ملخصات شوم

نظريـــات ومسائـــل

فى

الإحصـــاء

تأليـــف

دكتور/ موراى ر. شبيجل
الأستاذ السابق ورئيس قسم الرياضيات
معهد رنسلير للفنون التطبيقية المتعددة ـ كونكتيكوت

ترجمــــة

دكتور/ شعبان عبد الحميد شعبان
قسم الإحصاء الرياضى ـ معهد الدراسات والبحوث الإحصائية
جامعة القاهرة ـ جمهورية مصر العربية

مراجعــــة

أستاذ دكتور/ أحمد حسن الموازينى
وكيل معهد الدراسات والبحوث الإحصائية
جامعة القاهرة ـ جمهورية مصر العربية

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م.
مصر

مقدمة

يلعب علم الإحصاء أو ما يسمى أحياناً بالأساليب الإحصائية دوراً متزايداً فى جميع نواحى النشاط البشرى تقريباً . كبداية إذا أخذنا دنيا الأعمال فقط وحددنا أوجهها فإننا نجد أن أثر الإحصاء انتشر الآن إلى الزراعة والأحياء ، إدارة الأعمال ، الكيمياء ، الاتصالات ، الاقتصاد ، التربية ، الالكترونيات ، الطب ، الفيزياء ، العلوم السياسية ، علم النفس ، علم الاجتماع وعديد من المجالات الأخرى فى العلوم والهندسة .

والهدف من هذا الكتاب هو تقديم الأسس العامة للإحصاء والتى تفيد كل فرد بصرف النظر عن مجال تخصصه . وقد روعى فى تأليف الكتاب أنه يمكن استخدامه ككتاب مساعد لجميع الكتب المتداولة فى الإحصاء . « أو كنهج مقرر فى الإحصاء » وهو كذلك ذو قيمة كمرجع للباحثين فى بداية استخدامهم للاحصاء فى مشاكل البحوث الخاصة بهم .

يبدأ كل فصل بعرض واضح للتعاريف والنظريات والأسس وكذلك توضيح الموضوعات الأخرى المتعلقة بهذا الفصل — يلى ذلك مجموعات متدرجة من المسائل المحلولة ومسائل إضافية وهى فى أغلب الأحيان تستخدم بيانات مأخوذة من مشاكل إحصائية حقيقية . وتساعد المسائل المحلولة فى شرح وتبسيط النظرية والتركيز على النقاط الدقيقة والتى بدون مراعاتها يشعر الطالب أنه على أرض غير صلبة كما تعطى تكرار للمبادىء الأساسية والتى تؤثر تأثيراً حيوياً فى عملية التدريس . وتتضمن المسائل المحلولة عديداً من إثبات الصيغ أما العدد الكبير من المسائل الإضافية بإجاباتها فتساعد على المراجعة الكاملة على الموضوعات الموجودة بكل فصل .

والأساس الرياضى الوحيد المطلوب لفهم الكتاب كله هو الحساب ومبادىء الجبر ويقدم الفصل الأول من الكتاب مراجعة لأهم المفاهيم الرياضية المستخدمة به ويمكن قراءته إما مع بداية المقرر أو الرجوع إليه كلما ظهرت حاجة إلى ذلك خلال الدراسة .

تعالج الأجزاء الأولى من الكتاب تحليل التوزيعات التكرارية وما يرتبط بها من مقاييس النزعة المركزية والتشتت والالتواء والتفرطح . وهذا بالطبع يؤدى إلى مناقشة مبادىء الاحتمالات وتطبيقاتها وهذا يشكل مقدمة لدراسة نظرية المعاينة . وتعالج أولا أساليب نظرية العينات ذات الحجم الكبير والتى تتضمن التوزيع الطبيعى وتطبيقاته فى التقديرات الإحصائية واختبارات الفروض والمعنوية . أما نظرية العينات ذات الحجم الصغير وتتضمن توزيع ت — أستيدنت وتوزيع كا تربيع (كا^{٢}) مع تطبيقاتهما فتعالج فى الفصول التالية . وقد خصص فصل فى توفيق المنحنيات وطريقة المربعات الصغرى والتى تعد ذات أهمية فى حد ذاتها وتؤدى منطقياً إلى دراسة الموضوعات الخاصة بالارتباط والانحدار فى حالة متغيرين . الارتباط الجزئى والمتعدد الذى يتضمن أكثر من متغيرين عولج فى فصل مستقل . وفى ختام الكتاب خصص فصلان لتحليل السلاسل الزمنية والأرقام القياسية على التوالى .

