباع ممكن في اطار دخله واسعار السلع) من خلال تطبيق شروط التوازن. وبما ان هذه الشروط تتطلب معرفة مسبقة للمنفعة الحدية للنقود للسلعتين والتي يمكن تحديدها كما يلي:

❖ **شرط المنافع الحديه للنقود:**

$$\frac{UM_x}{P_x} = \frac{UM_y}{P_y}$$

الازواج أو التركيبات السلعية التي تحقق هذا الشرط هي: $(5x,2y)$، $(6x,3y)$، $(7x,4y)$

Q	UMx	UM_Y	$\frac{UM_x}{P_x}$	$\frac{UM_y}{P_y}$
1	38	60	38	30
2	34	54	34	27
3	31	50	31	25
4	28	46	28	23
5	27	42	27	21
6	25	38	25	19
7	23	33	23	16.5
8	20	28	20	14

❖ **شرط الانفاق:**

لاختيار التركيبة المثلى من التركيبات الثلاث نختبر شرط الانفاق:

$$R = Q_xP_x + Q_yP_y$$

$$R = 5(1) + 2(2) = 9 \rightarrow \text{فائض}$$

$$R = 7(1) + 3(2) = 15 \rightarrow \text{عجز}$$

$$R = 6(1) + 3(2) = 12 \rightarrow \text{لاعجز ولا فائض}$$

التركيبة السلعية التي تحقق التوازن للمستهلك هي $A(6x,3y)$ وهي الوحيدة ضمن قيد الانفاق وقيد المنافع الحدية للنقود.

ب- تحديد المنفعة الكلية المكتسبة:

المنفعة الكلية المكتسبة هي مجموع المنافع الحدية للوحدات المستهلكة فقط:

$$Ut = \sum UM_{x,y}$$

$$Ut = (38 + 34 + 31 + 28 + 27 + 25) + (60 + 54 + 50) = 347$$

1-3- منحنى الطلب الفردي:

بإستخدام توازن المستهلك في ضوء فرضيات نظرية المنفعة الحدية، يمكن توضيح اشتقاق منحنى طلب المستهلك او طلب الفرد على سلعه معينه.

نبدأ بتوازن المستهلك الذي يحدد الكمية المطلوبة من السلعة عند سعر محدد، فاذا تغير سعر السلعة سوف يؤدي باتجاه نقطة أو وضع توازني جديد، وبهذا تتغير الكمية المطلوبة من السلعة. ومن حالة التوازن الجديدة نحصل على نقطة أخرى على منحنى طلب المستهلك للسلعة وبتكرار تغير السعر تغير الكمية المطلوبة لعدد من المرات نتوصل الى سلسلة من النقاط التوازنية، وبتوصيل هذه النقاط نحصل على منحنى طلب المستهلك للسلعة، والذي يبين الكميات المطلوبة من السلعة عند مستويات الاسعار المختلفة مع افتراض ثبات العوامل الاخرى على حالها وهي: الد خل النقدي للمستهلك، ذوق المستهلك، اسعار السلع الاخرى البديلة والمكملة لتلك السلعة.

مثال 2: باستخدام الجدول في المثال رقم واحد وجدنا أن المستهلك يصل الى اقصى اشباع ممكن بإنفاقه دخله النقدي $R = 12$ عند استهلاكه $(6x,3y)$ وعند مستويات اسعار $P_x = 1$ و $P_y = 2$.

لنفترض ان سعر السلعة Y انخفض من $P_y = 2$ الى $P_y = 1$ مع بقاء العوامل الاخرى ثابتة.

المطلوب:

أ. حدد الوضع التوازني الجديد؟

ب. وضح منحنى طلب المستهلك على السلعة؟

الحل:

أ- تحديد الوضع التوازني الجديد:

❖ **شرط المنافع الحديه للنقود:**

$$\frac{UM_x}{P_x} = \frac{UM_y}{P_y}$$

الازواج أو التركيبات السلعية التي تحقق هذا الشرط هي: $(4x,8y)$، $(1x,6y)$

Q	UMx	UMY
1	38	60
2	34	54
3	31	50
4	28	46
5	27	42
6	25	38
7	23	33
8	20	28

❖ **شرط الانفاق:**

لاختيار التركيبة المثلى من التركيبات الثلاث نختبر شرط الانفاق:

$$R = Q_x P_x + Q_y P_y$$

$$R = 1(1) + 6(1) = 7 \rightarrow$$ فائض

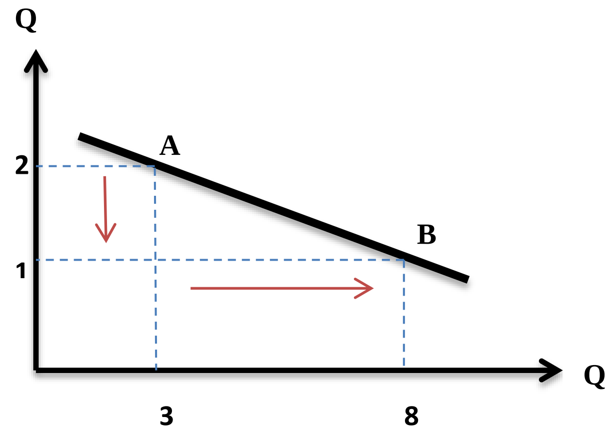
$$R = 4(1) + 8(1) = 12 \rightarrow$$ لاعجز ولا فائض

التركيبة السلعية التي تحقق التوازن للمستهلك هي $B(4x,8y)$ وهي الوحيدة ضمن قيد الانفاق وقيد المنافع الحدية للنقود.

ب- توضيح منحنى طلب المستهلك على السلعة y:

عند: $P_y = 2 \rightarrow y = 3$، وعند: $P_y = 1 \rightarrow y = 8$

باسقاط هذين النقطتين في المستوي نحصل على منحنى طلب السلعة.



يدرس منحنى طلب المستهلك على سلعه ما العلاقة بين الكميات المطلوبة ومستويات الاسعار المختلفة للسلعة.

يدل المثال السابق على ان طلب المستهلك الفردي على السلعة Y يتناسب عكسيا مع سعر نفس السلعة، حيث كلما كان السعر مرتفع تقل الكمية المطلوبة والعكس صحيح.

1-4- التبادل:

يتمكن المستهلك وهو في حاله توازن أن يزيد منفعته الكلية اذا تبادل السلع مع غيره ممن هم ايضا في حالة التوازن ولكن يواجهون اسعار مختلفة، ولكي يشترك فردين في مبادلة اختيارية لابد لكلاهما أن يكسب من ورائها وإلاّ فإن تحقيق خسارة أو عدم تحقيق مكسب لأي منهما يحمله على رفض المبادلة، بمعنى آخر يكون التبادل بين شخصين ممكن اذا أدت العملية الى تحسين وضعيه أحد المستهلكين بينما الاخر لا يكون في وضعيه أسوء بعد العملية.

اعتبر الجدول التالي:

	A		B	
Q	UMx	UMy	UMx	UMy
1	16	11	18	16
2	14	10	16	15
3	12	9	14	14
4	10	8	12	13
5	8	7	10	12
6	6	6	8	11
7	4	5	6	10
8	2	4	4	9

تكون نقطه الانطلاق ممثله في: $(3x,6y)$ للمستهلك A، $(6x,3y)$ للمستهلك B.

اذا كان التبادل يتم على اساس $1x = 1y$ وكان هدف المستهلك A والمستهلك B ممثل في تعظيم المنفعة الفردية يطرح السؤال حول امكانيه التبادل بين المستهلكين؟

الحل:

- قبل تحديد امكانية التبادل نوزع نقطة الانطلاق على الجدول.
- تكون امكانيه التبادل عندما المنفعة الحدية للسلعة X مقسومة على المنفعة الحديه للسلعة Y بالنسبة للمستهلك A لا تساوي المنفعة الحدية للسلعة X مقسومة على المنفعة الحدية للسلعة Y للمستهلك B، أي أن:

$$\frac{UM_{x_A}}{UM_{y_A}} \neq \frac{UM_{x_B}}{UM_{x_B}}$$

حسب المثال: $\frac{UM_{x_A}}{UM_{y_A}} = \frac{-8}{+14} = 0.57$ و $\frac{UM_{x_B}}{UM_{y_B}} = \frac{+12}{-6} = 2$

بما أن : $\frac{UM_{x_A}}{UM_{y_A}} \neq \frac{UM_{x_B}}{UM_{x_B}}$ فهناك امكانية للتبادل.

لتحديد نقطة التوازن المستهلكين A و B نلاحظ أنه حسب الجدول المستهلك A يفضل تعويض وحدات من Y بوحدات من X، بينما يفضل المستهلك B تعويض وحدات من X بوحدات Y.

في البداية، يتخلى المستهلك A على وحدة من Y (يخسر 6 منافع حدية) ويعوضها بوحدة X من (يربح 10 منافع حدية). بينما المستهلك B يعوض وحدة من X (يخسر 8 منافع حدية) ويعوضها بوحدة من Y (يربح 13 منافع حدية) أي تكون المرحلة الثانية هي المرحلة الأخيرة، بحيث أن استمرار التبادل بعد هذه المرحلة سوف يؤدي الى خسارة لكلا المستهلكين.
في النهاية يكون كلا المستهلكين في التوازن عندما يكسبان $(5x,4y)$ للمستهلك A، $(4x,5y)$ للمستهلك B.

	A	B
X	+10	-8
Y	-6	+13
ΔUTi	+4	+5

المرحلة الاولى

	A	B
X	+8	-10
Y	-7	+12
ΔUTi	1	2

المرحلة الثانية

	A	B
X	+6	-12
Y	-8	+11
ΔUTi	-2	-1

المرحلة الثالثة

ملاحظة:

- يكون التبادل ممكن اذا:

$$\frac{UM_{x_A}}{UM_{y_A}} \neq \frac{UM_{x_B}}{UM_{x_B}}$$

- يكون التبادل غير ممكن اذا:

$$\frac{UM_{x_A}}{UM_{y_A}} = \frac{UM_{x_B}}{UM_{x_B}}$$

2- نظرية المنفعة المرتبة:

تنطلق نظرية المنفعة المرتبة من فرضية عدم امكانية قياس المنفعة، في هذا الاطار يكون المستهلك قادر على ترتيب منفعة عدة سلع أو عدة مجموعات من السلع بدون أن يقيم منفعة كل سلعة أو مجموعة السلع.

الفرضيات:

- العقلانية: يكون المستهلك المدروس عقلانيا يبحث عن تعظيم رفاهيته على اساس كل المعلومات الضرورية.
- المنفعة المرتبة: تعني ان المستهلك بإمكانه ان يرتبط عدة مجموعات من السلع حسب تفضيلاته وتصوره للمنفعة التي يتحصل عليها باستهلاك كل مجموعة.
- تناقص المعدل الحدي للإحلال: هذه الميزة تعني تحدب منحنيات السواء نحو نقطه الاصل.

