الفصل الثاني: نظرية الانتاج

المحور الثاني- الاطار النظري والتطبيقي لدوال الانتاج:

قدمت النظرية النيوكلاسيكية عدة انواع من دوال الانتاج التي تتميز كل واحدة منها بخصائص معينة. بفرضية الاحلال بين عناصر الانتاج يكون هدف المقاول عبارة عن اختيار مجموعة معينة من هذه العناصر لإنتاج مستوى معين من المنتوج ويتم ذلك عبر دراسة دوال الانتاج باستعمال مجموعة من الاستراتيجيات المتمثلة اما في تقليل تكلفة إنتاج مستوى منتوج ما أو تعظيم الانتاج بمستوى تكلفة معينة أو تعظيم الربح.

اولا- أشهر أنواع دوال الإنتاج

يمكن تناول أشهر أنواع دوال الإنتاج حسب تطورها التاريخي كما يلي:

1- دالة إنتاج (مدخلات – مخرجات) لليونتيف(IO)

سميت هذه الدالة بدالة ليونتيف نسبة للاقتصادي واسلي ليونتيف (Wassily Leontif) صاحب ابتكار جدول المدخلات والمخرجات (TES) الذي تنبثق عنه دالة الإنتاج ذات المعاملات الثابتة.

تعتبر دالة إنتاج ليونتيف أبسط علاقة لدالة الإنتاج فهي تعبر على أن المدخلات تحمل جزءا أو نسبة محدودة من الإنتاج وصيغتها كما يلي:

$$\begin{cases} \dfrac{K}{X} = a \\ \dfrac{L}{X} = b \end{cases}$$

حيث:

X: الكمية المنتجة؛

K و L: عنصري رأس المال والعمل على التوالي؛

a: معامل رأس المال الأمثل؛

b: معامل العمل الأمثل.

ومنه لكي ننتج وحدة واحدة من (X)، يستلزم أن تحدد كمية من (a) للعامل K، و كمية من (b) للعامل L بحيث أن:

$$a > 0\,; b > 0$$

ويترتب على ذلك ثبات كمية رأس المال والعمل الضروريتين للحصول على الكمية من الإنتاج(X)، بمعنى أي كمية إضافية من رأس المال والعمل تبقى غير مجدية، إذن مستوى الناتج يتحدد بكمية عامل الناتج الأكثر ندرة، وبناءا على هذه الفرضية يمكن صياغة دالة الإنتاج على الشكل التالي:

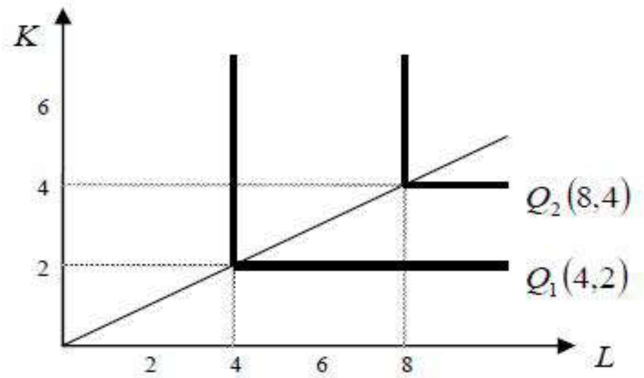
$$X = Min\left\{\frac{K}{a},\frac{L}{b}\right\}$$

1-1- منحنيات الناتج المتساوي:

من المعلوم أن فرضية منحنى الناتج المتساوي هي تثبيت الناتج، وترك عناصر الناتج تتغير، ومن هذا المنطلق سنفرض أنه للحصول على وحدة واحدة من الإنتاج (X=1) فإنه يستلزم استخدام وحدتين من رأس المال (a=2) وأربع وحدات من العمل(b=4) ومنه تكون التوليفة بين عاملي الإنتاج في هذه الحالة كما يلي:

$$\begin{cases} K = aX = 2 \times 1 = 2 \\ L = bX = 4 \times 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{a}{b} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ومن أجل الحصول على وحدتين من الناتج (X=2)يجب مضاعفة كمية كلا العاملين بحيث تبقى نسبة المزج بينهما ثابتة.



وتكون منحنيات الناتج المتساوي بالنسبة لهذه الدالة كمستقيمات ذات الزاوية القائمة، ومسار التوسع الأمثل للمؤسسة يكون ممثل بمستقيم للمعادلة $K = a/b$ ولهذا يكون خط التساوي الميلي محدد بالعلاقة الفنية وهي مستقلة عن أسعار المدخلات.

2- دالة إنتاج كوب – دوغلاس $COBB - DOUGLAS\ (CD)$:

نشرت ورقة بحثية بعنوان : نظرية الإنتاج، تصف دالة الإنتاج كوب – دوغلاس في مجلة الاقتصاد الأمريكي الدورية العدد 18 سنة 1928 ، وهي محاولة تجريبية لتقدير إنتاجية رأس المال مقارنة بإنتاجية العمل داخل الولايات المتحدة الأمريكية . منذ نشر هذا المقال سنة 1928، أصبحت دالة الإنتاج كوب – دوغلاس أكثر تداول واستخدام من غيرها من دوال الإنتاج الأخرى نظرا لبساطتها وسهولة تقديرها، حيث تعد دالة كوب -دوغلاس من أكثر دوال الإنتاج استخداما في التطبيق وترجع تسميتها إلى الاقتصادي الأمريكي Paul.H.Douglas والرياضي الأمريكي Cobb.Charles.W حيث قاما في عام 1928 بتحليل دالة الإنتاج، وساهما في وضع الأسس النظرية لهذه الدالة.

