المحور الأول: نظرية المعاينة

1-مفهوم العينة وأنواعها:

1-1 تعريف العينة وأساليب جمع البيانات:

يمكن تعريف العينة بأنها:" جزء من المجتمع، يختار بطريقة علمية محددة نستخدمه في الحكم على المجتمع محل الدراسة"،[1] وفي هذا الصدد يمكن حصر مصدران أساسيان لجمع البيانات، [2] يتعلق المصدر الأول بمختلف المراجع العلمية مثل: المصادر والكتب، بينما يقوم المصدر الثاني على مقدرة الباحث العلمية في جمع البيانات التي يراها مناسبة للبحث.

- ✓ **أسلوب المسح (الحصر) الشامل:** ويسمى أحيانا بأسلوب العد الكامل، ويستخدم في التعدادات الكلية لعملية التخطيط القومي مثل: التعداد السكاني، الزراعي، الصناعي، والتجاري، من أجل حساب بعض المؤشرات الإحصائية لمواجهة الأزمات، غير أن هذا الأسلوب يشتمل على عدة أخطاء لكثرة المفردات الاحصائية وضخامة البيانات، ويمكن انتقاد هذا الأسلوب من حيث:
  - أنه يمكن الحصول على الردود الدقيقة إذا استخدمنا جزء من المجتمع الكلي كما في حالة الاستبيانات المرسلة عن طريق البريد؛
  - امكانية اتخاذ اجراءات استكمال البيانات الناقصة في الإجابات المنفردة؛
  - سهولة الحصول على بيانات أكثر من أفراد العينة بدل الاعتماد على كل أفراد المجتمع؛
  - الارتياب والأخطاء الكبيرة في البيانات المستخلصة من التعداد الشامل؛

---

[1]- عبد الرحمن محمد أبو عمه، الحسيني عبد البر راضي، محمود محمد إبراهيم هندي، مقدمة في المعاينة الإحصائية، دار المريخ، المملكة العربية السعودية، 1995، ص 16.

[2]-مشعان بن سهو العتيبي، أحمد عبادة العربي، ريهام عاصم غنيم، التطبيقات الإحصائية في العلوم الإنسانية، مكتبة الملك فهد الوطنية، السعودية، الطبعة الثانية، 2012، ص-ص 37-39.

- اعتبار المسح الشامل عينة في الزمن في حالة البيانات المتغيرة بمرور الزمن؛
- استحالة القيام بالتعداد الشامل في حالة الحيوانات وغيرها من الكائنات؛
- احتمالية تدمير المفردات مثل: تحديد فصيلة الدم أو اختبار جودة مثلا.

✓ **أسلوب العينات (المعاينة):** اشتق مصطلح المعاينة من مصطلح العينة والتي يتم بواسطتها استخلاص بعض الاستنتاجات القابلة للتعميم على المجتمع ككل، وفي سياق ذلك يشير Deming إلى أنها تتضمن ثلاثة عمليات هي:[3]

- الدقة المراد بلوغها؛
- تصميم المسح الملائم للوصول إلى الدقة المطلوبة؛
- تقدير المستوى الفعلي للدقة التي تم التوصل إليها.

1-2 شروط جودة العينة: حتى تتسم العينة بالجودة العالية في التصميم وجب أن تكون:

- العينة ممثلة بشكل جيد للمجتمع المسحوبة منه، حيث تكون شاملة لخصائصه؛
- أن لا تكون الظاهرة المراد معاينتها نادرة الحدوث، بقدر ما تكون سائدة في المجتمع؛
- أن ترتبط الوحدات والعناصر الاحصائية للمجتمع الأصلي بنفس فرص الاختيار في الظهور؛
- حصر جميع المفردات الاحصائية للمجتمع الأصلي في وحدات تنظم داخل قوائم (الإطار) مثل: تقسيم المجتمع إلى مجموعة أسر، بحيث تمثل الأسرة وحدة معاينة أو تحليل (ربما تكون الوحدة ممثلة في الفرد أو الجماعة)؛
- تناسب اختيار حجم ونوع العينة مع الهدف الأساسي للبحث (كطبيعة المجتمع أو نوع مشكلة الدراسة). كما تتقاطع الشروط الأساسية للطرق المختلفة في المعاينة في النقاط التالية:[4]

---

[3]- مشعان بن سهو العتيبي، أحمد عبادة العربي، ريهام عاصم غنيم، التطبيقات الإحصائية في العلوم الإنسانية، مرجع سابق، ص-ص 40-41.

- التمثيل الجيد للمجتمع من طرف العينة المختارة كونها تعكس حقيقته من زاوية خصائصه؛
- دقة تقدير معالم المجتمع المسحوبة منه العينة مثل: المتوسط، الانحراف المعياري، النسبة وغيرها؛
- محدودية تكاليف اختيار العينة من حيث حجم تمويل المشروع مع عدم الاخلال بالشروط المطلوبة في نجاح الدراسة.

1-3 أنواع العينات:

سنتطرق إلى معالجة بعض أساليب المعاينة والتي يعد البعض منها بسيط والآخر معقد، مع التركيز على الأسلوب الأول حتى لا نحيد عن المضمون الإحصائي، كون الطالب درسها في مقياس المنهجية والتي تتمثل في:[5] المعاينة العشوائية البسيطة، المعاينة العشوائية المنتظمة، المعاينة العشوائية الطبقية.