- تكون المنفعة التي يشعر بها المستهلك داله للكميات المستهلكة أي: $U = f(x_1, x_2, \dots x_n)$
- مواجهه مجموعتين من السلع A و B تؤدي الى:

$A \rhd B$ تعني أن A مفضلة على B.

$B \rhd A$ تعني غير متحيز.

$A \sim B$ تعني أن B مفضلة على A.

إذا كانت Cمجموعة سلعية أخرى:

إذا كان $A \rhd B$ و $B \rhd C$ يعني ذلك أن $A \rhd C$

2-1- منحنيات السواء:

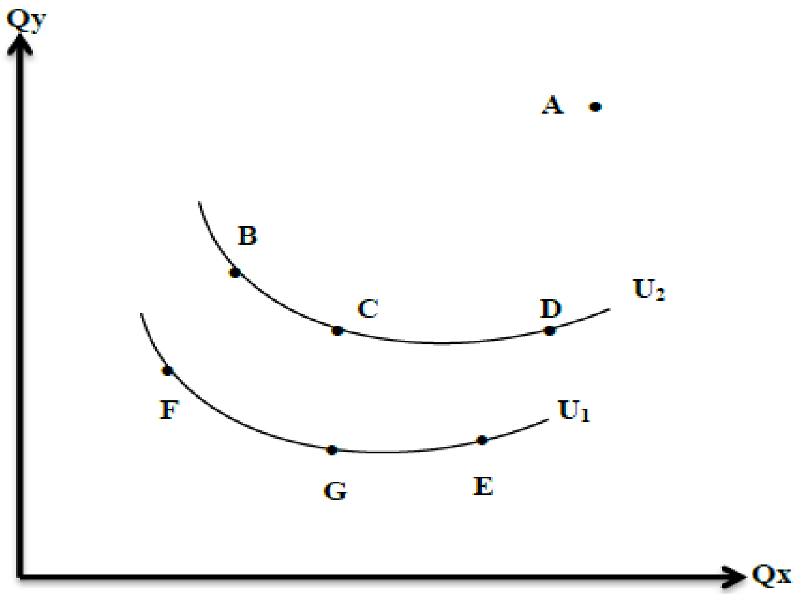
اذا اعتبر ان المستهلك يشتري سلعتين تكتب داله المنفعه للمستهلك على الشكل التالي: $U = f(x, y)$، حيث تمثل y وx كميات من السلع X و Y.

اعتبر الجدول التالي الذي يشير الى ترتيبات عده مجموعات من السلع من طرف مستهلك ما:

المجموعات	Qx	Qy	الترتيب
A	6	6	3
B	3	5	2
C	4	3	2
D	5	2	2
E	1	4	1
F	2	2	1
G	3	1	1

ملاحظة: المجموعات المفضلة لها النقطة الاعلى.

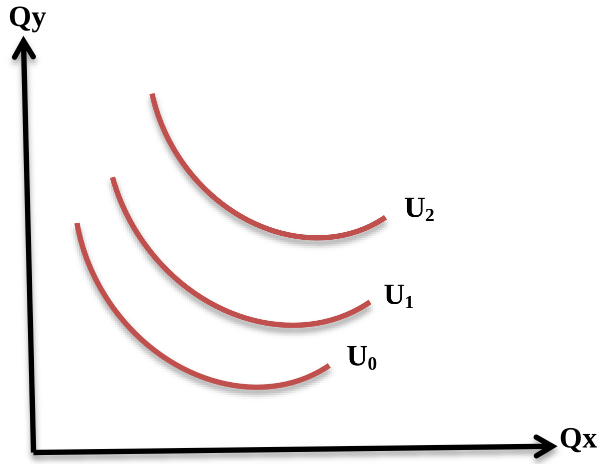
انطلاقا من بيانات الجدول يمكن رسم البيان التالي:



يكون مستوى معين من المنفعة محققا باستهلاك عده مجموعات من السلع، ولمستوى معين تكتب الدالة على الشكل: $U_0 = f(x, y)$ ، حيث يمثل U_0 موقع مجموعات الازواج (x, y) في الترتيب.

حسب الرسم البياني توفر المجموعات B، C وD نفس المستوى من المنفعة للمستهلك كذلك بالنسبة للمجموعات F، G وH.

يفترض انطلاقا من تعريف دالة المنفعة أنه بجانب المجموعات B، C وD مثلا التي تحتل نفس الترتيب توجد أزواج أخرى من (x, y) ترتب من طرف المستهلك في نفس المستوى. لذلك تقدر المنحنيات بدوال مستمرة وتأخذ الشكل التالي:



يمثل كل منحنى مستوى معين من المنفعة ويدعى بمنحنى السواء وجملة المنحنيات تدعى بخريطة السواء.

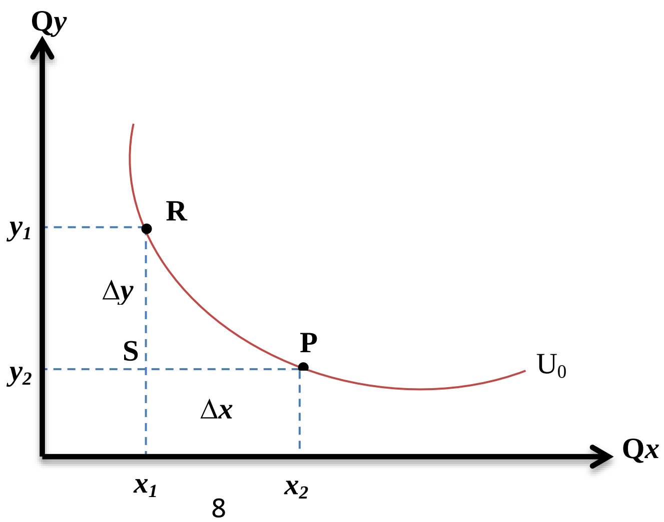
2-1-1- تعريف منحنى السواء: يمثل منحنى السواء كل الازواج أو المجموعات من X و Y التي تحقق نفس المنفعة لمستهلك معين.

2-1-2- خصائص منحنيات السواء:

- يكون الميل سالب اذا انخفضت كميه يجب ان تزداد كميه حتى يبقى على نفس منحنى السواء.
- يكون تقاطع منحنيين غير ممكن نقطه التقاطع تمثل مستويين مختلفين للمنفعة وهو غير ممكن.
- تزايد المنفعة بالابتعاد عن نقطه الاصل: تكون الزيادة في الكميات المستهلكة دائما مفضلة.
- تكون منحنيات السواء محدبة نحو نقطة الاصل: على طول منحنى السواء من اليسار الى اليمين يصعب تدريجيا تعويض كميات من y بكميات من x بسبب أقلية y وأكثرية x .

2-2-المعدل الحد للإحلال:

اعتبر البيان التالي:



يمثل المنحنى يمثل U_0 الازواج (x,y)، حيث كل زوج يوفر نفس مستوى المنفعة للمستهلك أي: $(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$، تبقى المنفعة ثابتة على طول المنحنى U_0 من اليسار الى اليمين. انتقال المستهلك من R الى P لا يؤثر على رفاهيه المستهلك لكن يؤثر على الكميات المستهلكة من X و Y.

عندما ينتقل المستهلك من R الى P يتخلى على كمية من السلعة Y أي $\Delta y = (0y_2 - 0y_1)$ ويعوضها بكمية من السلعة X أي$\Delta x = (0x_2 - 0x_1)$ ليبقى على نفس منحنى السواء U_0. ويكون معدل التعويض Y بـ X كمايلي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(0y_2 - 0y_1)}{(0x_2 - 0x_1)} = \frac{RS}{SP}$$

يمثل المعدل $\frac{RS}{SP}$عدد الوحدات من السلعة Y التي يتخلى عنها المستهلك حتى يتحصل على وحدة اضافية من السلعة X ويبقى على نفس منحنى السواء، يدعى هذا المعدل بالمعدل الحدي للإحلال.

اعتبر دالة المنفعة التالية: $U = f(x,y)$

بأخذ التفاضل الكلي للدالة نجد:

$$dU = \frac{\delta U}{\delta x}dx + \frac{\delta U}{\delta y}dy$$
$$dU = f'_x dx + f'_y dy$$

حيث أن:

- $\frac{\delta U}{\delta x}$: هي المنفعة الحدية للسلعة X.
- $\frac{\delta U}{\delta y}$: هي المنفعة الحدية للسلعة Y.

اذا تحرك المستهلك على نفس منحنى السواء يكون استهلاك أحد السلعتين يزداد والسلعة الاخرى تتناقص لكن تبقى المنفعة الكلية ثابتة أي رياضيا: $dU = 0$

اذن:

$$f'_x dx + f'_y dy = 0$$
$$f'_x dx = -f'_y dy$$
$$TMs = -\frac{dy}{dx} = \frac{f'_x}{f'_y}$$

تشير النسبة $(-\frac{dy}{dx})$ الى ميل منحنى السواء والذي يعني معدل تعويضY بـ X الذي لا يؤثر على مستوى رفاهية المستهلك.

تعريف المعدل الحدي للإحلال: يعرف المعدل الحدي للإحلال كالنسبة الموجبة بين كمية السلعة Y المتخلى عنها وكميات السلعة X التي تعوضها، حيث العملية لا تؤثر على مستوى رفاهيه المستهلك.

مثال 4: افترض ان دالة المنفعة لمستهلك ما تأخذ الشكل: $U = f(x,y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$

المطلوب: احسب المعدل الحدي للإحلال.

الحل:

$$dU = \frac{\delta U}{\delta x}dx + \frac{\delta U}{\delta y}dy$$
$$dU = f'_x dx + f'_y dy$$
$$dU = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}dx + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$0 = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}dx + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$TMs = -\frac{dy}{dx} = \frac{f'_x}{f'_y} = \frac{y}{x}$$

3- توازن المستهلك:

تنطلق نظرية سلوك المستهلك من فرضية وجود دخل محدود لدى المستهلك ويبحث هذا الاخير عن التوزيع الامثل لدخله في شراء السلع المختلفة. يكون الهدف الاساسي ممثلا في تعظيم المنفعة شريطة أن جمع النفقات لا تتجاوز مستوى الدخل.

3-1- القيد الميزاني للمستهلك خط الميزانية:

يعرف خط الميزانية بأنه جميع التوليفات المختلفة التي يمكن للمستهلك الحصول عليها في ظل دخل نقدي محدد وأسعار محددة للسلعتين وبذلك يعبر عن امكانيات المستهلك الحقيقية.