يكتب الشكل العام لهذه الدالة على النحو التالي:

$$X = f(K, L) = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

حيث أن: $1 > \beta > 0 \ , \ 1 > \alpha > 0 \ , \ K > 0 \ , \ L > 0 \ , \ A > 0$

وتمثل:

X: الناتج أو الكمية المنتجة

A: معامل الفعالية أو معامل الأثر أو معامل كفاءة الناتج (أثر الناتج)؛

L: العمل (اليد العاملة)؛

K: رأس المال؛

β: مرونة الناتج (الكثافة) بالنسبة إلى رأس المال؛

α: مرونة الناتج (الكثافة) بالنسبة للعمل.

2-1- تجانس **دالة إنتاج كوب – دوغلاس**

تأحذ دالة كوب دوجلاس الصياغة التالية

$$X = f(K, L) = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

$$X^{*} = f(tK, tL) = A(Lt)^{\alpha}(Kt)^{\beta} = t^{\alpha+\beta}AL^{\alpha}K^{\beta}$$

هي دالة متجانسة من الدرجة $\alpha + \beta$، وعليه تكون مردودية السلم متزايدة إذا كانت $\alpha + \beta > 1$ ومتناقصة أذا كانت $\alpha + \beta < 1$ ، وثابتة إذا كانت $\alpha + \beta = 1$.

2-2- الإنتاجيات الحدية لعوامل الإنتاج:

$$f_L' = Pm_L = \frac{\partial X}{\partial L} = \alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta} = \alpha \frac{X}{L} = \alpha PM_L$$

$$f_K' = Pm_K = \frac{\partial X}{\partial K} = \beta AL^{\alpha}K^{\beta-1} = \beta \frac{X}{L} = \beta PM_K$$

وتمثل β و α نسب الإنتاجيات الحدية للإنتاجيات المتوسطة لكل مدخل.

2-3- المعدل الحدي للإحلال التقنيTMST

$$\text{TMST} = \frac{f_L'}{f_K'} = (\frac{\alpha}{\beta})(\frac{K}{L})$$

2-4- تحدب منحنيات الناتج المتساوي

$$\frac{d(TMST)}{dL} = \left[\frac{TMST}{\partial L}\right] + \left[\frac{TMST}{\partial K}\right]\left[\frac{dK}{dL}\right] = -\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left[\frac{\alpha + \beta}{L^2}\right]K < 0$$

إن TMST متناقص وبالتالي تكون منحنيات الناتج المتساوي محدبة نحو نقطة الأصل وهذا من أجل كل القيم الموجبة لـ α وβ.

5-2- مرونة الإحلال:

$$\sigma = \left[\frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{d(TMST)}\right]\left[\frac{TMST}{\left(\frac{K}{L}\right)}\right] = 1$$

إذن مرونة الإحلال بالنسبة لدالة الإنتاج لكوب دوجلاس تساوي واحد مهما كانت α و β.

3- دالة الإنتاج دالة المرونة الاحلالية الثابتة CES

أشار كل من أرو Arrow، تشنري Chenery ومنهاس Minhas بالإضافة لـ سولو Solw سنة 1961م إلى أن معدل الإحلال الثابت بين موردي العمل ورأس المال والمساوي للواحد في دالة كوب دوجلاس هو أخطر عيوبها وعليه ولتلافي هذا العيب تم ابتكار دالة الانتاج CES التي تفترض ثبات مرونة الإحلال بين الموارد ولكن عدم مساواة تلك المرونة للواحد، هذا وتأخذ هذه المعادلة التي يطلق عليها أحياناً دالة ACMS نسبة إلى الحروف الأولى لمكتشفيها الشكل الرياضي التالي:

$$X = A[\alpha L^{-\rho} + (1-\alpha)K^{\rho}]^{-1/\rho}$$

حيث : $A > 0, \quad \rho \geq 1, \quad 1 > \alpha > 0$

X : الناتج (الكمية المنتجة)؛

A: ثابت الدالة ويطلق عليه معامل الكفاءة

α: معامل التوزيع حيث يوضح مدى مساهمة كل من رأس المال والعمل في الإنتاج وعادة ما تنحصر قيمة هذا المعامل بين الوحدة والصفر؛

ρ: يوضح مرونة الإحلال بين الموارد وعادة ما تكون قيمته أكبر من أو يساوي الواحد؛

L : اليد العاملة؛

K: رأس المال.