وسنقدم شرحا مبسطا لأساليب المعاينة السابقة، مع الإشارة إلى أن التغير في القيمة الاحصائية يعتمد على المؤشرات التالية:[6] حجم المجتمع، حجم العينات، طريقة اختيار العينات.

- **أسلوب المعاينة العشوائية البسيطة:** وهو عبارة عن اختيار عينة بصورة عشوائية تعطي لجميع الوحدات نفس امكانية الظهور؛
- **أسلوب المعاينة العشوائية المنتظمة:** ويقوم على وحدة معاينة (نسبة المعاينة= حجم المجتمع / حجم العينة) ممثلة بالرقم K، ونقوم بعدها باختيار رقم عشوائي من 1 إلى

---

[4]- عبد الرحمن محمد أبو عمه، الحسيني عبد البر راضي، محمود محمد إبراهيم هندي، مقدمة في المعاينة الإحصائية، مرجع سابق ، ص 16.

[5]- أمير حنا هرمز، الإحصاء الرياضي، دار ابن الأثير، العراق، 1990، ص 472.

[6]- خاشع محمود الراوي، المدخل إلى الاحصاء، جامعة الموصل، العراق، 1984، ص-ص 230-232.

الرقم k، ليكون الرقم العشوائي المختار رقم العينة الأولى ونقوم بعدها بإضافة K على رقم العينة الأولى لحساب رقم العينة الثانية، ثم نضاعف الرقم K ونضيفه بالتوالي لحساب رقم العينة الثالثة ثم العينة الرابعة ودواليك، فعلى سبيل المثال لو كان حجم المجتمع يساوي 1000، وحجم العينة يساوي 50 وحدة معاينة فإن:

K= 1000/50= 20، نقوم باختيار رقم عشوائي بين 1 و 20 وليكن 8، لتكون أرقام العينات على التوالي: 8، 28، 48، 68، وهكذا إلى أن يكتمل حجم العينة المكونة من 500 وحدة معاينة؛

- **أسلوب المعاينة العشوائية الطبقية:** وهو عبارة عن تقسيم المجتمع إلى طبقات فرعية متجانسة، ثم اختيار عينة عشوائية فرعية من كل طبقة بحيث يُكوِن مجموعها العينة الطبقية، وقد يكون حجم العينة الفرعية متناسبا مع حجم الطبقة (طريقة التخصيص النسبي) أو مساويا لجميع الطبقات.

كما يمكن تقسيم العينات وفق المبدأ الاحتمالي إلى:[7] العينات الاحتمالية والعينات غير الاحتمالية

- **العينات الاحتمالية:** وتنقسم إلى الأنواع التالية:

- **العينة العشوائية البسيطة:** وهي عبارة عن اختيار بسيط للمفردات الإحصائية بدرجة احتمال متساوية في الاختيار، مع ضرورة استقلاليتها عن بعضها البعض، وتتمثل طرق اختيار العينة العشوائية البسيطة فيما يلي:

---

[7]- مشعان بن سهو العتيبي، أحمد عبادة العربي، ريهام عاصم غنيم، التطبيقات الإحصائية في العلوم الإنسانية، مرجع سابق، ص-ص 46- 53.

- **طريقة البطاقات (القرعة):** عن طريق كتابة الباحث أسماء أو أرقام جميع الوحدات على بطاقات متشابهة ليتم سحبها عشوائيا مع تسجيل أرقام أو أسماء عليها لتمثل مفردات عينة الدراسة؛
- **طريقة الجداول العشوائية:** يلجأ إليها الباحث في حالة ما يكون حجم المجتمع كبيرا؛
- **طريقة السحب الآلي:** تستخدم هذه الطريقة في حالة سحب عينات كبيرة الحجم من مجتمعات تتميز بأحجام كبيرة جداً، وتحقق هذه الطريقة درجة عالية من العشوائية وعدم التحيز، وبالإضافة إلى السحب الآلي لمفردات العينة فإنه من الممكن تغذية الحاسب الآلي ببرامج يمكن بواسطتها أن يضع جدولاً للأرقام العشوائية.

- **العينة العشوائية المنتظمة:** ويتطلب أن يكون الجمهور الأصلي أو قائمة أعضائه متخذة شكل انتظام متسق يتم حسابها عن طريق تحديد المسافة الإحصائية أو طول الفئة وتساوي حجم المجتمع قسمة حجم العينة، وتستخدم العينة المنتظمة عندما تكون هناك خصائص مميزة للجمهور الأصلي، بحيث يكون الجمهور في تسلسل متسق ومتدرج من حيث التنوع، و يكون لكل عضو في المجتمع نفس الفرصة في الاختيار، وفيه يتم اختيار العضو الأول عشوائيا، ثم تتسم الفترات بين مفردات العينة بالانتظام؛
- **العينة العشوائية الطبقية:** يستخدم هذا النوع من العينات العشوائية في دراسة المجتمعات التي تتميز بتباين نوعيات مفرداتها، والتي يمكن تقسيمها إلى مجموعات أو طبقات، لكل مجموعة أو طبقة منها خصائص ومميزات معينة، ولكنها تتباين فيما بينها في الخصائص والمميزات، فاختيار عينة البحث يتحدد في ضوء عدة عوامل، يأتي في مقدمتها خصائص مجتمع الدراسة الذي تمثله العينة المختارة، ونجد هنا مجالا لتوضيح هذه الإشارة، حيث إن أسلوب الاختيار العشوائي البسيط أو المنتظم يتلاءم مع المواقف التي تكشف عن قدر كبير وواضح من التجانس بين أفراد مفرداتها، وبالتالي يضمن هذا الأسلوب العشوائي تمثيل