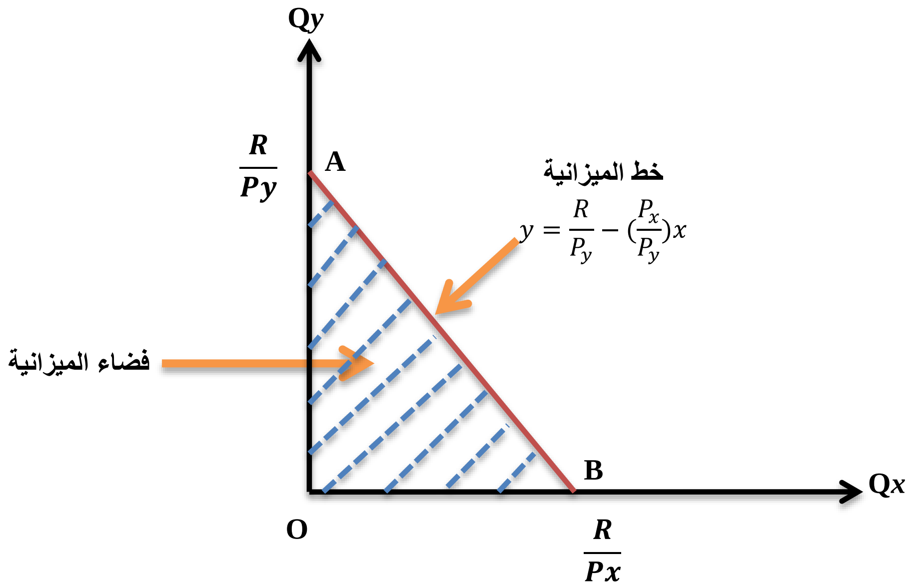
نفترض أن مستهلك ما لديه دخل ينفقه بكامله لشراء كميات من السلعتين X و Y وبأسعار P_x وP_y على التوالي.

يمكننا ذلك من كتابة معادلة أو خط قيد الميزانية بالعلاقة التالية: $R = xP_x + yP_y \ldots . (1)$، وحيث ان R، P_x و P_y ثوابت بينما x و y متغيرات موجبة.

يمكن اعادة كتابة المعادلة (1) بالشكل التالي:

$$y = \frac{R}{P_y} - \frac{xP_x}{P_y}$$

ترسم معادله خط الميزانية بيانيا بالشكل التالي:



يمثل المثلث (OAB) كافة التركيبات التي تقع تحت مستقيم الميزانية، والتي تدخل في مجموعة التركيبات الممكنة ولكنها لا تستنفذ كامل الدخل، بينما التركيبات أو التوليفات التي تقع فوق مستقيم الميزانية فهي مجموعة غير ممكنة والتي تتطلب عند نفس مستوى الأسعار دخلا أعلى، أما التوليفات التي تقع على خط الميزانية فهي التوليفات التي تستنفذ كامل الدخل والممكنة.

يلاحظ انطلاقا من معادله خط الميزانية أو من الرسم البياني أن ميل خط الميزانية يكتب على شكل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{AO}{OB}=-\frac{P_x}{P_y}$$

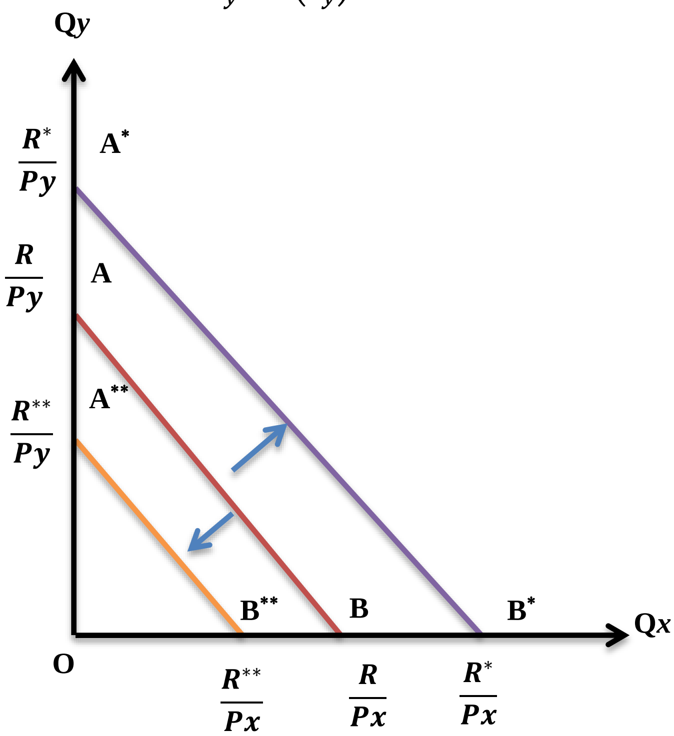
3-1-1- انتقال خط الميزانية:

يتحدد انتقال خط الميزانية في ثبات كل من الدخل R واسعار السلعتين P_x و P_y.

أ- انتقال خط الميزانية تغير في الدخل:

لا يؤثر أي تغير يقع على مستوى الدخل بالزيادة أو النقصان مع ثبات أسعار السلع على ميل خط الميزانية وتبقى العلاقة ثابتة، حيث اذا ازداد الدخل يكون خط الميزانية الجديد على يمين خط الميزانية الاصلي (أي تحرك خط الميزانية الجديد الى الاعلى بشكل موازي للخط الاصلي)، واذا انخفض الدخل يكون خط الميزانية الجديد على يسار خط الميزانية الاصلي (أي تحرك خط الميزانية الجديد الى الاسفل بشكل موازي للخط الاصلي) والشكل البياني يوضح ذلك:

- خط الميزانية الاصلي: $y=\frac{R}{P_y}-\left(\frac{P_x}{P_y}\right)x$
- خط الميزانية الجديد في حاله أن $R^*>R$ أي: $y=\frac{R^*}{P_y}-\left(\frac{P_x}{P_y}\right)x$
- خط الميزانية الجديد في حاله أن $R>R^{**}$ أي: $y=\frac{R^{**}}{P_y}-\left(\frac{P_x}{P_y}\right)x$

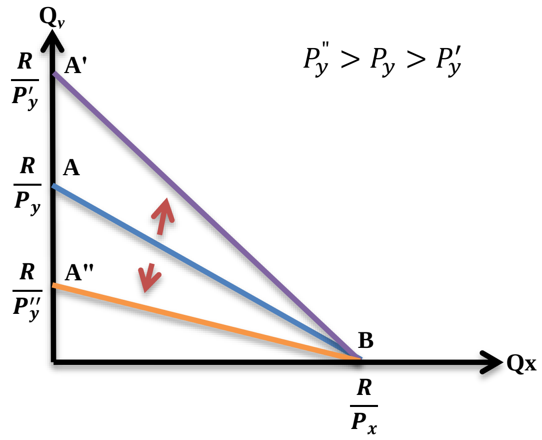


ب- انتقال خط الميزانية (تغير السعر):

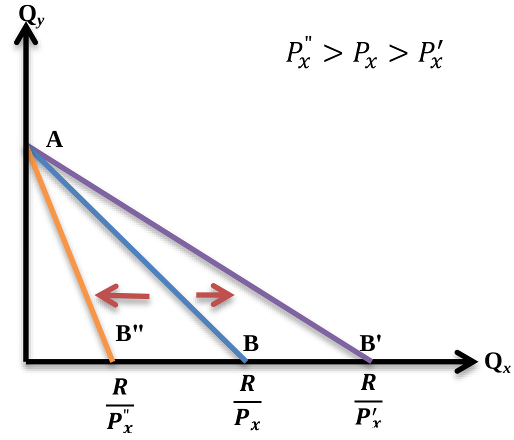
يؤدي تغير سعر أحد السلعتين مع بقاء سعر السلعة الأخرى والدخل ثوابت سواء بالارتفاع أو الانخفاض الى تغير في ميل خط الميزانية عند مختلف الاوضاع وذلك راجع الى تغير العلاقة بين السعرين.

- يؤدي انخفاض السعر P_x مع بقاء الدخل R والسعر P_y ثوابت الى دوران خط الميزانية الجديد حول النقطة A الى اليمين (يمين خط الميزانية الاصلي)، بينما يؤدي ارتفاع السعر P_x مع بقاء الدخل R والسعر P_y ثوابت الى دوران خط الميزانية حول النقطة A الى اليسار (يسار خط الميزانية الاصلي) الشكل رقم واحد يوضح الوضعيتان.

- يؤدي انخفاض السعر P_y مع بقاء الدخل R والسعر P_x ثوابت الى دوران خط الميزانية حول النقطة B الى اليمين (يمين خط الميزانية الاصلي)، بينما يؤدي ارتفع السعر P_y مع بقاء الدخل R والسعر P_x ثوابت الى دوران خط الميزانية حول النقطة B الى اليسار (يسار خط الميزانية الاصلي) الشكل رقم 2 يوضح الوضعيتان.



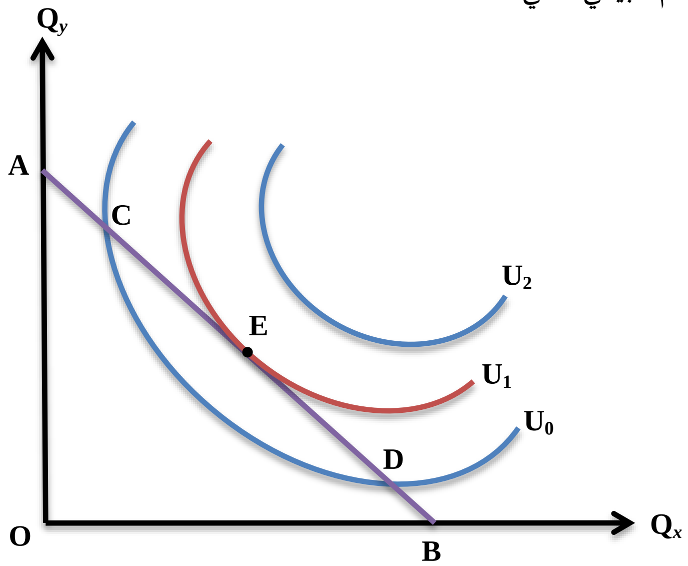
الشكل رقم 2: يوضح تحرك P_y



الشكل رقم 1: يوضح تحرك P_x

3-2- نقطة التوازن المستهلك

اعتبر الرسم البياني التالي:



تشير خريطة السواء لمستهلك معين الى ترتيب كل التركيبات من السلع التي يواجهها، بينما يحدد فضاء الميزانية امكانيه شراء المجموعات المعنية بالأمر

ينوي المستهلك العقلاني تعظيم رفاهيته المسالة المطروحة تكون عبارة عن اختيار التركيبات أو التوليفات ذات اكبر منفعة بشرط أن تكون تلك التركيبات تقع داخل فضاء الميزانية.

يتكون فضائي الميزانية من المثلث(OAB) حيث أن أي نقطة تقع خارج المثلث تكون غير متوفرة للمستهلك، تكون أي نقطة تحت الخط متوفرة للمستهلك، لكن يستطيع هذا الاخير أن يوجد دائما نقطة أخرى ذات منفعة أكبر لهذا يكون اختيار المستهلك لإيجاد نقطه توازنه على الخط AB.