وتعد الموضوعات المتضمنة فى الكتاب أكثر مما يمكن دراسته كمقرر فى المستوى الأول . والدافع لذلك هو إعطاء الكتاب مرونة أكثر فى وضعه كمرجع مفيد وكذلك إثارة الاهتمام فى الموضوعات المدرجة به . عند استخدام الكتاب من الممكن تغيير ترتيب كثير من الفصول المتأخرة أو حذف بعض من هذه الفصول بدون صعوبة . وعلى سبيل المثال فإن الفصول من ١٣ إلى ١٧ يمكن تقديمها مباشرة بعد الفصل الخامس إذا كان من المطلوب دراسة الارتباط والانحدار والسلاسل الزمنية والأرقام القياسية قبل نظرية المعاينة . وكذلك فإن أغلبية الفصل السادس يمكن حذفه إذا كان الدارس لايرغب فى تخصيص وقت كبير لدراسة الاحتمالات . وفى مقرر فى المستوى الأول فإنه يمكن حذف الفصل الخامس عشر . والمبرر للترتيب الحالى للكتاب أن الاتجاه الحديث فى الدراسة هو تدريس نظرية المعاينة والاستدلال الإحصائى فى بداية المقرر بقدر الإمكان .

إنى أشكر عديداً من الوكالات الخاصة والحكومية لتعاونهم فى إمدادى بالبيانات الخاصة بالجداول . وقد ذكر المرجع الخاص بكل جدول فى مكانه المناسب خلال الكتاب وعلى وجه الخصوص فإننى مدين إلى الأستاذ « السير » رونالد أ . فيشر (زميل الجمعية الملكية ، كامبردج) . والدكتور فرانك ييتس (زميل الجمعية الملكية ، روثهامستود) وكذلك إلى السادة أصحاب شركة أوليفروبويد وأدنبرة لسماحهم باستخدام الجدول رقم (٣) من كتابهم « جداول إحصائية للبحوث البيولوجية والزراعية والطبية » .

كذلك أعبر عن شكرى وامتنانى إلى العاملين بدار سشوم للنشر لروحهم الطيبة وتعاونهم لتحقيق الرغبة الشديدة لمحاولة المؤلف الوصول إلى الكمال .

م . ر . شبيجل

المحتويات

صفحة

صفحة

ملحـــق

الفصل الأول

المتغيرات والاشكال البيانية

الاحصاء :

يختص الإحصاء بالطرق العملية لجمع وتنظيم وتلخيص وعرض وتحليل البيانات وكذلك الوصول إلى نتائج مقبولة وقرارات سليمة على ضوء هذا التحليل .

ويستخدم الاصطلاح فى معناه الضيق للتعبير عن البيانات نفسها أو الأرقام المستخرجة من هذه البيانات مثل المتوسطات . وعلى هذا نتحدث عن إحصاءات العمالة وإحصاءات الحوادث وغيرها .

المجتمع والعينة ــ الاحصاء الوصفي والاستقرائي :

عند جميع بيانات تخص خاصية من خصائص مجموعة من الأفراد أو الأشياء ، مثل أطوال أو أوزان طلبه جامعيين أو عدد الوحدات المعيبة أو غير المعيبة فى إنتاج مصنع للمسامير فى يوم معين ، فإنه قد يكون من المستحيل أو من غير العمل ملاحظة المجموعة بأكلها وخاصة إذا كانت كبيرة . وبدلا من اختبار المجموعة كلها ، والتى تسمى بالمجتمع الاحصائى أو المجموعة الكلية فإنه يمكن اختبار جزء صغير من المجموعة يسمى بالعينة .

والمجتمع يمكن أن يكون محدوداً أو غير محدود . وعلى سبيل المثال فإن المجتمع المكون من إنتاج مصنع لأنتاج المسامير فى يوم معين هو مجتمع محدود ، بينما المجتمع المكون من جميع النتائج الممكنة (صورة ، كتابة) فى قذفات متتالية لعملة هو مجتمع غير محدود .

وإذا كانت العينة ممثلة للمجتمع فإنه يمكن الحصول على نتائج مهمة عن المجتمع بتحليل بيانات هذه العينة . وفرع الإحصاء الذى يهتم بالشروط التى يجب توافرها حتى يكون هذا الاستدلال سليما يسمى بالإحصاء الاستقرائى أو الاستدلال الإحصائى .

وبما أن هذا النوع من الاستدلال لايمكن أن يكون مؤكداً فإن لغة الاحتمال تستخدم عند عرض النتائج .