العينة للمجتمع الأصلي أو الموقف الكلي، غير أن تجانس المجتمع أو "المواقف الاجتماعية" تعتبر مسألة نسبية قد يختلف تقديرها من باحث لآخر، هذا فضلا عن أنه كثيرا ما يكشف مجتمع البحث عن قدر من التباين والاختلاف بين خصائص أفراده أو وحداته، الأمر الذي يجعل أسلوب الاختيار العشوائي لعينة البحث عرضة لأخطاء كثيرة عند الاختيار، سواء كانت أخطاء راجعة إلى الصدفة البحتة أو التحيز المتعمد لدى الباحث لاختيار وحدات أو مفردات دون أخرى، ولتجنب هذه الصعوبة وضمانا لدقة تمثيل العينة للمجتمع أو الموقف الأصلي الكلي يستخدم أسلوب العينة العشوائية الطبقية.

- **العينة متعددة المراحل:** يلاءم هذا النوع من العينات العشوائية دراسة المجتمعات الكبيرة، مثل الدراسات السكانية أو الدراسات في المجالات الاقتصادية، وهي مجتمعات يمكن تقسيمها إلى عدد من الأقسام المتشابهة، التي يحتوي كل قسم منها على عدد من المفردات التي تتصف بعدم التجانس في خصائصها، ولذا أطلق على هذا النوع من العينات أنه متعدد المراحل. فإذا أردنا مثلاً دراسة المشاركة الاجتماعية للطلاب في الجامعات السعودية فإننا نقوم باختيار عشوائي لعدد من الجامعات السعودية، وبعد ذلك نقوم باختيار عشوائي لعدد من كليات الجامعات المختارة، ثم تأتي مرحلة اختار عدد من أقسام كليات الجامعات التي تم اختيارها في المرحلة الثانية وتكون هذه الأقسام المختارة المجال الذي سيتم منها الاختيار العشوائي للطلاب الذين ستتم دراسة اتجاهات المشاركة الاجتماعية لديهم.

- **العينات غير الاحتمالية:** لا تعتمد طريقة اختيار العينة على الأسلوب العشوائي، نظرا لأن مجال تطبيقاتها يعتمد على اختيار شريحة أو قطاع معين بطريقة مقصودة، ومن هذه العينات ما يلي:

- **العينة الغرضية:** وهي أكثر العينات غير العشوائية شيوعا، حيث إنها تعتمد بصورة قاصرة على ما يتلاءم مع الباحث، فالباحث ببساطة يضمن في عينته

معظم الحالات الملائمة، ويستثنى الحالات غير الملائمة فهذه الطريقة تخص الظواهر التي تشتد فيها درجة تباين متغيراتها، مما يجعل الباحث مضطرا إلى تحديد المتغيرات الخاصة بالبيانات المراد جمعها، والتي يرى من وجهة نظره أنها تصلح للدراسة، فمثلا الباحث الذي يدرس مستوى المعيشة في الريف، لا يمكنه الاعتماد على الاختيار العشوائي لعينة من القرى، بل يعتمد على تحديد عدد من القرى تمثل في نظره مجتمع القرى وتكون محلا للدراسة؛

- **العينة بالحصة:** هي نمط آخر من العينة غير العشوائية، وفي هذه المعاينة تمثل خصائص مختلفة مثل: السن أو النوع أو الطبقة الاجتماعية أو الخصائص العرقية في العينة بالنسب التي تشغلها في المجتمع، على سبيل المثال افترض أنك تحاول اختيار عينة بالحصة من الطلاب الملتحقين بالجامعة حيث إن 42 منهم إناث 58 منهم ذكور، فباستخدام هذه الطريقة سيكون 42% من العينة إناث، 58% منهم ذكور، والعينة الإحصائية أي المختارة بطريقة الحصة تزداد فيها درجة حرية الباحث في اختيار مفردات العينة تسهيلا لمهمته وتقليلا للتكاليف، ومع ذلك يلتزم الباحث في اختياره هذا ببعض الحدود أهمها عدد ونوع مفردات العينة؛
- **العينة العرضية:** وتمثل أبسط أساليب اختيار العينة، ولا يراعي فيها أي نظام، بل يتم اختيار عيناتها بطريقة عرضية ومرتجلة، وفيها يقوم الباحث باختيار مفردات عينته ممن يصادفه من أفراد المجتمع، ويزداد احتمال التحيز في اختيار هذه العينة، وعدم تمثيلها للمجتمع الأصلي تمثيلا صادقا، خاصة إذا ما قورنت نتائجها بالنتائج التي تكشف عنها دراسة عينات تم اختيار ها بالأسلوب الاحتمالي.

2- مؤشرات الاتجاه المركزي:[8] وهي مؤشرات تهدف إلى تجميع سلسلة إحصائية كاملة من خلال إبراز موقع مركزي لقيمة الخاصية المدروسة، بحيث نستخدم بشكل عام القيمة المتوسطة، وأنواع مختلفة من المتوسطات.