افترض أن المستهلك يختار النقطة D (النقطة C). تكون المنفعة على يمين النقطة D (يسار النقطة C) منخفضة.

لكن يستطيع المستهلك على يسار النقطة D (يمين النقطة C) أن يتحصل على أكبر منفعة ينتقل الى منحنى سواء له ترتيب

أحسن (ينتقل من U_0 الى U_1)، ينتقل أو يختار المستهلك بهذه الفكرة النقطة E، حيث E نقطة التوازن باعتبار تفضيلات المستهلك أسعار السلع ودخله

رياضيا يمكن التعبير عن المشكلة المروحة أعلاه كما يلي:

$$MAX\ U = MAX\ F(X,Y)$$

و $$R - xP_x - yP_y = 0$$

تكتب داله لاڤرونج على الشكل:

$$L = F(x,y) + \lambda(R - xP_x - yP_y)$$

تكتب الشروط الاولى لتعظيم المنفعة على الشكل:

$$\begin{cases} L'_x = f'_x - \lambda P_x = 0 \quad \rightarrow \quad (1) \\ L'_y = f'_y - \lambda P_y = 0 \quad \rightarrow \quad (2) \\ L'_\lambda = R - xP_x - yP_y = 0 \quad \rightarrow \quad (3) \end{cases}$$

يؤدي استخدام المعادلتين (1) و (2) الى:

$$\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{P_x}{P_y} = TMS$$

ويؤدي حل جمله المعادلات (1)، (2) و(3) نستخرج الى قيم التوازن $\bar{y}$، $\bar{x}$ و $\bar{\lambda}$.

ملاحظه: تمثل λ المنفعة الحدية للدخل أو منفعة آخر وحدة نقدية منفقة على السلع المدروسة حيث: $\frac{dU}{dR} = \lambda$

مثال 5: تكتب داله المنفعة لمستهلك ما على الشكل التالي: $U = 5xy$، واذا كان دخل المستهلك R=20 وسعر السلعة X هو P_x=1 وسعر السلعة Y هو P_y=2.

المطلوب:

أ. اوجد نقطة توازن المستهلك ومثلها بيانيا.

ب. ادرس العلاقة بين نسبة الاسعار و المعدل الحدي للإحلال.

ج. فسر معنى المعامل في هذه الحالة.

د. فسر معنى المعدل الحدي للإحلال.

هـ. أن منحنى السواء محدد نحو نقطة الأصل في ضواحي نقطة التوازن.

الحل:

أ- ايجاد نقطة توازن المستهلك وتمثيلها بيانيا:

تكتب داله لاڤرونج على الشكل:

$$L = F(x,y) + \lambda(R - xP_x - yP_y)$$
$$L = 5xy + \lambda(20 - x - 2y)$$

تكتب الشروط الاولى لتعظيم المنفعة على الشكل:

$$\begin{cases} L'_x = 5y - \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad (1) \\ L'_y = 5x - 2\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad (2) \\ L'_\lambda = 20 - x - 2y = 0 \quad \rightarrow \quad (3) \end{cases}$$

بقسمة (1) على (2) نجد:

$$\frac{5y}{5x} = \frac{\lambda}{2\lambda}$$

$$\Rightarrow 2y = x \rightarrow (4)$$

بتعويض المعادلة (4) في المعادلة (3) نجد:

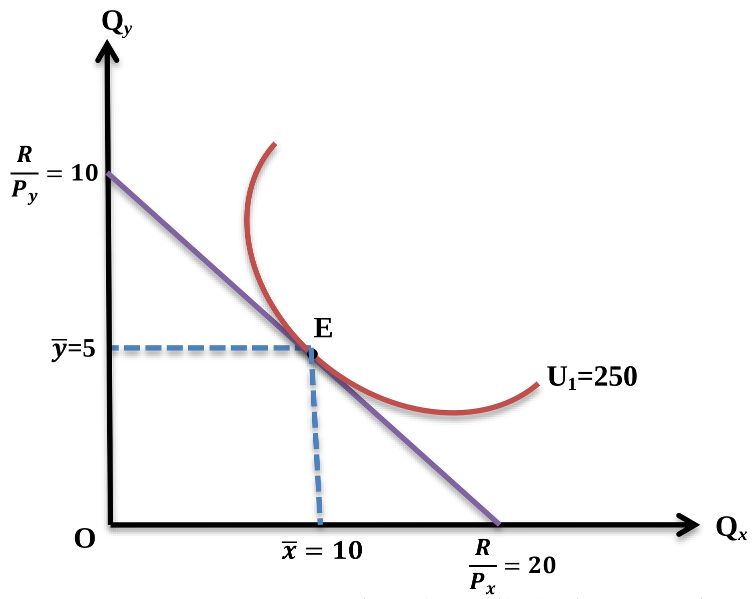
$$20 - 2y - 2y = 0$$
$$20 = 4y$$
$$y = \frac{20}{4} \Rightarrow \bar{y} = 5$$

بتعويض قيمة $\bar{y}$ في المعادلة (4) نجد قيمة $\bar{x}$:

$$x = 2y \Leftrightarrow x = 2(5)$$
$$\bar{x} = 10$$

بتعويض قيمة $\bar{y}$ في المعادلة (1) أو قيمة $\bar{x}$ في المعادلة (2) نجد قيمة $\bar{\lambda}$: وهي $\bar{\lambda} = 25$

التمثيل البياني للوضعية التوازنية:



ب- دراسة العلاقة بين نسبة الاسعار والمعدل الحدي للإحلال:

$$TMs = \frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{dy}{dx} = \frac{UM_x}{UM_y} = \frac{y}{x} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{1}{2}$$

ملاحظة: يساوي المعدل الحدي للإحلال إلى نسبة الاسعار في حالة التوازن.

ج- تفسير معنى λ: ارتفاع الدخل بوحدة واحدة يؤدي إلى زيادة المنفعة الكلية بقيمة λ أي 25 وحدة منفعة.

د- تفسير معنى المعدل الحدي للإحلال: المستهلك مستعد لتعويض وحدة من y بوحدتين من x ويبقى على نفس منحنى السواء $U=250$ (دون تغيير في المنفعة الكلية).

هـ- ليكون منحنى السواء محدد نحو نقطه الاصل يجب على مشتقه المعدل الحدي للإحلال بالنسبة لـ x أن تكون سالبة، أي:

$$\frac{dTM_S}{dx} = \frac{\partial TM_S}{\partial x} + \left[\frac{\partial TM_S}{\partial y} \times \frac{dy}{dx}\right]$$
$$TMs = \frac{f'_x}{f'_y} = \frac{y}{x}$$

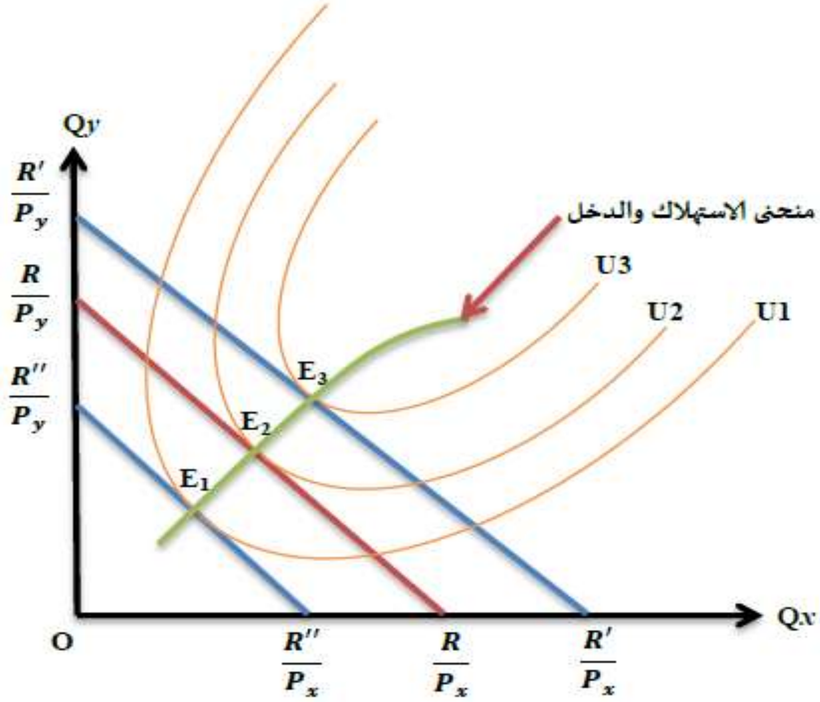
$$\frac{\partial TM_S}{\partial x}=\frac{-y}{x^2}$$
$$\frac{\partial TM_S}{\partial y}=\frac{1}{x}$$
$$\frac{dTM_S}{dx}=\frac{-y}{x^2}+\left[\frac{1}{x}\times(-\frac{y}{x})\right]$$
$$\frac{dTM_S}{dx}=\frac{-2y}{x^2}<0$$

اذا منحنى السوا ء فعلا محدب نحو الاصل.

4- أثر تغير الداخل:

1-4- منحنى الاستهلاك والدخل:

اعتبر ان مستهلك ما لديه دخل R_1 في الفترة t_1 وأسعار P_x و P_y. يكون المستهلك في وضع التوازن عند النقطة E_1 كما هو موضح في الشكل أدناه. اذا ارتفع الدخل الى في الفترة t_2 مع بقاء الاسعار والاذواق ثابتة يؤدي ذلك بالمستهلك الى وضع توازن جديد عند النقطة E_2، اذا إرتفع الدخل مرة أخرى يؤدي ذلك الى وضع توازن جديد ثاني عند النقطة E_3، يشير الرابط بين النقاط E_1 وE_2 وE_3 الى منحنى استهلاك الدخل.



تعريف: يعرف منحنى الاستهلاك والدخل بأنه المحل الهندسي لنقاط توازن المستهلك الناتجة عن تغير دخله مع ثبات الأسعار والاذواق.

2-4- منحنى انجل:

يمكن اشتقاق منحنى انجل من منحنى استهلاك الدخل وبين العلاقة بين الكميات المستهلكة في التوازن ومستوى الداخل ويمكن أن نحدد منحنى انجل بالعلاقة التالية: $X=g(R)$ أو $Y=g(R)$

2-4- 1-منحنى انجل وتحديد نوعية السلعة:

- اذا كان منحنى انجل موجب فإن $E_R>0$ تصنف السلعة عادية.
- اذا كان ميل منحنى انجل سالب فإن $E_R<0$ تصنف السلعة دنيا.

- اذا كان ميل المماس لمنحنى انجل عند نقطة معينة موجبا ويقطع محور الدخل فإن $E_R > 1$ تصنف السلعة كمالية.
- اذا كان ميل المماس لمنحنى انجل عند نقطة معينة موجبا ويقطع محور الكميات فإن $1 > E_R > 0$ تصنف السلعة ضرورية.