أما فرع الإحصاء الذى يهدف فقط إلى وصف وتحليل مجموعة معينة وذلك دون الوصول إلى نتائج أو استدلال خاصة بالمجموعات الأكبر حجما فإنه يسمى بالاحصاء الوصفى أو الاحصاء الاستنتاجى .

قبل المضى فى استكمال دراسة الاحصاء فإننا سنقوم بمراجعة بعض المفاهيم الرياضية المهمة .

المتغيرات المتقطعة والمتصلة :

المتغير هو رمز مثل X, Y, H, x, B والذى يمكن أن يأخذ أى قيمة سبق تحديدها تسمى مجال هذا المتغير . إذا كان متغير لايأخذ سوى قيمة وحيدة فإنه يسمى ثابتاً .

المتغير الذى يمكن أن يأخذ أى قيمة بين قيمتين معينتين فيسمى متغيراً متصلا ، خلاف ذلك يسمى متغيراً متقطعاً .

مثال ١ — الرقم N لعدد الأطفال فى عائلة والذى يأخذ فقط القيم $0, 1, 2, 3, \ldots$ ولا يمكن أن يأخذ القيم 2.5 أو 3.842 ، هو متغير متقطع .

مثال ٢ — العمر A لشخص من الممكن أن يكون 62 سنه ، 63.8 سنه أو 65.8341 سنه وذلك حسب درجة الدقة فى القياس ، هو متغير متصل .

البيانات التى يمكن التعبير عنها بمتغير متقطع أو متصل تسمى بيانات متقطعة أو بيانات متصلة على التوالى . ومثال البيانات المتقطعة عدد الأطفال فى 1000 أسرة بينما أطوال 100 طالب جامعى يمكن اعتبارها كمثال على البيانات المتصلة . وبوجه عام فإن القياسات ينشأ عنها بيانات متصلة بينما العد أو الترقيم ينشأ عنها بيانات متقطعة .

قد يكون من المفيد أحياناً أن يمتد مفهوم المتغير إلى خصائص غير رقمية . فعلى سبيل المثال فإن اللون C فى قوس قزح يمكن أن يأخذ « القيم » أحمر ، برتقالى ، أصفر ، أخضر ، أزرق ، نيلى ، بنفسجى . وبشكل عام يمكن التعبير عن اللون الأحمر بالرقم ١ ، البرتقالى بالرقم ٢ ، وهكذا .

تقريب البيانات :

تقريب رقم مثل 72.8 إلى أقرب رقم عشرى هو 73 حيث أن 72.8 أقرب إلى 73 منها إلى 72 . كذلك فإن تقريب الرقم 72.8146 إلى أقرب رقم مئوى أو إلى رقين عشريين هو 72.81 حيث أن 72.8146 أقرب إلى 72.81 منها إلى 72.82 .

فى تقريب رقم مثل 72.465 إلى أقرب رقم مئوى تصادفنا صعوبة حيث أن الرقم 72.465 فى نفس درجة البعد عن الرقين 72.46 ، 72.47 وقد اصطلح من الناحية العملية أن يتم فى هذه الحالات التقريب إلى الرقم الزوجى السابق على 5 .

مثال ذلك 72.465 تقرب إلى 72.46 ، 183.575 تقرب إلى 183.58 ، 116 500 000 يقرب إلى أقرب مليون إلى 116 000 000 وهذا الحل العملى يفيد على وجه الخصوص فى تصغير الأخطاء المتراكمة للتقريب إذا أجرى عدد كبير من العمليات (أنظر المسألة ١ — ٤)

الرموز العلمية :

عند كتابة أى رقم وخاصة إذا كان متضمناً عدداً كبيراً من الأصفار قبل أو بعد العلامة العشرية ، فإنه من المفيد استخدام الرمز العلمى للأساس 10 .