1-3- تجانس **دالة الانتاج ذات المرونة الاحلالية الثابتة CES :**

دالة الإنتاج ذات المرونة الاحلالية الثابتة CES هي دالة متجانسة من الدرجة الاولى، وبالتالي تكون مردودية السلم ثابتة.

$$X(tL,tK) = A[\alpha(tL)^{-\rho} + (1-\alpha)(tK)^{\rho}]^{-1/\rho}$$

$$X(tL,tK) = A[\alpha(tL)^{-\rho} + (1-\alpha)(tK)^{\rho}]^{-1/\rho}$$

$$X(tL,tK) = tA[\alpha L^{-\rho} + (1-\alpha)K^{\rho}]^{-1/\rho}$$

$$X(tL,tK) = tX$$

3-2- الإنتاجية الحدية لعناصر الإنتاج:

- يعبر عن الإنتاجية الحدية لعنصر العمل بالمعادلة التالية:

$$Pm_L = A\alpha\left[\alpha + (1-\alpha)(\frac{K}{L})^{\rho}\right]^{\frac{1-\rho}{\rho}}$$

- يعبر عن الإنتاجية الحدية لعنصر راس المال بالمعادلة التالية:

$$Pm_K = A(1-\alpha)\left[\alpha(\frac{L}{K})^{\rho} + (1-\alpha)\right]^{\frac{1-\rho}{\rho}}$$

3-3- المعدل الحدي للإحلال التقني:

$$TMST = \frac{f'_L}{f'_K} = \left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\right]\left[\frac{K}{L}\right]^{\rho+1}$$

إذا كان $\rho = 1$ فإن معدل الإحلال التقني لدالة الانتاج ذات المرونة الثابتة هو نفسه لدالة الانتاج لكوب دوكلاس مع وضع: $\beta = 1-\alpha$

3-4- تحدب منحنيات الناتج المتساوي:

$$\frac{dTMST}{dL} = \frac{\partial TMST}{\partial L} + \left[\frac{\partial TMST}{\partial K}(-TMST)\right] < 0$$

$$\frac{dTMST}{dL} = -(1+\rho)\left[\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\right]\left[\frac{K^{\rho+1}}{L^{2(\rho+1)}}\right]\left[(1-\alpha)L^{\rho} + K^{\rho}\right] < 0$$

إذن المعدل الحدي للإحلال التقني متناقص ومنحنيات الناتج المتساوي محدبة بالنسبة لنقطة الأصل بحيث $\rho > -1$.

3-5- مرونة الإحلال:

تكون مرونة الإحلال لهذه الدالة ثابتة ولكن ليس بالضرورة تكون مساوية للواحد.

$$\sigma = \left[\frac{d(\frac{K}{L})}{dTMST}\right]\left[\frac{TMST}{\left(\frac{K}{L}\right)}\right] = \frac{1}{1+\rho}$$

وحيث أن قيمة ρ ثابتة فإن σ أيضاً ثابتة، غير أن قيمة الأخيرة تختلف باختلاف قيمة ρ وبهذا:

- إذا كانت $(\rho = 0)$ فإن الدالة تتسم بثبات مرونة الإحلال ومساواتها للواحد وتتفق الدالة في هذه الحالة مع دالة كوب دوجلاس.

- إذا كانت $(\rho = -1)$ فإن منحنى سواء الإنتاج يكون خطاً مستقيماً حيث الإحلال لانهائياً بين الموارد.

- إذا كانت $(\rho > -1)$فإن منحنى سواء الإنتاج يكون أكبر ميلاً حيث يكون الإحلال مرتفعاً لارتفاع مرونة الإحلال.

- إذا كانت $(\rho < -1)$ فإن منحنى سواء الإنتاج يتخذ الشكل المقعر تجاه نقطة الأصل على عكس المألوف الذي يتصف بالتحدب تجاه نقطة الأصل.

الدالة تتميز بعدم مساواة مرونة الإحلال للواحد كما أن الدالة تسمح بالإحلال والتكامل بين عناصر الإنتاج، فإذا كانت مرونة الإحلال أكبر من الصفر $(\sigma > 0)$ هذا يعني امكانية الاحلال بين عناصر الانتاج، أما إذا كانت عناصر الانتاج مكملة لبعضها البعض فإن مرونة الإحلال تأخذ القيمة أقل من الصفر $(\sigma < 0)$، وعلى هذا فإن الدالة تصلح لوصف بيانات المدى القصير والمدى الطويل بعكس الحال في دالة كوب دوجلاس التي تصلح لبيانات المدى الطويل فقط.

3-6- اهم عيوب دالة الانتاج ذات المرونة الثابتةCES:

من الصعب استخدام هذه الدالة للبيانات الخاصة بأكثر من متغيرين مستقلين.

ثبات مرونة الإحلال رغم أنها لا تساوي الوحدة إلاّ أن الدالة مازالت مقيدة بهذا الشرط.

الدالة يمكن أن تصف أحد المراحل الثلاثة المعروفة للإنتاج وليس جميعها في آن واحد وتتفق في هذا مع دالة كوب دوجلاس.

4- دالة الإنتاج ذات مرونة الإحلال المتغيرة VES:

تعد دالة VES تطويراً جديداً لدالة كوب دوجلاس و دالة CES حيث تحررت من شرط ثبات مرونة الإحلال، وتأخذ الدالة الصورة الرياضية التالية:

$$X=\left[\alpha L^{-\left(\frac{1}{b}-1\right)}+a^{-\frac{1}{b}}\,\frac{1-b}{1-b-c}\left(\frac{K}{L}\right)^{-\frac{c}{b}}K^{-\left(\frac{1}{b}-1\right)}\right]^{\frac{-1}{\frac{1}{b}-1}}$$

وبفرض أن:

$$\theta=\frac{1-b}{1-b-c},\ a^{-\frac{1}{b}}=(1-\alpha)A^{-\rho}$$

$$\rho=\frac{1}{b}-1$$

فإن دالة الانتاج السابقة يمكن إعادة كتابتها كما يلي:

$$X=\left[\alpha\,L^{-\rho}+A(1-\alpha)\theta\ \left(\frac{K}{L}\right)^{\rho C(1+\rho)}K^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