- **المعلمة:** ذكر الإحصائي Yule الخصائص المرغوبة لمؤشرات السلسلة الإحصائية (مؤشرات النزعة المركزية، والتشتت، وغيرها). مع مراعاة أن يمتاز المؤشر الجيد بــــ:

– أن يتم تعريفه بشكل موضوعي ومستقل عن المراقب (الملاحظ)؛

– أن يعتمد على جميع الملاحظات؛

– أن يكون ذو أهمية ملموسة؛

– أن يكون سهل الحساب؛

– أن يكون قليل الحساسية أو التأثر بتقلبات العينات؛

– يفسح المجال بسهولة للحساب الجبري.

✓ **المتوسط الحسابي** ‾ **:** القيمة المتوسطة للسلسلة الإحصائية هي مجموع جميع الملاحظات مقسومًا على إجمالي عدد الملاحظات، وبمعنى آخر فإن متوسط قيمة X لسلسلة من الملاحظات: x_1, x_2, x_3,.. x_nعبارة عن: $\mathbf{\overline{X}} = \frac{(x1 + x2 + \ldots + xn)}{n}$

- **الاحصائية:**

✓ **المتوسط $\mathbf{\overline{X}}$ للعينة:**

نعتبر المتوسط $\mathbf{\overline{X}} = \frac{(x1 + x2 + \ldots + xn)}{n}$ بحيث:

$$E(\overline{X}) = m, VAR(\overline{X}) = \sigma^2/n, \sigma(\overline{X}) = \sigma/n$$

---

[8] - pierre-Charles Pupion, Statistiques pour la gestion, 2e édition, Dunod, Paris, 2008, P 20.

وإذا أدت الصدفة إلى نتيجة غير متوقعة، فإن ملاحظة عدة نتائج من نفس التجربة العشوائية ستجعل من الممكن اختيار النموذج العشوائي بعقلانية للاحتفاظ به. ومن خلال رمي حجر النرد عدة مرات متتالية وملاحظة النتيجة في نهاية كل رمية، نحصل على سلسلة من الأعداد الصحيحة بين الواحد والستة، حيث يتم الحصول عليها تحت نفس الظروف وبشكل مستقل، والتي يمكن أن نطلق عليها عينة من القانون المرتبط برمي النرد، وكما نعلم فهو القانون الموحد على المجموعة {1، 2، 3، 4، 5، 6}. أما إذا قمنا بحساب التكرار الملاحظ (النسبة المئوية) لكل من هذه الأرقام لعدد كبير من الرميات سوف نحصل على توزيع تجريبي للقيم قريبة من بعضها البعض وقريبة من النسبة 16.7٪،[9] ويوجهنا ذلك إلى القانون الموحد الذي يخصص نفس الاحتمال $\frac{1}{6}$ للأرقام 1 و2 و3 و4 و5 و6. نطلق على عينة حجمها n من قانون الاحتمال P، والمتتابعة $(X_1,X_2...,X_n)$ من المتغيرات العشوائية المستقلة وقانون الاحتمال نفسه P، ويُطلق على هذا الإنتاج اسم العينة، ويمكننا تحديدها في الحالة الأولى $(X_1,X_2...,X_n)$ في كونها عينة عشوائية.

- ✓ **المتوسط التجريبي:** متوسط العينة العشوائية هو متوسط القانون التجريبي، أي توقع قانون موحد منفصل يعين نفس الوزن $\frac{1}{n}$ لكل من القيم X_i ويرمز له:[10]

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

يعرف هذا المتغير العشوائي بأنه توقع ويكتب بالشكل التالي:

$$E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = E(x) = m$$

وبالنسبة للتباين يحسب كالتالي:

$$VAR(\bar{X}_n) = \frac{VAR(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

[9] - jean-pierre lecoutre, statistique et probabilités, 7e édition, Dunod, Paris, 2019 p 145.

[10] - jean-pierre lecoutre, statistique et probabilités, Op.cit, p-p 146-147.
p 145.

3-توزيع المعاينة الحسابي:

يسمى التوزيع الاحتمالي للإحصائية بتوزيع المعاينة لتلك الاحصائية، فالتوزيع الاحتمالي لـــ:[11] $\bar{X}$ يسمى بتوزيع المعاينة للوسط الحسابي، ويسمى الانحراف المعياري (القياسي) للوسط الحسابي بالخطأ المعياري (القياسي) لتوزيع المعاينة، وبفرض أنه لدينا مجتمع نهتم بدراسة أحد متغيراته والذي نرمز له بالرمزX،[12] ولتكن قيم هذا المتغير والتي تمثل مفردات المجتمع هي .....X_1,X_2,X_3 وبافتراض أننا اخترنا عينة حجمها n من هذا المجتمع ثم حسبنا وسطها الحسابي $\bar{x}_1$ ثم اخترنا عينة ثانية لها نفس الحجم وحسبنا وسطها الحسابي فكان$\bar{x}_2$ وقمنا بتكرار اختيار العينات بنفس الحجم وتعيين الوسط الحسابي لكل عينة فسوف نحصل على مجتمع جديد يسمى مجتمع المتوسطات للعينات التي حجمها n والتي يمكن اختيارها من المجتمع الأصلي وستكون مفردات هذا المجتمع هي.....$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ له توزيعه الاحتمالي من حيث متوسط وانحراف معياري خاص به، ويرمز لمتوسط مجتمع المتوسطات بالرمز: $\mu\bar{x}$ بينما يرمز لانحرافه المعياري بالرمز: $\delta\bar{x}$ ويعطى كالتالي:[13]

$$\mu_x=\mu\bar{x}$$

$$\delta\bar{x}=\begin{cases} \frac{\delta x}{\sqrt{n}} & \text{حالة السحب بارجاع} \quad \text{إذا كان المجتمع غير محدود} \\ \frac{\delta x}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} & \text{حالة السحب من دون ارجاع} \quad \text{إذا كان المجتمع محدود} \end{cases}$$

---

[11]- خاشع محمود الراوي، المدخل إلى الاحصاء، مرجع سبق ذكره، ص 232.