مثال: ليكن الجدول التالي الذي يبين تطور الكميات والدخل في التوازن لمستهلك ما:

النقطة	A	B	C	D	F	G	H	L
R	4000	6000	8000	10000	12000	14000	16000	18000
Qx	100	200	300	350	380	390	350	250

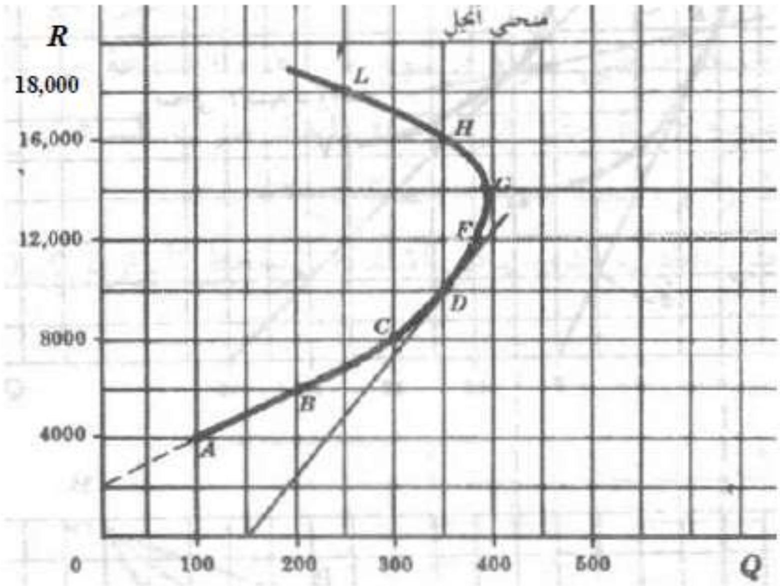
المطلوب:

أ. ارسم منحنى أنجل

ب. حدد ما اذا كانت السلعة X ضرورية أو كمالية أو دنيا عند النقاط *AB، FD، LH*.

الحل:

أ- رسم منحنى أنجل:



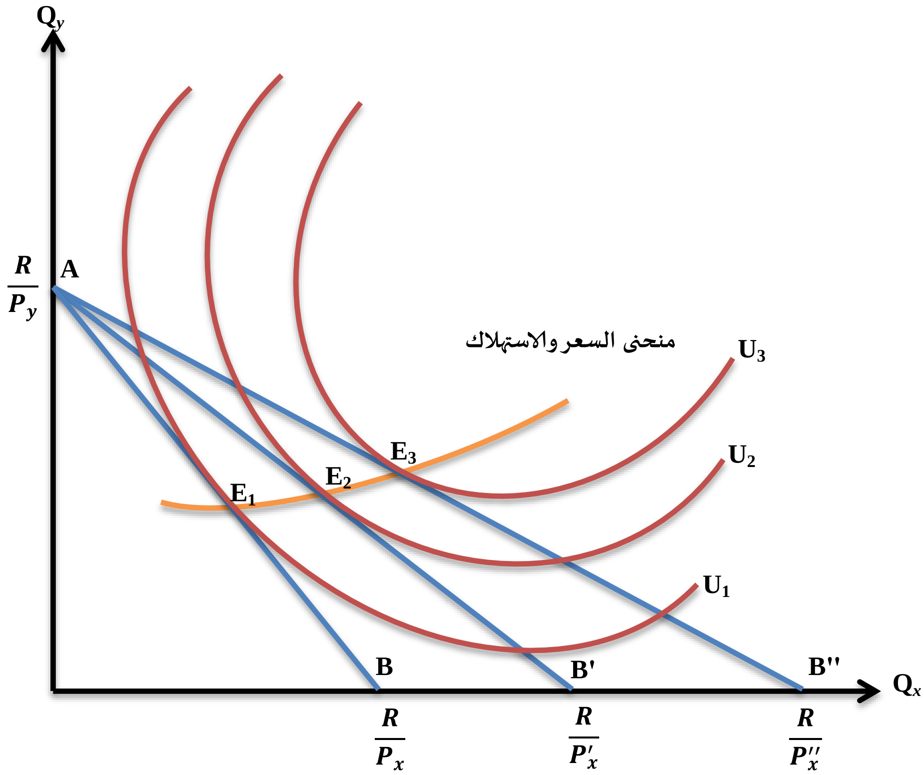
ب- تحديد نوعية السلعة:

يكون ميل المماس لمنحنى أنجل عند النقطتين A و B موجبا كما يقطع المماس محور الداخل وبالتالي يكون مرونة الطلب الدخلية اكبر من الواحد الصحيح وغالبا ما تكون السلعة عند هاتين النقطتين كمالية. وعند النقطتين F و D يكون ميل المماس لمنحنى انجل موجبا ولكنه يقطع محور الكميات وبالتالي يكون مرونة الطلب الدخلية أكبر من الصفر وأقل من الواحد الصحيح فتكون السلعة ضرورية عند هاتين نقطتين، أما عند النقطتين L و H يكون منحنى انجل سالب الميل فتكون السلعة X سلعه دنيا.

5- اثر تغير السعر:

5-1-منحنى السعر والاستهلاك:

اعتبر ان سعر السلعة Y ودخل المستهلك يبقيان ثابتان، بينما سعر السلعة X ينخفض من P_x الى P'_x ثم P''_x تظهر هذه الحالة في البيان التالي:

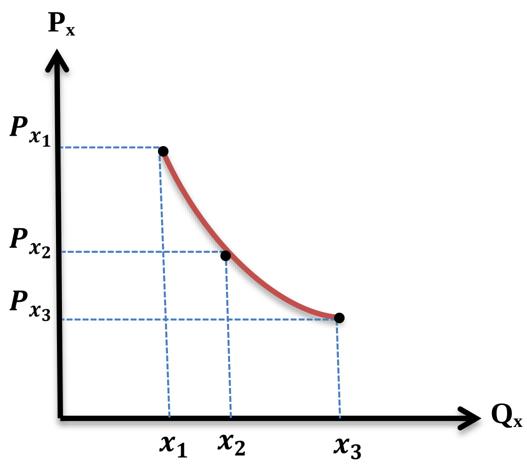


يكون المستهلك في التوازن عند النقطة E_1 بعد انخفاض سعر السلعة X من P_x الى P'_x يدور خط الميزانية حول النقطة A وتتحول نقطة التوازن من E_1 الى E_2، وعند انخفاض السعر مرة أخرى من P'_x الى P''_x يدور خط الميزانية مرة أخرى حول النقطة A أكثر الى اليمين وتتحول نقطة التوازن من E_2 الى E_3 . عند الربط بين النقاط E_1 و E_2 وE_3 نحصل على ما يسمى بمنحنى السعر والاستهلاك.

تعريف: يمثل منحنى السعر والاستهلاك مجموعة نقاط توازن المستهلك عندما يتغير سعر السلعة بينما يبقى الدخل النقدي وسعر السلعة الاخرى ثوابت.

5-2- منحنى الطلب الفردي:

يشتق منحنى طلب سلعة معينة من قبل مستهلك ما من منحنى السعر والاستهلاك. انطلاقا من منحنى السعر والاستهلاك يمكن ايجاد الازواج (x_i,P_i) التي تشير الى الكميه x_i المرتبطة بالسعر P_i وهذا يؤدي الى رسم البيان التالي:



3-5- دالة الطلب الفردية:

تشير دالة الطلب الفردي الى العلاقة العكسية التي توجد بين سعر سلعة معينة والكميات المطلوبة من هذه السلعة، في العموم تشتق دالة الطلب الفردي من تحليل تعظيم داله المنفعة.

مثال: نفترض دالة المنفعة لمستهلك ما تأخذ الشكل التالي: $U = xy$ وباعتبار قيد الميزانية $R = xP_x + yP_y$

المطلوب: حدد دوال الطلب الفردي.

الحل:

تكتب داله لاڤرونج على الشكل:

$$L = F(x, y) + \lambda(R - xP_x - yP_y)$$
$$L = xy + \lambda(R - xP_x - yP_y)$$

تكتب الشروط الاولى لتعظيم المنفعة على الشكل:

$$\begin{cases} L'_x = y - \lambda P_x = 0 \quad \rightarrow \quad (1) \\ L'_y = 5x - \lambda P_y = 0 \quad \rightarrow \quad (2) \\ L'_\lambda = R - xP_x - yP_y = 0 \quad \rightarrow \quad (3) \end{cases}$$

عند معالجة المعدلات (1)، (2) و(3) نجد دوال الطلب:

$$x = \frac{R}{2P_x} \quad \text{و} \quad y = \frac{R}{2P_y}$$

تظهر دوال الطلب على السلعتين X وY وجود علاقه عكسية بين الكميات x وy والاسعار P_x وP_y على التوالي.

ملاحظة: تتميز دوال الطلب الفردية بأنها متجانسة من الدرجة صفر بالنسبة للأسعار والدخل أو بعبارة أخرى يكون المستهلك غير خاضع للوهم النقدي (اذا تغيرت الاسعار والدخل بنفس النسبة يبقى مستوى الطلب بدون تغيير).

6- معادلة سلوتسكي:

يؤدي تغير سعر سلعة ما الى تأثير مزدوج أي أثر إحلال وأثر دخل، في هذا الاطار تشير معادلة سلوتسكي الى الأثر الكلي وتوضح قيمة كل أثر على توازن المستهلك.

سنوضح أولا قبل التطرق الى معادلة سلوتسكي تعريف كل من الأثر الكلي، أثر الدخل وأثر الإحلال:

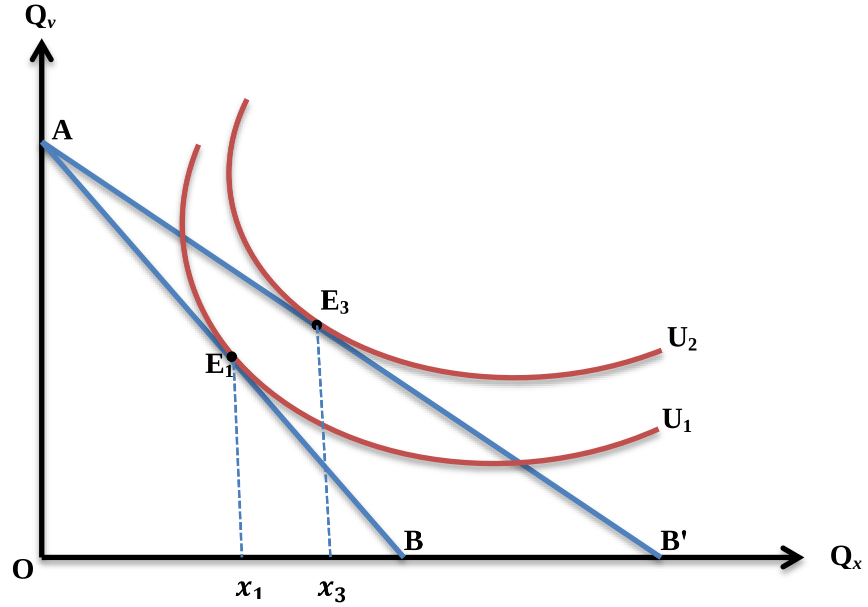
1-6- أثر الإحلال وأثر الدخل:

يؤدي تغير في سعر السلعة X مثلا الى تأثير مزدوج أثر إحلال وأثر الدخل ومجموع الأثرين يسمى الأثر الكلي.