يلاحظ من دالة الانتاج الاخيرة انها تتخذ شكل دالة CES فيما عدا أن دالة VES تحتوي على عنصر ثالث وهو نسبة رأس المال إلى العمل $\left(\frac{K}{L}\right)$

1-4- مرونة الإحلال في الدالة VES

وتأخذ مرونة الإحلال في الدالة VES الصورة التالية:

$$\sigma=\frac{b}{1-c\left(1+\frac{\partial K}{\partial L}\cdot\frac{L}{K}\right)}$$

- فإذا كانت $C = 0$ عند اذن تتساوى دالة الانتاج ذات المرونة الثابتة (CES)مع دالة الانتاج ذات المرونة المتغيرة (VES).
- أما إذا كانت $b = 1$ و $C = 0$ عند اذن تتساوى دالة الانتاج ذات المرونة الثابتة (CES)مع دالة الانتاج لكوب دوجلاس(C-D).

تتفق دالة الانتاج ذات المرونة المتغيرة (VES) مع كل من دالة الانتاج ذات المرونة الثابتة ((CES) ودالة الانتاج لكوب دوجلاس(C-D) في أن دالة الناتج الحدي للمورد هي دالة موجبة الميل.

2-4- عيوب دالة الانتاج ذات المرونة المتغيرة (VES)

ومن أهم عيوب دالة الانتاج ذات المرونة المتغيرة (VES) مايلي:

- يصعب تعميم الدالة لأكثر من متغيرين.
- الدالة غير خطية المعلمات Coefficients مما يشكل صعوبة في تقديرها.

5- دوال الإنتاج الجبرية من الدرجة الثانية:

تأخذ دوال الانتاج الجبرية من الدرجة الثانية الشكل العام التالي:

$$Y = a_o + a_1X_1 + a_2X_2 + \frac{1}{2}b_1X_1^2 + \frac{1}{2}b_2X_2^2 + b_3X_1X_2$$

حيث:

Y: الإنتاج؛

X_2, X_1 : عنصري العمل ورأس المال؛

a_0: ثابت الدالة؛

a, b: معاملات الدالة.

1-5- خصائص دوال الانتاج الجبرية من الدرجة الثانية

وتتسم هذه الدالة بالخصائص التالية:

أ. الدالة غير متجانسة.

ب. تغير قيمة b_3:

i. إذا كانت قيمة $b_3 < 0$ فإن الدالة تصلح للعناصر المتنافسة

ii. أما إذا كانت قيمة$b_3 = 0$ فإن الدالة يمكن تطبيقها في حالة العناصر المستقلة،

iii. أما إذا كانت قيمة $b_3 > 0$ فالدالة تطبيقية في حالة العناصر المكملة.

ج. الخطوط الحرجة موجبة الميل إذا كانت الموارد مكملة، وسالبة الميل إذا كانت الموارد متنافسة، وخطوط مستقيمة موازية للمحورين إذا كانت الموارد مستقلة.

د. 4- تتميز منحنيات منحنيات الناتج المتساوي بالتحدب نحو نقطة الأصل.

هـ. 5- يمكن أن تصف مراحل للإنتاج الثلاث.

6-5- ومن أهم عيوب دوال الانتاج الجبرية من الدرجة الثانية هو صعوبة تطبيقها لأكثر من متغيرين.

ثانيا- استراتيجيات توازن المؤسسة:

بفرضية الاحلال بين عناصر الانتاج يكون هدف المقاول عبارة عن اختيار مجموعة معينة من هذه العناصر لإنتاج مستوى معين من المنتوج تكون للمنتوج وعناصر الانتاج اسعار معطاة من طرف السوق ولذلك يكون المقاول مجبرا على دراسة الأسعار النسبية لعناصر الانتاج لكي يقلل تكلفة إنتاج مستوى منتوج ما أو يعظم الانتاج بمستوى تكلفة معينة أو يعظم الربح.

1- منحنى التكاليف المتساوية:

إذا كانت w و r تمثلان أسعار الوحدات الثابتة لعاملي الإنتاج L و K على التوالي، والتكلفة الكلية للإنتاج (الإنفاق المستخدم من طرف المؤسسة) معطاة بالمعادلة الخطية التالية:

$$C = rK + wL$$

ونعتبر أن المؤسسة تملك ميزانية محددة يمكن إعادة كتابة المعادلة بالشكل:

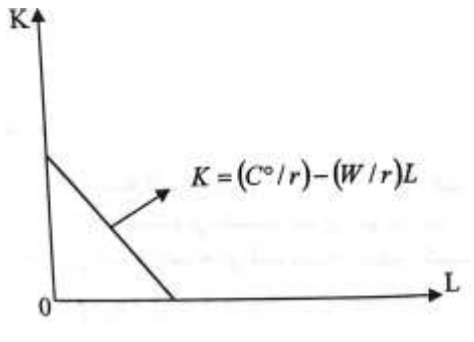
$$C^o = rK + wL$$

أو

$$K = \left(\frac{C^o}{r}\right) - \left(\frac{w}{r}\right) L$$

تشير العلاقة الاخيرة إلى مستقيم التكلفة المتساوية الذي يبين مجموع التركيبات للعوامل المستخدمة التي تؤدي إلى نفس مستوى من الإنفاق، كما هو مبين في الرسم البياني التالي:

الشكل 08: مستقيم التكلفة المتساوية



يمثل كل إنفاق من طرف المؤسسة مستقيم التكلفة المتساوية، كلما ابتعد هذا المستقيم عن نقطة الأصل كلما كان الإنفاق اكبر.