مثال ١ — $10^1 = 10,\ 10^2 = 10 \times 10 = 100,\ 10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000,\ 10^8 = 100\,000\,000$

مثال ٢ — $10^0 = 1,\ 10^{-1} = 0{\cdot}1,\ 10^{-2} = 0{\cdot}01,\ 10^{-5} = 0{\cdot}000\,01$

مثال ٣ — $864\,000\,000 = 8{\cdot}64 \times 10^8,\ 0{\cdot}000\,034\,16 = 3{\cdot}416 \times 10^{-5}$

لاحظ أن ضرب رقم بـ 10^8 ، مثلا يؤدى إلى تحريك العلامة العشرية 8 أماكن إلى اليمين . كما أن ضرب رقم بـ 10^{-6} يؤدى إلى تحريك العلامة العشرية 6 أماكن إلى اليسار

من المعتاد أن تستخدم الأقواس أو النقط للتعبير عن ضرب رقين أو أكثر . مثلا

$$5 \times 3 = 15,\ (10)(10)(10) = 10.10.10 = 10 \times 10 \times 10 = 1000.$$

إذا استخدمت الحروف للدلالة على أرقام فإنه من المعتاد حذف الأقواس أو النقط . على سبيل المثال .

$$ab = (a)(b) = a.b = a \times b.$$

وتعد الرموز العملية مفيدة فى الحساب وخاصة فى تحديد مكان العلامة العشرية . وتستخدم فى ذلك القاعدة .

$$(10^p)(10^q) = 10^{p+q},\quad \frac{10^p}{10^q} = 10^{p-q}$$

حيث p ، q أى رقم .

فى الرقم 10^p ، p تسمى الأس و 10 الأساس .

مثال ١ —
$$(10^3)(10^2) \quad 1000 \times 100 = 100\,000 = 10^5 \text{ (i.e. } 10^{3+2}\text{)},$$
$$\frac{10^6}{10^4} = \frac{1\,000\,000}{10\,000} = 100 = 10^2 \text{ (i.e. } 10^{6-4}\text{)}$$

مثال ٢ —
$$(4\,000\,000)(0{\cdot}000\,000\,000\,2) = (4 \times 10^6)(2 \times 10^{-10}) = (4)(2)(10^6)(10^{-10}) - 8 \times 10^{6-10}$$
$$8 \times 10^{-4} \quad 0{\cdot}000\,8$$

مثال ٣ —
$$\frac{(0{\cdot}006)(80\,000)}{0{\cdot}04} = \frac{(6 \times 10^{-3})(8 \times 10^4)}{4 \times 10^{-2}} = \frac{48 \times 10^1}{4 \times 10^{-2}} = \left(\frac{48}{4}\right) \times 10^{1-(-2)}$$
$$= 12 \times 10^3 = 12\,000$$

الارقام المعنوية :

إذا كانت دقة تسجيل وزن شيء هو فى الصورة 65.4 kg فهذا يعنى أن الوزن الحقيق بين 65.35 kg و 65.45 kg والأرقام الدقيقة التى نحتاج إليها لتحديد العلامة العشرية ، بالإضافة إلى الأصفار اللازمة لتحديد العلامة العشرية ، تسمى الأرقام المعنوية للرقم .

مثال ١ — الرقم 65.4 له 3 أرقام معنوية

مثال ٢ — الرقم 4.5300 له 5 أرقام معنوية

مثال ٣ — الرقم $0.0018 = 1.8 \times 10^{-3}$ له 2 أرقام معنوية

مثال ٤ — الرقم $0.001800 = 1.800 \times 10^{-3}$ له 4 أرقام معنوية

الأرقام التى ترتبط بعملية التعداد أو الترقيم ، بعكس القياسات ، بطبيعتها أرقام صحيحة وبهذا يكون لها عدد غير محدود من الأرقام المعنوية . فى مثل هذه الحالات قد يكون من الصعب تحديد الأرقام المعنوية بدون وجود معلومات إضافية . مثال ذلك الرقم 186 000 000 من الممكن أن يكون له 9 .... ,4 ,3 أرقام معنوية . فإذا كان من المعروف أن له 5 أرقام معنوية فإنه من الأفضل أن يسجل 186.00 مليون أو 1.8600×10^8 .

العمليات الحسابية :

عند إجراء عمليات الحساب المتضمنة عمليات الضرب ، القسمة والحصول على جذور الأرقام فإن النتيجة النهائية لن تحتوى على أرقام معنوية بأكثر من الأرقام المعنوية بالرقم الذى به أقل رقم معنوى (أنظر المسألة ١ – ٩)

أمثلة :

1. $73{\cdot}24 \times 4{\cdot}52 = (73{\cdot}24)(4{\cdot}52) = 331$
2. $1{\cdot}648/0{\cdot}023 = 72$
3. $\sqrt{38{\cdot}7} = 6{\cdot}22$
4. $(8{\cdot}416)(50) = 420{\cdot}8$, if 50 is exact.

عند إجراء عمليات الجمع والطرح فإن النتيجة النهائية لن تحتوى على أرقام معنوية بعد العلامة العشرية بأكثر من الأرقام التى تحتوى على أقل رقم معنوى بعد العلامة العشرية (أنظر المسألة ١ – ١٠) .

