السلسلة 02 ، نظرية التقدير

حل التمرين 01: بما أن:

$$f(x,\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{x_i!}$$

$$x=(x_1,x_2,x_3,\dots x_n).$$

فإن:

① دالة المعقولية العظمى

$$L(x,\lambda)=\prod_{i=1}^{n} f(x,\lambda)$$

$$=\frac{e^{-n\lambda}\cdot\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$$

$$② \quad \ln L(x,\lambda)=\ln\left(\frac{e^{-n\lambda}\cdot\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}\right).$$

$$=-n\lambda+\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\lambda-\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i!)}_{\text{ثابت}}.$$

$$③ \quad \frac{\partial\ln L(x,\lambda)}{\partial\lambda}=-n+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}$$

$$④ \quad \frac{\partial\ln L(x,\lambda)}{\partial\lambda}=0 \iff -n+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}=0.$$

$$\iff \lambda=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\overline{X}$$

حل التمرين 02:

1/ إيجاد مقدر المعقولية العظمى للمعلمة (θ):

$$f(x,\theta)=\frac{1}{1+\theta}\,e^{\frac{-x}{1+\theta}}\quad , x>0$$

① $$L(x,\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x,\theta)$$

$$=\left(\frac{1}{1+\theta}\right)\left(\frac{1}{1+\theta}\right)\cdots\left(\frac{1}{1+\theta}\right)$$

$$\cdot\left(e^{-\frac{x}{1+\theta}}\right)\left(e^{\frac{-x}{1+\theta}}\right)\cdots\cdots\left(e^{-\frac{x}{1+\theta}}\right).$$

$$=(1+\theta)^{-n}\cdot e\left(-\frac{1}{1+\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

② $$\ln L(x,\theta)=\ln\left[(1+\theta)^{-n}\cdot e^{\frac{-1}{1+\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i}\right].$$

$$=-n\ln(1+\theta)-\frac{1}{1+\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

③ $$\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta}=-\frac{n}{1+\theta}+\frac{1}{(1+\theta)^2}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$=\frac{-n(1+\theta)+\sum_{i=1}^{n}x_i}{(1+\theta)^2}$$

$$=\frac{-n(1+\theta)+\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)\cdot n}{(1+\theta)^2}.$$

$$=\frac{-n(1+\theta)+n\bar{X}}{(1+\theta)^2}=\frac{+n}{(1+\theta)^2}\left[\bar{X}-(\right.$$

②

$$④ \ \frac{n}{(1+\theta)^2} \cdot \left[\bar{x} - (1+\theta) \right] = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{n}{(1+\theta)^2} = 0 \sim ① \\ \bar{x} - (1+\theta) = 0 \sim ② \end{cases}$$

$$\boxed{n = 0} \qquad \Leftrightarrow ①$$

$$\bar{x} - (1+\theta) = 0 \qquad \Leftrightarrow ②$$

$$\bar{x} = 1+\theta \qquad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\theta = \bar{x} - 1} \qquad \Leftrightarrow$$

حل التمرين 03:

1- حساب التقدير النقطي والتقدير المجالي للبطاريات الضعيفة وبمستوى ثقة 95%:

التقدير النقطي للبطاريات الضعيفة هو $\hat{P} = \frac{160}{500} = \boxed{0,32}$ ومنه نجد:

$\hat{q} = 1 - \hat{P}$ أي: $\hat{q} = 1 - 0,32 = \boxed{0,68}$

($\hat{q}$ يمثل التقدير النقطي للبطاريات الجيدة غير الضعيفة).