2- البرنامج الاول: تعظيم الانتاج تحت قيد تكلفة معلومة:

في سعيها للحصول على أكبر إنتاج ممكن تقوم المؤسسة باستخدام التركيبات الأمثل لعوامل الإنتاج وهذا وفق ميزانية محددة. يتعلق الأمر رياضيا بتعظيم المنفعة وفق قيد تكلفة معطاة، تركب دالة لاقرانج بالشكل التالي:

$$L = f(K,L) + [C^{\circ} - rK + wL]$$

الشروط الأولى اللازمة لتعظيم و هي:

$$\begin{cases} L'_L = f'_L - \lambda w = 0 & \rightarrow \ (1) \\ L'_K = f'_K - \lambda r = 0 & \rightarrow \ (2) \\ L'_\lambda = R - wL - rK = 0 & \rightarrow \ (3) \end{cases}$$

يؤدي استخدام المعادلتين(1) و (2) الى:

$$\frac{f'_L}{f'_K} = \frac{w}{r} = TMST \ldots\ldots (4)$$

ويؤدي حل جمله المعادلات (1)، (2) و(3) الى استخراج الى قيم التوازن $\bar{L}$، $\bar{K}$ و $\bar{\lambda}$.

حسب العلاقة (4) يتحقق التوازن عندما تتساوى نسبة الإنتاجيات الحدية لـ L و K مع نسبة أسعار هما.

كما توضح لنا عند التوازن يكون $TMST$ يساوي نسبة الأسعار للمدخلات.

وكذلك عند معالجة الشروط بطريقة أخرى نحصل على:

$$\frac{f'_L}{w} = \frac{f'_K}{r} = \lambda$$

تبين العلاقة الاخيرة أن شرط التوازن يتحقق أيضا عندما تتساوى λ مع الوحدة النقدية الأخيرة للمدخل المنفق من أجل شراء المخرجات.

تعبر λ عن الإنتاجية الحدية للميزانية المخصصة لعوامل الإنتاج.

3- البرنامج الثاني: تقليل التكاليف تحت قيد مستوى انتاج معلوم:

قد تهدف المؤسسة إلى تقليل التكاليف وفق مستوى إنتاج معطى وهذا باختيار التركيب الأمثل لعوامل الانتاج الذي يمكنها من إنتاج X^0 بتكلفة أقل. يمكن التعبير عن هذه المشكلة من خلال معادلة لاقرانج كمايلي:

$$L = wL + rK + \lambda[X^{\circ} - f(K,L)]$$

الشروط الأولى اللازمة لتعظيم و هي:

$$\begin{cases} L'_L = w - \lambda f'_L = 0 & \rightarrow \ (1) \\ L'_K = r - \lambda f'_K = 0 & \rightarrow \ (2) \\ L'_\lambda = X^\circ - f(K, L) = 0 & \rightarrow \ (3) \end{cases}$$

يؤدي استخدام المعادلتين(1) و (2) الى:

$$\frac{w}{r} = \frac{f'_L}{f'_K} = TMST \ldots \ldots (4)$$

ويؤدي حل جملة المعادلات (1)، (2) و(3) الى استخراج الى قيم التوازن $\bar{L}$ ،$\bar{K}$ و $\bar{\lambda}$.

حسب العلاقة (4) يتحقق التوازن عندما تتساوى نسبة الإنتاجيات الحدية لـ L و K مع نسبة أسعار هما.

كما توضح لنا عند التوازن يكون TMST يساوي نسبة الأسعار للمدخلات.

$$\frac{f'_L}{w} = \frac{f'_K}{r} = \frac{1}{\lambda}$$

تعبر λ عن مشتقة التكلفة بالنسبة للمخرج او ما يسمى التكلفة الحدية.

ملاحظة: في حالة تقليل التكاليف تعمل المؤسسة على تنويع في Ct بحيث يكون مستقيم التكلفة المتساوية المختار له نقطة تماس مع منحنى الناتج المتساوي المعطىX° .

إذا بقيت عوامل الإنتاج ثابتة بينما مستوى الإنتاج يتغير، يؤدي الربط بين مختلف نقاط التوازن للمؤسسة الى ما يسمى بمنحنى المسار الامثل لتوسع المؤسسة، كل نقطة على منحنى المسار الامثل لتوسع المؤسسة تحقق المساواة بين $TMST$ و نسبة الأسعار لعوامل الإنتاج.

إذا كانت منحنيات الناتج المتساوي محدبة (الشروط الثانية محققة)، إذن يمكن أن نستخرج معادلة منحنى مسار التوسع من الشروط الأولى لإحدى البرنامجين السابقتين.