[12]- مشعان بن سهو العتيبي، أحمد عبادة العربي، ريهام عاصم غنيم، التطبيقات الإحصائية في العلوم الإنسانية، مرجع سبق ذكره، ص-ص 40-41.

[13]- عبد الرحمن بن إبراهيم محمد الخضيري، عبد الفتاح مصطفى محمد السيد، مبادئ الإحصاء والاحتمالات وتطبيقاتها باستخدام SPSS، جامعة سلمان بن عبد العزيز، 2013، ص-ص 395-400.

وبذلك فإن:

$$Z=\frac{\bar{x}-\mu x}{\delta\bar{x}} \sim N(0,1)$$

ملاحظة 01: إذا كان حجم المجتمع N ونريد اختيار عينة حجمها n من هذا المجتمع فإن عدد العينات الممكن اختيارها إما:

- N^n في حالة السحب بإرجاع
- C_N^n في حالة السحب من دون إرجاع

مثال: إذا كانت 1،2،3،4،5،6 عناصر لمجتمع معين

المطلوب: تعيين قيمة كل من μ, δ_x لهذا المجتمع ثم إيجاد التوزيع العيني لــ: $\bar{x}$ للعينات ذات الحجم 2 في حالة السحب من دون إرجاع ؟

الحل:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} Xi}{N} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

$$\delta=\frac{\sum_{i=1}^{N}(Xi-\mu)2}{N}$$

X	X-µ	$(X-\mu)^2$
1	−2.5	6.25
2	−1.5	2.25
3	−0.5	0.25
4	0.5	0.25
5	1.5	2.25
6	2.5	6.25
$\sum X = 21$	0	$\sum(X-\mu)^2$=17.5

$\delta = \sqrt{\frac{17.5}{6}}$=2.9167

1/ حالة السحب من دون ارجاع:

عدد العينات الممكن تشكيلها: $C_N^n = C_6^2 = 15$

العينات	الوسط الحسابي للعينات $\bar{x}$
(1،2)، (1،3)، (1،4)، (1،5)، (1،6)، (2،3)، (2،4)، (2،5)، (2،6)، (3،4)، (3،5)، (3،6)، (4،5)، (4،6)، (6،5)	1.5، 2، 2.5، 3، 3.5، 2.5، 3، 3.5، 4، 3.5، 4، 4.5، 4.5، 5، 5.5

حساب الوسط الحسابي لمجتمع المتوسطات:

الوسط الحسابي للعينات $\bar{x}$	عدد العينات	Pi $\bar{x}$
1.5	1	$\frac{1.5}{15}$
2	1	$\frac{2}{15}$
2.5	2	$\frac{5}{15}$
3	2	$\frac{6}{15}$
3.5	3	$\frac{10.5}{15}$
4	2	$\frac{8}{15}$
4.5	2	$\frac{9}{15}$
5	1	$\frac{5}{15}$
5.5	1	$\frac{5.5}{15}$
المجموع	15	$\frac{52.5}{15}$

$\mu\bar{x} = E(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{15} Pi\ \bar{x} = \frac{52.5}{15} = 3.5 = \mu$

$\delta\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{15} Pi\ (\bar{x} - \mu\bar{x})^2 = \frac{17.5}{15} = 1.167$

الطريقة 2: حالة السحب من دون ارجاع

$\frac{\delta 2}{n}\frac{(N-n)}{(N-1)} = \frac{2.917}{2}\frac{6-2}{6-1} = 1.167$

$Pi(\bar{x}-\mu\bar{x})^2$	عدد العينات	الوسط الحسابي للعينات $\bar{x}$
$\frac{4}{15}$	1	1.5
$\frac{2.25}{15}$	1	2
$\frac{2}{15}$	2	2.5
$\frac{0.5}{15}$	2	3
$\frac{0}{15}$	3	3.5
$\frac{0.5}{15}$	2	4
$\frac{2}{15}$	2	4.5
$\frac{2.25}{15}$	1	5
$\frac{4}{15}$	1	5.5
$\frac{17.5}{15}$	15	المجموع

ملاحظة:

يمكن حساب $\delta\bar{x}^2$ بطريقتين:

الطريقة 1: $\delta\bar{x}^2 = E(\bar{x}^2) - [E(\bar{x})]^2$

حيث:

$E(\bar{x}) = \sum Pi\bar{x} = E(x)$

$E(\bar{x}^2) = \sum Pi\bar{x}^2$

الطريقة 2: $\sum_{i=}^{k}(\bar{x} - \mu\,\bar{x})^2$ / عدد العينات $\quad \delta\bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - \mu\bar{x})}{\text{عدد العينات}}$

4- نظرية النهاية المركزية:

كما أشرنا سابقا فإنه إذا كان لدينا مجتمع بمتوسط (μ) وتباين (δ^2)، واخترنا منه مجموعة عينات حجمها $(n\geq30)$ كبيرة فإن الوسط الحسابي $(\bar{\mathbf{X}})$ لهذه العينات يتبع بالتقريب توزيع طبيعي وسطه (μ_{-}) وتباينه $(\delta_{\bar{X}}{}^2)$، بمعنى أنه إذا كان:

$\bar{X} \sim N(\mu_{\bar{X}}, \delta_{\bar{X}})$ فإنه في حالة ما إذا كان: $n\to +\infty$ فإن المتغير العشوائي المعياري:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\delta_{\bar{X}}} \sim N(0,1)$$

مثال: إذا كان متوسط الاستهلاك الشهري للأبقار في إحدى المزارع يساوي 600 ون، والانحراف المعياري يساوي 10 ون. فإذا أختيرت عينة عشوائية حجمها 100 بقرة من هذه المزرعة.

المطلوب: أوجد احتمال أن يتراوح متوسط استهلاك الأبقار في المزرعة بين: 595 ون و 615 ون؟

الحل:

تعريف المتغير العشوائي X: الاستهلاك الشهري للأبقار في المزرعة

$\mu_X = \mu_{\bar{X}} = 600, \qquad \bar{X} \sim N(\mu_{\bar{X}}, \delta_{\bar{X}})$

$n=100,\ \mu=600,\ \delta=10,\ \mu_{\bar{X}} = \frac{\delta x}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} = \frac{100}{\sqrt{100}} = 10$

$p(595<\bar{\mathbf{X}}<615) = p\left(\frac{595-600}{10} < Z < \frac{615-600}{10}\right) = p(-0.5<Z<1.5) = \varphi(1.5) + \varphi(0.5) = 0.4332 + 0.1915 = 0.6247$

5-توزيع المعاينة للفروق بين الأوساط الحسابية:

إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين وسطهما الحسابيين على التوالي: μ_1, μ_2، وتباينهما على التوالي: δ_1^2, δ_2^2 ، وبفرض أن: $\bar{X}_1$ يمثل الوسط الحسابي لمجتمع الأوساط الحسابية للعينات العشوائية التي حجمها n_1 والمسحوبة من المجتمع الأول، في حين أن: $\bar{X}_2$ يمثل الوسط الحسابي لمجتمع الأوساط الحسابية للعينات العشوائية التي حجمها n_2 والمسحوبة من المجتمع الثاني، فإن توزيع الفروق بين الوسطين: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ للعينتين المستقلتين في الأوساط الحسابية يمثل توزيع المعاينة للإحصائية $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ بحيث:

$$Z = \frac{(\bar{X}1 - \bar{X}2) - (\mu 1 - \mu 2)}{\sqrt{\frac{\delta 12}{n1} + \frac{\delta 22}{n2}}}$$

$\mu_1 - \mu_2 = 0$

$$\delta(\bar{X}1 - \bar{X}2) = \sqrt{\frac{\delta 12}{n1} + \frac{\delta 22}{n2}}$$

تطبيق: ليكن لدينا مجتمعان احصائيان بحيث المجتمع الأول يتألف من العناصر التالية: $\{3,4,5\}$، والمجتمع الثاني عناصره التالية: $\{0,3\}$، ولنفرض أننا سحبنا بإرجاع جميع العينات الممكنة ذات الحجم $n_1 = 2$ من المجتمع الأول، بينما سحبنا جميع العينات الممكنة ذات الحجم $n_2 = 3$ من المجتمع الثاني.

المطلوب: أحسب توزيع المعاينة للفرق بين الوسطين الحسابيين ($\overline{X}_1 - \overline{X}_2$) في حالة السحب بإرجاع؟

الحل:

- **حساب الوسط الحسابي والتباين للمجتمع الأول ($N_1=3$):**

$X_1(\Omega)=\{3,4,5\}$, $\mu_1=\frac{3+4+5}{3}=\frac{12}{3}=4$

$\delta_1^2=\frac{\sum_{i=1}^{3}(Xi-\mu 1)2}{N1}=\frac{(3-4)2+(4-4)2+(5-4)2}{3}=\frac{2}{3}$

- **حساب الوسط الحسابي والتباين للمجتمع الثاني ($N_2=2$):**

$X_2(\Omega)=\{0,3\}$, $\mu_1=\frac{0+3}{2}=\frac{3}{2}$

$\delta_2^2=\frac{\sum_{i=1}^{2}(Xi-\mu 2)2}{N2}=\frac{\left(0-\frac{3}{2}\right)2+\left(3-\frac{3}{2}\right)2}{2}=\frac{9}{4}$

جدول رقم 01: الأوساط الحسابية للعينات العشوائية بطريقة الإرجاع من مجتمعين محدودين:

$r= 3^2= 9$

مثال 1: $\frac{0+0+0}{3} = 0$

$\bar{Y}2$	العينات	$\bar{Y}1$	العينات
المجتمع الثاني		المجتمع الأول	
0	(0،0،0)	3	(3،3)
1	(3،0،0)	3.5	(4،3)
1	(0،3،0)	4	(5،3)
1	(0،0،3)	3.5	(3،4)
2	(3،3،0)	4	(4،4)
2	(3،0،3)	4.5	(5،4)
2	(0،3،3)	4	(3،5)
3	(3،3،3)	4.5	(4،5)
/	/	5	(5،5)