$\boxed{\alpha} = 1 - 0,95 = \boxed{0,05}$ باستعمال Z (2) نجد $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0,025} = \boxed{1,96}$

بتعويض المعلومات في متراجحة الثقة الخاصة بالإجمال نجد:

$$\left(0,32 - 1,96\sqrt{\frac{0,32\cdot(0,68)}{500}} < P < 0,32 + 1,96\sqrt{\frac{0,32\cdot(0,68)}{500}}\right)$$

$$0,28 < P < 0,36$$

حل التمرين 04:

1- إيجاد تقدير نقطة لمتوسط أجر العمال في المؤسسة:

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{50} f_i \bar{x}_i = \frac{125(6)}{50} + \frac{175(10)}{50} + \frac{225(12)}{50} + \frac{275(8)}{50} + \frac{325(7)}{50} + \frac{375(5)}{50} = \boxed{242}$$

2- إيجاد تقدير فترة (99%) لمتوسط أجر العمال في المؤسسة:

x_i	f_i	$\bar{x}_i$	$f_i \bar{x}_i$	$\bar{x}_i^2$	$f_i \bar{x}_i^2$
[100-150[	$\frac{5}{50}$	125	$\frac{625}{50}$	15625	$\frac{78125}{50}$
[150-200[	$\frac{10}{50}$	175	$\frac{1750}{50}$	30625	$\frac{306250}{50}$
[200-250[	$\frac{15}{50}$	225	$\frac{3375}{50}$	50625	$\frac{759375}{50}$
[250-300[	$\frac{8}{50}$	275	$\frac{2200}{50}$	75625	$\frac{605000}{50}$
[300-350[	$\frac{7}{50}$	325	$\frac{2275}{50}$	105625	$\frac{739375}{50}$
[350-400[	$\frac{5}{50}$	375	$\frac{1875}{50}$	140625	$\frac{703125}{50}$
Σ			$\frac{12100}{50}$		$\frac{3191250}{50}$

$$Z_{0,005} = \boxed{2,575}$$

$$E(\bar{x}^2) = \frac{3191250}{50} = \boxed{63825}$$

$$S_x = \sqrt{E(\bar{x}^2) - [E(\bar{x})]^2} = \sqrt{63825 - (242)^2} = \sqrt{5261}$$

$$S_x = \boxed{72,53}$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \frac{72,53}{\sqrt{50}}$$

$$\mu \in [\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} S_{\bar{x}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} S_{\bar{x}}] \Rightarrow \cancel{\mu \in [242 - \frac{72,53}{\sqrt{50}}(2,575),}$$

$$\mu \in [242 - 2,575\left(\frac{72,53}{\sqrt{50}}\right), 242 + 2,575\left(\frac{72,53}{\sqrt{50}}\right)]$$

$$\mu \in [215,58, 268,41]$$

ح/ التمرين: بما أن التوزيع قريب من الاعتدال، وغير معلوم الانحراف، والعينة صغيرة فإن مقدر فترة الثقة $(1-\alpha)$ لمتوسط المجتمع هو:

$$\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} S_{\bar{x}}$$

x_i	$x_i - \bar{x}_i$	$(x_i - \bar{x})^2$
10,5	-1,9	3,61
16,2	3,8	14,44
11,4	-1	1
14,3	1,9	3,61
9,6	-2,8	7,84
Σ	0	30,5

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \bar{x}_i}{n} = \frac{10,5+16,2+11,4+14,3+9,6}{5}$$

$$= \frac{62}{5} = \boxed{12,4}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{30,5}{5}}$$

$$= \sqrt{6,1} = 2,46 \approx \boxed{2,47}$$

$$\alpha = 0,05, \quad V = 5-1 = 4, \quad t_{0,025} = 2,776.$$

بمقاطعة 0,025 مع 4 في جدول توزيع Student نجد :

$$\boxed{t_{0,025} = 2,776}$$

$$\mu \in [\bar{x} - t_{0,025} S_{\bar{x}}, \ \bar{x} + t_{0,025} S_{\bar{x}}]$$

$$\mu \in \left[12,4 - 2,776 \left(\frac{2,47}{\sqrt{5}}\right), 12,4 + 2,776 \left(\frac{2,47}{\sqrt{5}}\right)\right].$$

ومنه :

$$\mu \in [9,33 , 15,46]$$