4-البرنامج الثالث: تعظيم ربح المؤسسة

قد تهدف المؤسسة إلى تعظيم ربحها وهذا وفق برنامج تعمل من خلاله على تغيير اما مستوى الميزانية المخصصة لشراء عوامل الإنتاج أو مستوى مخرجات الإنتاج. ويتحدد ربح المؤسسة كفرق بين الإيراد الكلي (PX)المتحصل عليه من بيع المخرجات وتكلفة الإنتاج (CT) التي تتحملها من أجل إنتاج هذا الأخير إذن تكتب معادلة الربح بالشكل:

$$\pi = RT - CT = PX - CT$$

حيث تمثل P تمثل سعر معطى للمخرج X .

وبتعويض كل من X و CT بقيمتهما تصبح معادلة الربح السابقة بالشكل:

$$\pi = Pf(K, L) - (rK + wL)$$

تكتب الشروط الأولى لتعظيم دالة الربح بالشكل التالي:

$$\pi' = Pf'_L - w = 0$$
$$\pi' = Pf'_K - r = 0$$

ومنه نجد:

$$Pf_L' = w$$
$$Pf_K' = r$$

من العلاقة الأخيرة تكون الإنتاجيات الحدية لعناصر الإنتاج (K, L) متساوية لأسعارهما، وبمعنى آخر من اجل تحقيق المؤسسة لتوازنها (تحقق أعظم ربح) يجب عليها استخدام كل عنصر من عناصر الإنتاج الى المستوى إلى المستوى التي تتساوي فيه الإنتاجية الحدية مع سعرها.

5- دوال الطلب على عناصر الانتاج:

تعتبر دالة الطلب لعنصر انتاج بالنسبة للمؤسسة دالة مشتقة من طلب السلعة المنتجة من طرف المؤسسة، وعلى هذا الأساس يمكن أن نستخرج دوال الطلب لعناصر الانتاج K و L ، من الشروط الأولى لتعظيم دالة الربح، وتكون هذه الدوال تابعة لـ w و r و P.

تكتب دوال الطلب على عناصر الانتاج بالشكل:

$$K = D^K(P, w, r)$$
$$L = D^L(P, w, r)$$

6- توازن مؤسسة ذات منتوجات عديدة:

تمتلك المؤسسة في بعض الحالات كميات محددة من عناصر الانتاج والتي يمكن لها انتاج عدة منتوجات بإستعمال هذه الكميات المحدودة من هذه العناصر. تشير هذه الحالة الى إلزامية التحكم في استعمال عناصر الانتاج من طرف المؤسسة.

نفترض استعمال المؤسسة لعناصر الانتاج K و L من اجل انتاج السلعتين X و Y، تكتب دوال الانتاج على شكل:

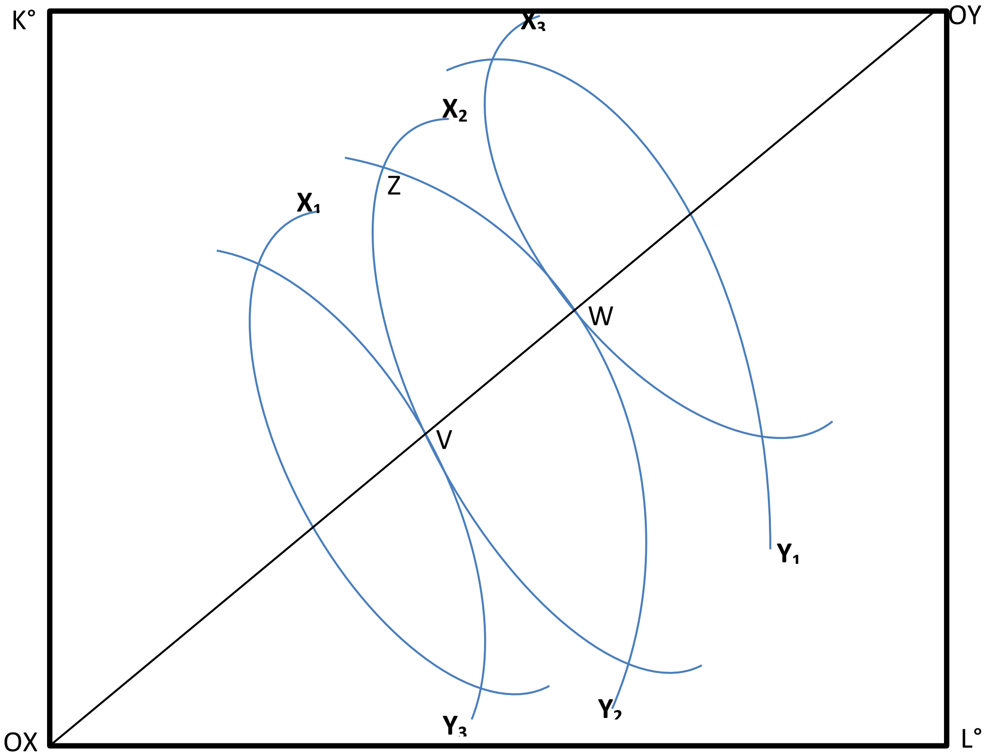
$$X = f(K_x, L_x)$$
$$Y = h\ (K_y, L_y)$$

حيث:

$$K^{\circ} = K_x + K_y$$
$$L^{\circ} = L_x + L_y$$

اذا افترضنا امتلاك المؤسسة كميات K° و L° من عناصر الانتاج K و L ، في هذه الحالة يمكن الاستعانة لتحليل وضعية المؤسسة بعلبة ادجووث والتي تظهر في الرسم البياني التالي:

الشكل 09: علبة ادجووث



تمثل أي نقطة داخل العلبة تشكيلة من المنتجات X و Y منتوجة بعناصر الانتاج المتوفرة لدى المؤسسة، يظهر انتاج السلعة X في المنحنيات X_i بينما تشير المنحنيات Y_i الى انتاج السلعة Y.