6-1-1- الاثر الكلي:

يساوي الأثر الكلي لتغير سعر سلعة ما التغير الكلي للكميات المطلوبة أو المستهلكة عندما يتحول المستهلك من نقطة توازن أصلية الى نقطة توازن جديدة بعد تغير في سعر السلعة المدروسة.

تظهر هذه الحالة في الشكل البياني التالي:

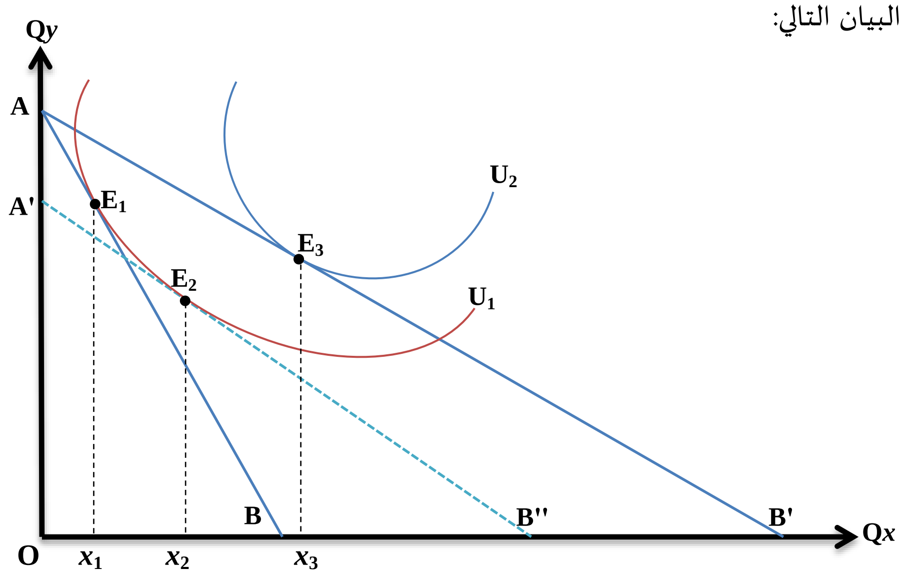


يكون المستهلك في التوازن عند النقطة E_1 بعد انخفاض سعر السلعة X ينتقل المستهلك الى نقطة توازن جديدة هي E_3 حيث يتحصل على منفعة أكبر، تزداد الكمية x بمقدار Δx وهو مستوى الاثر الكلي والذي يساوي $(ox_3 - ox_1)$

6-1-2-- أثر الإحلال (حالة سلعة عادية) :

ينقسم الأثر الكلي من الناحية النظرية الى قسمين: أثر إحلال وأثر الدخل.

نفترض البيان التالي:



بعد انخفاض السعر P_x ينتقل المستهلك من نقطة التوازن E_1 الى نقطة التوازن E_3، لكن أذا افترضنا أن انخفاض في السعر يليه انخفاض في الدخل الذي يؤدي بالمستهلك الى البقاء على نفس منحنى السواء، فيصل المستهلك الى التوازن في النقطة E_2 (انخفاض الدخل يمثل بانتقال خط الميزانية AB' الى اليسار أي إلى $A'B''$).إذا أثر الاحلال هو $(ox_2 - ox_1)$.

تعريف اثر الاحلال: يساوي اثر الاحلال التغيير في الكمية المطلوبة الناتج عن تغير السعر عندما ينتقل المستهلك على نفس منحنى السواء.

6-1-3- اثر الدخل:

يمثل الانتقال من نقطة التوازن E_1 الى نقطة التوازن E_3 في البيان السابق الأثر الكلي، ويمثل كذلك الانتقال من نقطة التوازن E_1 الى نقطة التوازن E_2 ما يسمى بأثر الاحلال. اذا كان المستهلك على النقطة نقطة التوازن E_2 واسترجع

دخله الاصلي فينتقل مباشرة الى نقطة التوازن E_3 في هذا الاطار يمثل الانتقال من نقطة التوازن E_2 الى نقطة التوازن E_3 اثر الدخل الناتج عن تغير السعر اذا اثر الدخل هو$(ox_3 - ox_2)$.

تعريف اثر الدخل: يساوي اثر الدخل الناتج عن تغير في السعر تغير الكمية المطلوبة الناتج عن تغير الدخل الحقيقي فقط.

2-6- اشتقاق معادله سلوتسكي:

تشير معادله سلوتسكي الى الأثر الكلي وتوضح قيمه كل أثر على توازن المستهلك.

اذا كان مستهلك ما يعظم منفعته $U = F(X,Y)$ تحت الشرط $R = xP_x + yP_y$، تكتب معادله لاقرونج بالشكل التالي:

$$L = U + \lambda(R - xP_x - yP_y)$$
$$L = F(x,y) + \lambda(R - xP_x - yP_y)$$

تكتب الشروط الاولى لتعظيم المنفعة على الشكل:

$$\left\{\begin{aligned} L'_x &= f'_x - \lambda P_x = 0 \quad \to \quad (1) \\ L'_y &= f'_y - \lambda P_y = 0 \quad \to \quad (2) \\ L'_\lambda &= R - xP_x - yP_y = 0 \quad \to \quad (3) \end{aligned}\right. \Big\{ (A) \text{ جملة المعدلات}$$

يتغير توازن المستهلك إذا حدثت تغيرات في الأسعار أو الدخل، لكن الكميات الجديدة تحقق دائما جملة المعادلات السابقة (A).

لإيجاد قوه أثر تغير الأسعار والدخل على نفقات المستهلك، نفترض أن كل المتغيرات تتغير في نفس الوقت وبذلك نأخذ التفاضل الكلي للمعادلات السابقة (A) أي:

$$\left\{\begin{aligned} f_{xx}dx + f_{xy}dy - P_x d\lambda - \lambda dP_x &= 0 \\ f_{yx}dx + f_{yy}dy - P_y d\lambda - \lambda dP_y &= 0 \\ -P_x dx - P_y dy - xdP_x - ydP_y + dR &= 0 \end{aligned}\right. \Big\{ (B) \text{ جملة المعدلات}$$

اذا استعملت المصفوفات وأخذ بعين الاعتبار dP_x و dP_y و dR كمتغيرات خارجية و dx و dy و $d\lambda$ كمتغيرات داخلية سوف تكتب جمله المعادلات السابقة على الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & -P_x \\ f_{yx} & f_{yy} & -P_y \\ -P_x & -P_y & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda dP_x \\ \lambda dP_y \\ xdP_x + ydP_y - dR \end{bmatrix}$$

يؤدي استعمال طريقة كرامر لحل النظام السابق كما يلي:

$$dx = \frac{\lambda D_{11}dP_x + \lambda D_{21}dP_y + D_{31}(-dR + xdP_x + ydP_y)}{|D|} \;\ldots\ldots(1)$$

$$dy = \frac{\lambda D_{12}dP_x + \lambda D_{22}dP_y + D_{33}(-dR + xdP_x + ydP_y)}{|D|} \;\ldots\ldots(2)$$

حيث تمثل $|D|$ محدد المصفوفة D و D_{ij} المرافق الجبري للعنصر ij في المصفوفة الاصلية D.

- بفرض أن P_y و R ثوابت: يعني ذلك أن $(dP_y = dR = 0)$ يؤدي قسمة طرفي المعادلة (1) على dP_x وتعويض الرمز d بالرمز ∂ للإشارة الى الاشتقاق الجزئي الى كتابة:

$$\frac{\partial x}{\partial P_x} = \frac{\lambda D_{11}}{|D|} + \frac{xD_{31}}{|D|} \;\ldots\ldots(3)$$

- بفرض أن P_x و R ثوابت: يعني ذلك أن $(dP_x = dR = 0)$ يؤدي قسمة طرفي المعادلة (1) على dP_y وتعويض الرمز d بالرمز ∂ للإشارة الى الاشتقاق الجزئي الى كتابة:

$$\frac{\partial x}{\partial P_y} = \frac{\lambda D_{21}}{|D|} + \frac{y D_{31}}{|D|} \dots\dots.(4)$$

- بفرض أن P_x وP_y ثوابت: يعني ذلك أن $(dP_y = dP_x = 0)$ يؤدي قسمة طرفي المعادلة (1) على dR وتعويض الرمز d بالرمز ∂ للإشارة الى الاشتقاق الجزئي الى كتابة:

$$\frac{\partial x}{\partial R} = -\frac{D_{31}}{|D|} \dots\dots.(5)$$

بإستعمال المعادلة (5) تكتب المعادلات (3) و(4) بالشكل:

$$\frac{\partial x}{\partial P_x} = \frac{\lambda D_{11}}{|D|} - x\frac{\partial x}{\partial R} \dots\dots.(6)$$
$$\frac{\partial x}{\partial P_y} = \frac{\lambda D_{21}}{|D|} - y\frac{\partial x}{\partial R} \dots\dots.(7)$$

اذا تغير السعر P_x الذي يليه تغير في الدخل حتى يبقى المستهلك على نفس منحنى السواء.

رياضيا:

$$f'_x dx + f'_y dy = 0$$
$$f'_x dx = -f'_y dy$$

لدينا في التوازن

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{f'_x}{f'_y} = \frac{P_x}{P_y}$$

أي يمكن أن نكتب:

$$P_x dx + P_y dy = 0$$

بسبب هذه المعادلة يمكن كتابة المعادلة الثالثة من جملة المعدلات (B) بالشكل: $xdP_x + ydP_y - dR = 0$ لذلك:

$$\frac{\partial x}{\partial P_x} = \frac{\lambda D_{11}}{|D|}$$

بالإعتماد على المعلومات السابقة يمكن كتابة المعادلة (6) بالشكل:

$$\frac{\partial x}{\partial P_x} = \underbrace{\frac{\partial x}{\partial P_x}}_{\text{أثر الاحلال}} - \underbrace{x\frac{\partial x}{\partial R}}_{\text{أثر الدخل}} \dots\dots.(8)$$

تدعى المعادلة (8) بمعادلة سلوتسكي.