جدول رقم 02: الفروق بين $(\bar{X}_1 - \overline{}_2)$:

$\bar{X}_1$ $\bar{X}_2$	3	3.5	4	3.5	4	4.5	4	4.5	5
0	(3,0)	(3.5,0)	.....	.....	.....	.....	.....	.....	(5,0)
1	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	(5,1)
1	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	(5,1)
1	(3,1)	(3.5,1)	.....	.....	.....	.....	.....	.....	(5,1)
2	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	(5,2)
2	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	(5,2)
2	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	(5,2)
3	(3,3)	(3.5,3)	.....	.....	.....	.....	.....	.....	(5,3)

جدول رقم 03: التوزيع التكراري للفرق بين $(X_1 - \overline{}_2)$:

$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$	**F**
0	1
0.5	2
1	6
1.5	8
2	13
2.5	12
3	13
3.5	8
4	6
4.5	2
5	1
$\sum$	72

- حساب المتوسط الحسابي لتوزيع المعاينة للفرق بين $(\bar{X}_1 - \overline{}_2)$:

$$\mu\ (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \frac{\sum fi\ (\bar{X}1 - \bar{X}2)}{\sum fi} =$$

$$\frac{(0.1)+(0.5.2)+(1.6)+(1.5.8)+(2.13)+(2.5.12)+(3.13)+(3.5.8)+(4.6)+(4.5.2)+(5.1)}{72} = 2.5$$

$\mu_1 - \mu_2 = 4 - \frac{3}{2} = 2.5$

- حساب تباين توزيع المعاينة للفرق بين $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$:

$$\delta^2 (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \delta_1{}^2 / \delta_2{}^2 = \frac{\frac{2}{3}}{2} + \frac{\frac{9}{4}}{3} = \frac{13}{12}$$

ملاحظة:

توزيع المعاينة للفرق بين الوسطين الحسابيين $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ يقترب من التوزيع الطبيعي بوسط حسابي قدره:

$$\boldsymbol{\mu (\overline{X}_2 - \overline{X}_1) = \mu_1 - \mu_2}$$

وانحراف معياري (قياسي) قدره:

$$\boldsymbol{\delta (\overline{X}_2 - \overline{X}_1) = \sqrt{\frac{\delta 12}{n1} + \frac{\delta 22}{n2}}}$$

وعليه فإن:

$$\boldsymbol{Z = \frac{(\overline{X}2 - \overline{X}1) - (\mu 1 - \mu 2)}{\sqrt{\frac{\delta 12}{n1} + \frac{\delta 22}{n2}}}}$$

6-المتغير الاحصائي (S^2) تباين العينة:

يعرف بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (xi - \overline{X})2}{n}}$$

- **حالة السحب بإرجاع (المجتمع غير منته):**

$$E(s^2) = \delta x^2 - \frac{\delta x2}{n} = \delta x^2\left(\frac{n-1}{n}\right) = \delta x^2 - \delta\overline{x}^2$$

وهذا يعني أن: **(S^2)** هو مقدر جيد لـــ: **(δx^2)** على الرغم من أن:

$$E(s^2) = \delta x^2\left(\frac{n-1}{n}\right) \neq \delta x^2$$

ولكن عندما تكون (n كبيرة جدا: $n\to\infty$) فإن:

$E(s^2) = \delta x^2$ مع ارتكاب خطأ يتناسب عكسيا مع n

- **حالة السحب من دون إرجاع (المجتمع منته):**

$$E(s^2) = \delta x^2 - \frac{\delta x2}{n}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

5-1 تباين العينة المعدل:

بالتعويض (حالة السحب بإرجاع):

$$\hat{S}^2 = \frac{n}{n+1}S^2 = \frac{n}{n+1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(xi-\overline{X})2}{n}\right) = \left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\delta x^2 = \delta x^2$$

أي أن: $E(\hat{S}^2) = \delta x^2$ وهو مقدر أجود من s^2

كما سنتطرق إليه في دراسة المحور الثاني (نظرية التقدير)

ملاحظة:

حالة السحب بإرجاع:

$$Var(S^2) = \delta_{S2} = E[(S^2)^2] - E[(S^2)]^2 = E(S^4) - \left[\left(\frac{n-1}{n}\right)\delta x^2\right]^2 = E(S^4) - \frac{(n-1)2\delta x4}{n2}$$

حالة السحب من دون إرجاع:

$$Var(S^2) = E(S^4) - \left[\delta x^2 - \frac{\delta x2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\right]^2$$

مثال: يتكون مجتمع من العناصر التالية: $X(\Omega)=\{2,3,6,8,11\}$

لنعتبر كل العينات الممكنة التي يتكون حجمها من عددين والتي يمكن سحبها من دون إرجاع.