بسبب التحدب العكسي للمنحنيات X_i و Y_i تتشكل نقاط مماس (V و W وغيرها) والتي تمثل ما يسمى بمنحنى العقد، ويشير منحنى العقد الى كل النقاط المثلى التي يمكن اختيارها من طرف المؤسسة.

ملاحظة:

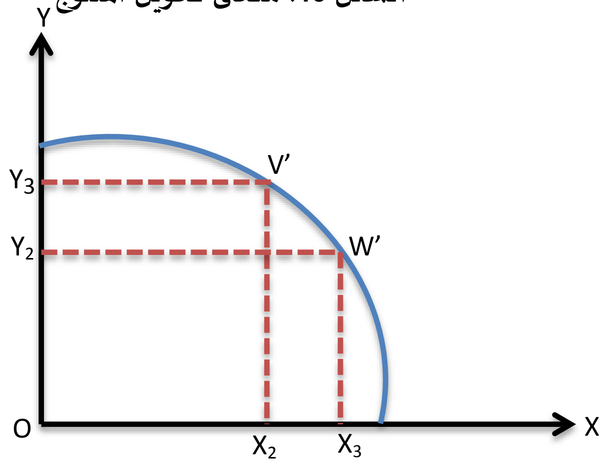
تكون النقطة $Z(x_2,y_2)$ غير فعالة في حين النقطة $V(x_2,y_3)$ تستعمل نفس الكميات من K و L وتنتج اكبر كمية من Y نفس التحليل بالنسبة للنقطة W، تكون نقاط منحنى العقد فعالة حيث أي نقطة خارج المنحنى تعني مستوى انتاج اقل من احدى المنتوجين على الاقل. يكون اختيار نقطة على المنحنى مرتبطا بأسعار السلعتين.

6-1- منحنى تحويل المنتوج

يتم اشتقاق منحنى تحويل المنتوج او منحنى الانتاج الممكن من منحنى العقد، حيث يمثل تشكيلات من X و Y التي تستعمل عناصر الانتاج بأكملها ($L°$ و $K°$).

تمثل كل نقطة على منحنى العقد زوج (x,y) ممثل كذلك على منحنى تحويل المنتوج ويأخذ هذا المنحنى الشكل التالي:

الشكل 10: منحنى تحويل المنتوج



ملاحظة: تقابل النقطة V على منحنى تحويل المنتوج النقطة V' على منحنى العقد، كما تقابل النقطة W النقطة W'.

6-2- اشتقاق ميل منحنى تحويل المنتوج

انطلاقا من دوال الانتاج يمكن كتابة:

$$X = f(K_x, L_x)$$

$$Y = h\,(K_y, L_y)$$

$$dx = f_L dL_x + f_K dK_x$$

$$dy = h_L dL_y + h_K dK_y$$

على طول منحنى العقد أي انخفاض في كميات X سوف يؤدي الى ازدياد في كميات Y، وإذا كانت عناصر الانتاج تستعمل دائما بأكملها يمكن كتابة المعادلتين:

$$dL_x = -dL_y \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$dK_x = -\,dK_y$$

يمكن كتابة ميل منحنى تحويل المنتوج على شكل التالي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h_L dL_y + h_K dK_y}{f_L dL_x + f_K dK_x} \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

نعلم ان:

$$\frac{dK}{dL} = \frac{-f_L}{f_K} = \frac{-h_L}{h_K} \quad \ldots\ldots\ldots(3)$$

انطلاقا من المعادلة (3) يمكن أن نكتب:

$$f_L = f_K\left[\frac{h_L}{h_K}\right] \qquad \ldots\ldots.\ldots(4)$$
$$h_L = h_K\left[\frac{f_L}{f_K}\right]$$

يؤدي تقسيم المعادلة (2)على dL_y واستعمال المعادلات (1) الى كتابة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h_L + h_K\left[\frac{dK_y}{dL_y}\right]}{-f_L - f_K\left[\frac{dK_x}{dL_x}\right]}$$

وينتج عن تعويض كل من h_L و f_L بقيمتهما حسب المعادلة(4) ما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h_K\left[\frac{f_L}{f_K} + \frac{dK_y}{dL_y}\right]}{-f_K\left[\frac{h_L}{h_K} + \frac{dK_x}{dL_x}\right]} = \frac{-h_K}{f_K}$$

عن طريق نفس الخطوات يمكن ايجاد:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-h_L}{f_L}$$

نتيجة لذلك يمكن كتابة ميل منحنى تحويل المنتوج بالشكل التالي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-h_L}{f_L} = \frac{-h_K}{f_K} = -TTP$$

تعريف: يعرف معدل تحويل المنتوج (TTP) كنسبة الانتاجيات الحدية للعنصرين K وL في انتاج السلعتين X و Y.