مثال: اذا كان مستهلك ما دالة منفعة من الشكل: $U = F(X,Y) = xy$ وقيد الميزانية $R = xP_x + yP_y$، اذا كانت: $P_y = 5$ و $P_x = 2$ و $R = 100$

المطلوب:

أ. أوجد دوال الطلب على السلعتين X و Y

ب. أوجد نقطة التوازن

ج. اذا افترض أن P_x و P_y ثوابت، أوجد أثر تغير السعر P_x على استهلاك السلعة X.

الحل:

أ- إيجاد دوال الطلب على السلعتين X و Y:

تكتب معادله لاقرونج بالشكل التالي:

$$L = U + \lambda(R - xP_x - yP_y)$$
$$L = F(x, y) + \lambda(R - xP_x - yP_y)$$
$$L = xy + \lambda(R - xP_x - yP_y)$$

تكتب الشروط الاولى لتعظيم المنفعة على الشكل:

$$\left\{\begin{array}{c} L'_x = y - \lambda P_x = 0 \quad \rightarrow \quad (1) \\ L'_y = x - \lambda P_y = 0 \quad \rightarrow \quad (2) \\ L'_\lambda = R - xP_x - yP_y = 0 \quad \rightarrow \quad (3) \end{array}\right. \quad \text{جملة المعدلات } (A)$$

بقسمة المعادلة (1) و (2) نجد:

$$\frac{y}{x} = \frac{\lambda P_x}{\lambda P_y}$$
$$xP_x = yP_y \rightarrow (4)$$

بتعويض المعادلة (4) في المعادلة (3) نجد دالة الطلب على السلعة X:

$$R - xP_x - xP_x = 0$$
$$R = 2xP_x$$
$$\bar{x} = \frac{R}{2P_x}$$

بتعويض $\bar{x}$ بقيمتها في المعادلة (4) نجد دالة الطلب على السلعة Y:

$$yP_y = (\frac{R}{2P_x})P_x$$
$$\bar{y} = \frac{R}{2P_y}$$

ب- إيجاد نقطة التوازن:

بتعويض قيم P_x و P_y و R في دوال الطلب على السلعتين X و Y نجد قيم التوازن $\bar{x}$ و $\bar{y}$:

$$\bar{x} = \frac{R}{2P_x} = \frac{100}{2 \times 2} = 25$$
$$\bar{y} = \frac{R}{2P_y} = \frac{100}{2 \times 5} = 10$$

بتعويض قيمة $\bar{y}$ في المعادلة (1) أو قيمة $\bar{x}$ في المعادلة (2) نجد قيمة $\bar{\lambda}$: وهي $\bar{\lambda} = 5$

ج-إيجاد أثر تغير السعر P_x على استهلاك السلعة X. في ظل أن P_x و P_y ثوابت:

نأخذ التفاضل الكلي للمعادلات السابقة (A) أي:

جملة المعادلات (B)

$$\begin{cases} 0dx + 1dy - P_x d\lambda - \lambda dP_x = 0 \\ 1dx + 0dy - P_y d\lambda - \lambda dP_y = 0 \\ -P_x dx - P_y dy - x dP_x - y dP_y + dR = 0 \end{cases}$$

بإستعمال المصفوفات وأخذ بعين الاعتبار dP_x و dP_y و dR كمتغيرات خارجية و dx و dy و $d\lambda$ كمتغيرات داخلية سوف تكتب جمله المعادلات (B) على الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -P_x \\ 1 & 0 & -P_y \\ -P_x & -P_y & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda dP_x \\ \lambda dP_y \\ x dP_x + y dP_y - dR \end{bmatrix}$$

بفرض تغير P_x: يعني ذلك أن $(dP_y = dR = 0)$ أي يمكن كتابة المعادلة التالية:

$$\frac{\partial x}{\partial P_x} = \frac{\lambda D_{11}}{|D|} + \frac{x D_{31}}{|D|}$$

حساب المحدد $|D|$ والمصفوفات D_{31} و D_{11}

$$D = \left| \begin{matrix} 0 & 1 & -P_x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -P_y & 1 & 0 \\ -P_x & -P_y & 0 & -P_x & -P_y \end{matrix} \right|$$

$$D = \left[(0 \times 0 \times 0)) + \left(1 \times (-P_y) \times (-P_x)\right) + \left((-P_x) \times 1 \times (-P_y)\right)\right] \\ - \left[(1 \times 1 \times 0) + \left(0 \times (-P_y) \times (-P_y)\right) + ((-P_x) \times 0 \times (-P_x))\right]$$

$$D = \left(0 + (P_x P_y) + (P_x P_y)\right) - (0 + 0 + 0)$$

$$D = 2P_x P_y = 20$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -P_y \\ -P_y & 0 \end{bmatrix} = (0 \times 0) - \left((-P_y)(-P_y)\right) = -P_y^2 = 25$$

$$D_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_x & -P_y \end{bmatrix} = \left(1 \times (-P_y)\right) - \left(0 \times (-P_x)\right) = -P_y = -5$$

$$\frac{\partial x}{\partial P_x} = \frac{\lambda D_{11}}{|D|} + \frac{x D_{31}}{|D|}$$

بتعويض قيم D_{11} و D_{31} و $|D|$ في معادلة سلوتسكي نجد:

$$\frac{\partial x}{\partial P_x} = \frac{\lambda(-P_y^2)}{2P_x P_y} + x\frac{(-P_y)}{2P_x P_y}$$

بالتعويض عن قيم x و λ و P_x و P_y في المعادلة الاخيرة نجد:

$$\frac{\partial x}{\partial P_x} = \frac{(-5) \times 25}{20} + \frac{25 \times (-5)}{20}$$

$$\frac{\partial x}{\partial P_x} = \underbrace{-\,6.25}_{\text{أثر الاحلال}} \underbrace{-\,6.25}_{\text{أثر الدخل}} = \underbrace{-12.5}_{\text{الاثر الكلي}}$$

التفسير الاقتصادي: انطلاقا من نقطة التوازن، يؤدي تغير P_x بوحدة نقدية الى تغير نفقات المستهلك بالكمية 12.5 وحدة فيما يخص X واثر الاحلال هو 6.25 وحدة وأثر الدخل هو 6.25 وحدة.

3-6- نوعية السلعة من خلال معادلة سلوتسكي:

تكتب معادله سلوتسكي بالشكل: $\frac{\partial x}{\partial P_x} = \frac{\partial x}{\partial P_x} - x\frac{\partial x}{\partial R}$ ، وتستعمل لتحديد نوعيه السلع المستهلكة كما يلي:

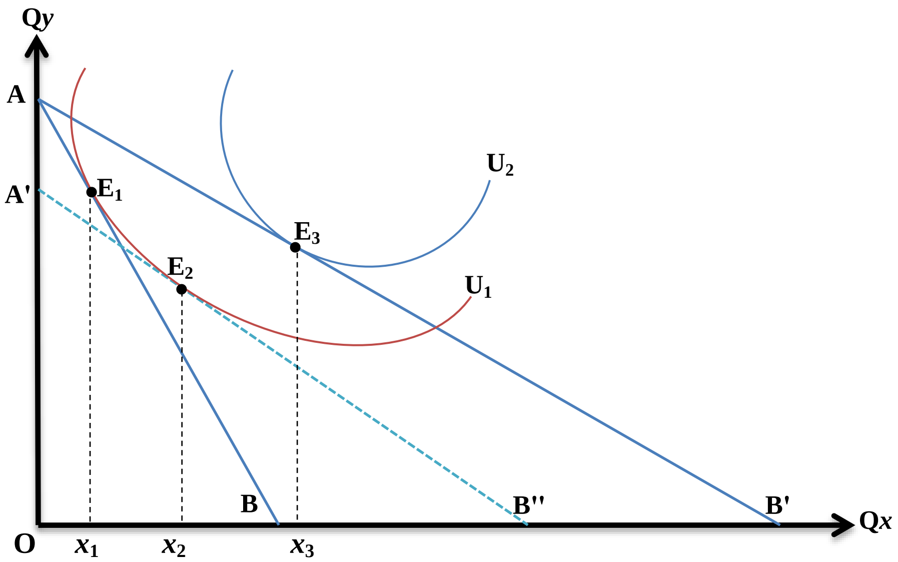
6-3-1- سلعه عادية:

تدعى سلعة X بسلعة عادية اذا كان انخفاض في السعر P_x يؤدي الى:

- ارتفاع في الكمية المستهلكة $0 > \frac{\partial x}{\partial P_x}$ اثر الاحلال السالب.
- يؤدي الارتفاع في الدخل الحقيقي الى ازدياد في الكمية المستهلكة $0 < \frac{\partial x}{\partial R}$ (أثر الدخل الذي يكتب على شكل $(-x\frac{\partial x}{\partial R})$ سالب).

ملاحظة: في حالة سلعة عادية يكون أثر الاحلال مدعم من طرف أثر الدخل أي لهما نفس الاتجاه.

يمكن توضيح هذه الحالة في الشكل التالي:



اثر الاحلال: $\Delta x_1 = (x_2 - x_1) > 0$

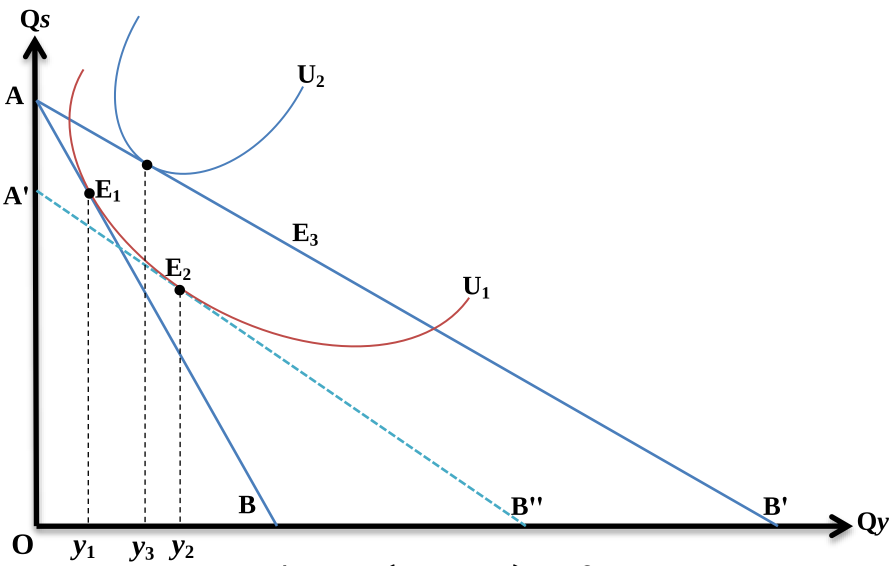
اثر الدخل: $\Delta x_2 = (x_3 - x_2) < 0$

6-3 -2- سلعه دنيا:

تدعى السلعة Y بسلعة دنيا اذا كان ازدياد في الدخل الحقيقي يؤدي الى انخفاض في الكمية المستهلكة أي: يؤدي الارتفاع في الدخل الحقيقي الى ازدياد في الكمية المستهلكة $0 > \frac{\partial y}{\partial R}$ (أثر الدخل الذي يكتب على شكل $(-y\frac{\partial y}{\partial R})$ موجب).