المطلوب: أحسب الوسط الحسابي لتوزيع المعاينة للتباينات؟

الحل: عدد العينات الممكنة $r= C_5^2=10$

$r=\{(2,3),(2,6),(2,8),(2,11),(3,6),(3,8),(3,11),(6,8),(6,11),(8,11)\}$

$$\mu= \frac{2+3+6+8+11}{5} = \frac{30}{5}= 6$$

$$\delta x=\sqrt{\frac{(2-6)2+(3-6)2+(6-6)2+(8-6)2+(11-6)2}{6}} = 3{,}29$$

$$\mu\overline{X}= \frac{\sum_{i=1}^{10}\overline{X}i}{C_5^2}= \frac{2.5+4+5+6.5+4.5+5.5+7+7+8.5+9.5}{10}= 6$$

الطريقة 01:

$$\delta\overline{X}=\sqrt{\frac{(2.5-6)2+(4-6)2+(5-6)2+(6.5-6)2+(4.5-6)2+(5.5-6)2+(7-6)2+(7-6)2+(8.5-6)2+(9.5-6)2}{6}}=\sqrt{4.05}$$

$= 2.01$

الطريقة 02:

$$\delta\overline{X}= \sqrt{\frac{\delta x2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \sqrt{\frac{10.8}{2}\left(\frac{5-2}{5-1}\right)} = \sqrt{4.05} = 2.01$$

تباينات المعاينة المقابلة لــ:(10) عينات

الطريقة 01:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(xi-\overline{X})2}{n}$$

مثال 1:

$$\mu\, S^2 = E(S^2) = \frac{0.25+4+9+20.25+2.25+6.25+16+1+6.25+2.25}{10} = \frac{67.5}{10} = 6.75$$

$$S_1{}^2 = \frac{(x1-\overline{X}1)2+(x2-\overline{X}1)2}{n} = \frac{(2-2.5)2+(x2-\overline{X}1)2}{n} = \frac{(-0.5)2+(0.5)2}{2} = 0.25$$

العينات	$\overline{X} = Xi$	S^2=Si^2
(2,3)	2.5	0.25
(2,6)	4	4
(2,8)	5	9
(2,11)	6.5	20.25
(3,6)	4.5	2.25
(3,8)	5.5	6.25
(3,11)	7	16
(6,8)	7	1
(6,11)	8.5	6.25
(8,11)	9.5	2.25
		67.5

الطريقة 02:

بما أن السحب من دون إرجاع فإن:

$$E(S^2) = \left(\frac{n-1}{n}\right)\delta x^2 = \left(\frac{2-1}{2}\right)(13.5) = \left(\frac{13.5}{2}\right) = 6.75$$

7-التوزيع الاحتمالي للنسبة في العينة:

بفرض أنه لدينا مجتمع ما وأن بعض مفرداته تتوفر فيها صفة معينة وأن نسبة هذه المفردات هي r (كأن تكون نسبة الأفراد الأميين في إحدى المدن)، وعند أخذ عينة حجمها (n) من هذا المجتمع من بينها x مفردة تتوفر فيها الصفة فإن النسبة: $r=\frac{x}{n}$ تعبر عن نسبة مفردات العينة التي تتوفر فيها الصفة المعينة، فإذا أخذنا كل العينات الممكنة ومتساوية الحجم n من المجتمع ذو الحجم N، وبتعيين نسبة تلك الصفة في كل عينة ولتكن .... $r_1, r_2, r_3,$ فإن هذه النسبة تختلف من عينة لأخرى فيصبح لدينا متغير عشوائي R للنسبة يأخذ القيم المختلفة للعينات .... $r_1, r_2, r_3,$ بحيث:

$$\mu_r = E(R)= p$$

$$\delta_r^2= var(R)= \begin{cases} \frac{p(1-p)}{n} & \text{(المجتمع غير محدود)} \\ \frac{p(1-p)}{n}\frac{(N-n)}{N-1} & \text{(المجتمع محدود)} \end{cases}$$

وعليه فإن:

$$\delta_x= \begin{cases} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} & \text{(المجتمع غير محدود)} \\ \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}\frac{(N-n)}{N-1}} & \text{(المجتمع محدود)} \end{cases}$$

ملاحظة: إذا كانت P نسبة وجود ظاهرة معينة في مجتمع ما و أختير من هذا المجتمع عينات كبيرة حجمها (n)، وكانت (r) تمثل نسبة وجود هذه الظاهرة في العينات فإن r تتبع تقريبا التوزيع الطبيعي بمتوسط (μ_r) وانحراف (δ_r)

$$r \sim N(\mu_r, \delta_r)$$

وبالتالي فإن: $Z = \frac{r-\mu r}{\delta r} \sim N(0, 1)$

مثال: إذا كانت نسبة الوحدات المعيبة لإنتاج إحدى المؤسسات 0,12، واشترى شخص معين 100 وحدة من هذه المؤسسة، فما احتمال أن يجد من بينها 16 وحدة معيبة على الأكثر؟

الحل:

$X=16,\ n=100,\ p=0.12$

$r=\frac{x}{n}=\frac{16}{100}=0.16$

$p(x\leq 16)=p(r\leq 0.16)$

بما أن $n=100>30$ فإن العينة كبيرة وبالتالي فإن:

$r\sim N(\mu r, \delta r)$

$\mu r=p=0.12$

$\delta r=\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}=\sqrt{\frac{0.12(0.88)}{100}}=\sqrt{0.001056}=0.03249$

$p(r\leq 0.16)=p(z\leq\frac{0.16-0.12}{0.03249})=p(z\leq\frac{0.04}{0.03249})=p(z\leq 1.23)=p(-\infty<z\leq\frac{0.16-0.12}{0.03249})=$

باستخدام جدول التوزيع المعياري رقم 2 نجد:

$\varphi(1.23)+\varphi(\infty)=0.3907+0.5=0.8907$