يكون منحنى تحويل المنتوج مقعر نحو نقطة الاصل بمعنى انه يكون متزايدا من اليسار الى اليمين أي:

$$\frac{\delta TTP}{\delta K} = \frac{\delta TTP}{\delta L} > 0$$

3-6- منحنى تساوي الدخل

تكتب معادلة الدخل للمؤسسة على شكل التالي:

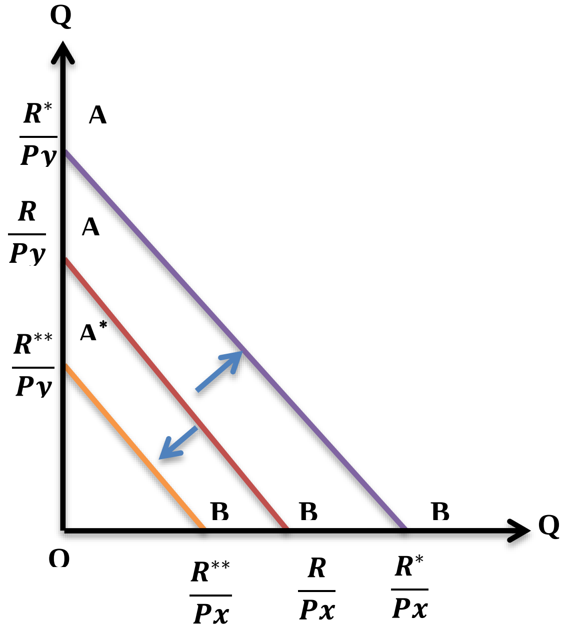
$$R = XP_x + YP_y$$

باعادة كتابة هذه المعادلة نجد:

$$Y = \frac{R}{P_y} - \frac{P_x}{P_y}X \quad \text{دالة تساوي الدخل}$$

تعريف: يشير منحنى تساوي الدخل الى كل المجموعات (الازواج) من المنتوجات التي تحقق نفس مستوى الدخل، وتظهر بيانيا كمايلي :

الشكل 11: منحنى تساوي الدخل



6-4- توازن المؤسسة

توجد المعلومات التالية حول المؤسسة المدروسة. تكتب دوال الانتاج على شكل:

$$X = f\ (K_X, L_X)$$

$$Y = h\ (K_y, L_y)$$

-تكون عناصر الانتاج مرتبطة بالعلاقات التالية:

$$K_x + K_y = K = G\ (x, y)$$

$$L_x + L_y = L = H\ (x, y)$$

على افتراض أن كميات العناصر غير محدودة تصل المؤسسة إلى توازنها بتعظيم ربحها:

$$\text{Max}\,\pi = XP_x + YP_y - r(K_x + K_y) - w(L_x + L_y)$$

من شروط الدرجة الأولى لتعظيم الربح نجد:

$$\frac{\delta\pi}{\delta x} = P_x - r\frac{\delta K}{\delta x} - w\frac{\delta L}{\delta x} = 0 \ \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\delta\pi}{\delta y} = P_y - r\frac{\delta K}{\delta y} - w\frac{\delta L}{\delta y} = 0 \ \ldots\ldots (2)$$

$$\frac{\delta\pi}{\delta K_x} = P_x\left(\frac{\delta X}{\delta K_x}\right) - r = 0 \ \ldots\ldots (3)$$

$$\frac{\delta\pi}{\delta K_y} = P_y\left(\frac{\delta Y}{\delta K_y}\right) - r = 0 \;\dots\dots(4)$$

$$\frac{\delta\pi}{\delta L_x} = P_x\left(\frac{\delta X}{\delta L_x}\right) - w = 0 \;\dots\dots(5)$$

$$\frac{\delta\pi}{\delta L_y} = P_y\left(\frac{\delta Y}{\delta L_y}\right) - w = 0 \;\dots\dots(6)$$

1-4-6- شروط توازن المؤسسة

- انطلاقا من المعادلة (1) نسجل مساواة P_x لمجموع قيم التكاليف الحدية لانتاج X :

$$P_x = r\frac{\delta K}{\delta x} + w\frac{\delta L}{\delta x}$$

- انطلاقا من المعادلة (2) نسجل مساواة P_y لمجموع قيم التكاليف الحدية لانتاج Y :

$$P_y = r\frac{\delta K}{\delta y} + w\frac{\delta L}{\delta y}$$

- يمكن كتابة معادلة تحويل المنتوج TTP انطلاقا من المعادلات (3) و(4) و (5) و (6)كمايلي:

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{\frac{\delta Y}{\delta K_y}}{\frac{\delta X}{\delta K_x}} = \frac{\frac{\delta Y}{\delta L_y}}{\frac{\delta X}{\delta L_x}} = \frac{h_K}{f_K} = \frac{h_L}{f_L} = TTP$$

ملاحظة: في التوازن يكون معدل تحويل المنتوج متساويا مع نسبة اسعار السلعتين.

- انطلاقا من المعادلات (3) و(4) و (5) و (6) يمكن كتابة مايلي:

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{\frac{\delta X}{\delta L_x}}{\frac{\delta X}{\delta K_x}} = \frac{\frac{\delta Y}{\delta L_y}}{\frac{\delta Y}{\delta K_y}} = \frac{f_L}{f_K} = \frac{h_L}{h_K} = TMST_X = TMST_Y$$

ملاحظة: في التوازن يكون المعدل الحدي للإحلال التقني في انتاج X متساويا مع المعدل الحدي للإحلال التقني في انتاج Y ويكون كلا المعدلين متساويين مع نسبة اسعار عناصر الانتاج.