ملاحظة: في حالة سلعة دنيا يكون أثر الاحلال وأثر الدخل لهما إتجاهان متعاكسان وأثر الاحلال أقوى من أثر الدخل.

يمكن توضيح هذه الحالة في الشكل التالي:



$$\Delta y_1 = (y_2 - y_1) > 0$$ اثر الاحلال:

$$\Delta y_2 = (y_3 - y_2) > 0$$ اثر الدخل:

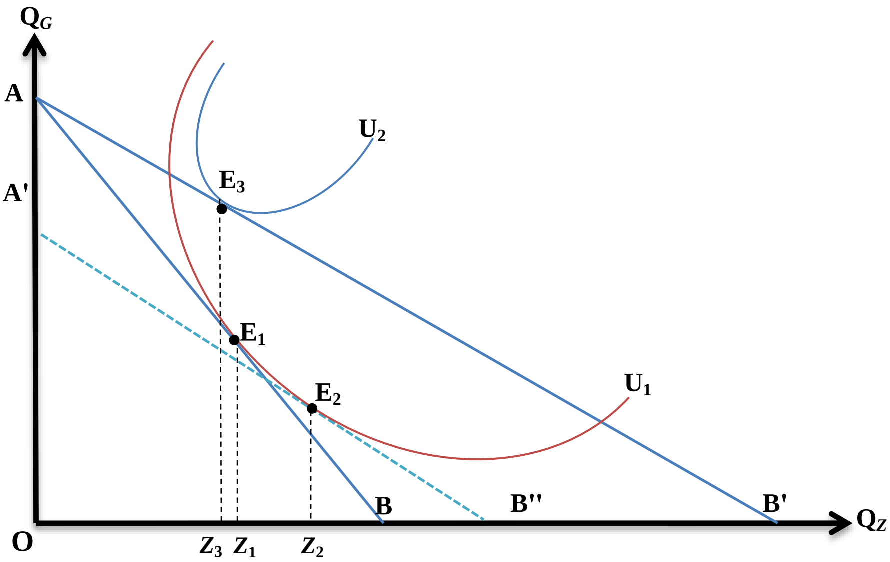
$$\Delta y_1 > \Delta y_2$$

3-6 -3- سلعة جيفن:

تدعى السلعة Z بسلعه جيفن اذا كانت السلعة Z سلعة دنيا ويكون أثر الدخل أقوى من أثر الإحلال:

$$\frac{\partial Z}{\partial P_z} = \frac{\partial z}{\partial P_z} - z\frac{\partial z}{\partial R} > 0$$

يمكن توضيح هذه الحالة في الشكل التالي:



$$\Delta z_1 = (z_2 - z_1) > 0$$ اثر الاحلال:

$$\Delta z_2 = (z_3 - z_2) > 0$$ اثر الدخل:

$$\Delta z_1 < \Delta z_2$$

3-6 -4- العلاقة بين السلع:

انطلاقا من تحليل معادلة سلوتسكي: $\frac{\partial x}{\partial P_y} = \frac{\lambda D_{21}}{|D|} - y\frac{\partial x}{\partial R}$

- تكون السلعتين سلع تبادلية:

$$\frac{\lambda D_{21}}{|D|} > 0$$

- تكون سلعتين سلع متكاملة:

$$\frac{\lambda D_{21}}{|D|} < 0$$

مثال: يتوفر مستهلك ما على دالة منفعة من الشكل: $U = F(X,Y) = 100xy$، حيث: $P_y = 5$ و $P_x = 2$ و $R = 100$

المطلوب:

أ. حدد دوال الطلب على السلعتين X وY.

ب. حدد نقطة توازن المستهلك.

ج. انطلاقا من فرضية تغير السعر P_x، حدد نوعية السلعة X.

د. انطلاقا من فرضية تغير السعر P_y، حدد العلاقة بين السلعتين X وY.

الحل:

أ- تحديد دوال الطلب على السلعتين X وY:

تكتب معادله لاڤرونج بالشكل التالي:

$$L = U + \lambda(R - xP_x - yP_y)$$
$$L = F(x,y) + \lambda(R - xP_x - yP_y)$$
$$L = 100xy + \lambda(R - xP_x - yP_y)$$

تكتب الشروط الاولى لتعظيم المنفعة على الشكل:

$$\begin{cases} L'_x = 100y - \lambda P_x = 0 \quad \rightarrow \quad (1) \\ L'_y = 100x - \lambda P_y = 0 \quad \rightarrow \quad (2) \\ L'_\lambda = R - xP_x - yP_y = 0 \quad \rightarrow \quad (3) \end{cases} \Big\{ (A) \text{ جملة المعدلات}$$

بقسمة المعادلة (1) و (2) نجد:

$$\frac{100y}{100x} = \frac{\lambda P_x}{\lambda P_y}$$
$$xP_x = yP_y \ \rightarrow (4)$$

بتعويض المعادلة (4) في المعادلة (3) نجد دالة الطلب على السلعة X:

$$R - xP_x - xP_x = 0$$
$$R = 2xP_x$$
$$\bar{x} = \frac{R}{2P_x}$$

بتعويض $\bar{x}$ بقيمتها في المعادلة (4) نجد دالة الطلب على السلعة Y:

$$yP_y = (\frac{R}{2P_x})P_x$$
$$\bar{y} = \frac{R}{2P_y}$$

ب- إيجاد نقطة التوازن:

بتعويض قيم P_x و P_y و R في دوال الطلب على السلعتين X و Y نجد قيم التوازن $\bar{x}$ و $\bar{y}$:

$$\bar{x} = \frac{R}{2P_x} = \frac{250}{2 \times 2} = 62.5$$

$$\bar{y} = \frac{R}{2P_y} = \frac{100}{2 \times 5} = 62.5$$

بتعويض قيمة $\bar{y}$ في المعادلة (1) أو قيمة $\bar{x}$ في المعادلة (2) نجد قيمة $\bar{\lambda}$: وهي $\bar{\lambda} = 3125$

ج- حدد نوعية السلعة X انطلاقا من فرضية تغير السعر P_x:

نأخذ التفاضل الكلي للمعادلات السابقة (A) أي:

$$\begin{cases} 0dx + 100dy - P_x d\lambda - \lambda dP_x = 0 \\ 100dx + 0dy - P_y d\lambda - \lambda dP_y = 0 \\ -P_x dx - P_y dy - x dP_x - y dP_y + dR = 0 \end{cases} \quad \{(B)\ \text{جملة المعدلات}$$

بإستعمال المصفوفات وأخذ بعين الاعتبار dP_x و dP_y و dR كمتغيرات خارجية و dx و dy و $d\lambda$ كمتغيرات داخلية سوف تكتب جمله المعادلات (B) على الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 100 & -P_x \\ 100 & 0 & -P_y \\ -P_x & -P_y & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda dP_x \\ \lambda dP_y \\ x dP_x + y dP_y - dR \end{bmatrix}$$

بفرض تغير P_x: يعني ذلك أن $(dP_y = dR = 0)$ أي يمكن كتابة المعادلة التالية:

$$\frac{\partial x}{\partial P_x} = \frac{\lambda D_{11}}{|D|} + \frac{x D_{31}}{|D|}$$

حساب المحدد $|D|$ والمصفوفات D_{31} و D_{11}

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 100 & -P_x & 0 & 100 \\ 100 & 0 & -P_y & 100 & 0 \\ -P_x & -P_y & 0 & -P_x & -P_y \end{vmatrix}$$

$$D = [(0 \times 0 \times 0)) + (100 \times (-P_y) \times (-P_x)) + ((-P_x) \times 100 \times (-P_y))] \\ - [(100 \times 100 \times 0) + (0 \times (-P_y) \times (-P_y)) + ((-P_x) \times 0 \times (-P_x))]$$

$$D = (0 + (100P_xP_y) + (100P_xP_y)) - (0 + 0 + 0)$$

$$D = 200P_xP_y = 800$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -P_y \\ -P_y & 0 \end{bmatrix} = (0 \times 0) - ((-P_y)(-P_y)) = -P_y^2 = -4$$

$$D_{31} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ -P_x & -P_y \end{bmatrix} = (100 \times (-P_y)) - (0 \times (-P_x)) = -100P_y = -200$$

$$\frac{\partial x}{\partial P_x} = \frac{\lambda D_{11}}{|D|} + \frac{x D_{31}}{|D|}$$

بتعويض قيم D_{11} و D_{31} و $|D|$ في معادلة سلوتسكي نجد:

$$\frac{\partial x}{\partial P_x}=\frac{\lambda(-P_y^2)}{200P_xP_y}+x\frac{(-100P_y)}{200P_xP_y}$$

بالتعويض عن قيم x وλ وP_x وP_y في المعادلة الاخيرة نجد:

$$\frac{\partial x}{\partial P_x}=\frac{3125\times(-4)}{800}+\frac{62.5\times(-200)}{800}$$

$$\frac{\partial x}{\partial P_x}=\underbrace{-\,15.625}_{\text{أثر الاحلال}}\underbrace{-\,15.625}_{\text{أثر الدخل}}=\underbrace{-31.25}_{\text{الاثر الكلي}}$$

التفسير الاقتصادي: انطلاقا من نقطة التوازن، يؤدي تغير P_x بوحدة نقدية الى تغير نفقات المستهلك بالكمية 31.25 وحدة فيما يخص X وأثر الاحلال هو 15.625وحدة وأثر الدخل هو 15.625 وحدة. اذا، تصنف السلعة X كسلعة عادية لأن أثر الدخل يدعم أثر الاحلال.

د- تحديد نوعية العلاقة بين السلعتين X وY انطلاقا من فرضية تغير السعر P_y:

بفرضية تغير السعر P_y مع ثبات P_x وR يؤدي ذلك الى الاعتماد على المعادلة التالية:

$$\frac{\partial x}{\partial P_y}=\frac{\lambda D_{21}}{|D|}+\frac{yD_{31}}{|D|}$$

$$D_{21}==\begin{bmatrix}100 & -P_y\\ -P_x & 0\end{bmatrix}=(100\times 0)-\Big((-P_x)(-P_y)\Big)=-P_yP_x=-4$$

$$\frac{\lambda D_{21}}{|D|}=\frac{\lambda(-P_yP_x)}{200P_xP_y}=\frac{3125(-(2\times 2)}{200\times 2\times 2}$$

$$\frac{\lambda D_{21}}{|D|}=\frac{-3125}{200}<0$$

بما أن $\frac{\lambda D_{21}}{|D|}<0$ فتصنف العلاقة بين السلعتين X وY كسلع متكاملة.