أمثلة :

1. $3{\cdot}16 + 2{\cdot}7 = 5{\cdot}9$
2. $83{\cdot}42 - 72 = 11$
3. $47{\cdot}816 - 25 = 22{\cdot}816$, if 25 is exact.

القاعدة السابقة فى الجمع والطرح يمكن تعميمها (أنظر المسألة ١ – ١١)

الدوال :

إذا كان لكل قيمة من قيم المتغير X قيمة أو أكثر تقابلها للمتغير Y فإنه يذكر أن Y دالة فى X وتكتب $Y=F(X)$ (وتقرأ Y تساوى دالة F فى X) وذلك للتعبير عن هذا الاعتماد الدالى . ويمكن أن تستخدم حروف أخرى بدلا من F مثل ... و G, φ وهكذا .

ويسمى المتغير X بالمتغير المستقل والمتغير Y بالمتغير التابع

إذا كان لكل قيمة من قيم X قيمة وحيدة للمتغير Y فإن Y تسمى بدالة وحيدة القيمة فى X وخلاف ذلك تسمى بدالة متعددة القيم فى X .

مثال ١ — العدد الكلى P لسكان الجزر البريطانية يعد دالة فى الزمن t ، وتكتب $P = F(t)$.

مثال ٢ — الاستطالة S لزنبرك فى وضع رأسى يعد دالة فى الوزن W المعلق فى نهاية الزنبرك . وبالرموز ، $S = G(W)$.

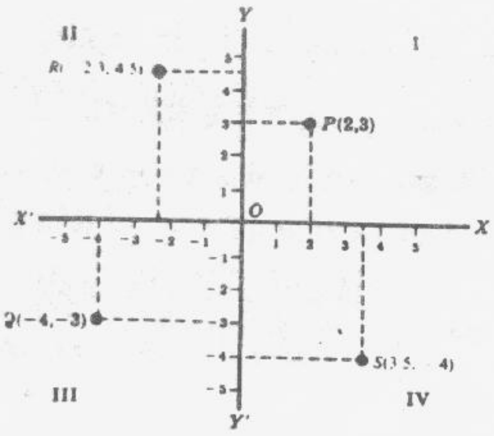
ويمكن تمثيل الاعتماد الدالى أو المقابلة بين المتغيرات على صورة جدول . كذلك يمكن التعبير عنها على صورة معادلة تربط بين المتغيرات مثال $Y = 2X - 3$ ومنها يمكن تحديد قيمه Y المقابلة للقيم المختلفة للمتغير X .

إذا كانت $Y = F(X)$ فإنه من المعتاد كتابة $F(3)$ مثلا للتعبير عن « قيمه Y عندما تكون $X = 3$ » ، $F(10)$ تعبر عن « قيمة Y عندما تكون $X = 10$ » وهكذا . على سبيل المثال إذا كانت $Y = F(X) = X^2$ فإن $F(3) = 3^2 = 9$ هى قيمة المتغير Y عندما تكون $X = 3$.

مفهوم الدالة يمكن تعميمه ليشمل حالة متغيرين أو أكثر (أنظر المسألة ١ - ١٧) .

الاحداثيات المتعامدة :

إذا أخذنا فى الاعتبار الخطان المتعامدان على بعضهما $X'OX$ و $Y'OY$ سميهما المحاور x و y (أنظر الشكل ١ - ١) حيث يوضح المقاييس المناسبة . هذان الخطان يقسمان المستوى المحدد بهما والمسمى بالمستوى $x\,y$ إلى أربع مناطق معبر عنها بالأرقام I, II, III, IV وهذه تسمى بالربع الاول ، الربع الثانى، الربع الثالث والربع الرابع على التوالى .



شكل ١ - ١

تسمى النقطة O بنقطة الأصل أو نقطة الصفر . إذا كانت هناك نقطة P وأسقطنا خطوطاً عمودية على المحورين x و y من النقطة P فإن قيمة x و y عند هذه النقطة التى تتقابل فيها الخطوط العمودية المسقطة مع هذه المحاور تسمى بالاحداثيات المتعامدة أو بشكل أبسط بإحداثيات النقطة P ويعبر عنها بالنقطة (x, y) ويسمى الاحداثى x أحياناً بالاحداثى السينى والاحداثى y بالاحداثى الصادى . فى الشكل (١-١) الاحداثى السينى للنقطة P هى 2 والاحداثى الصادى لها هو 3 . واحداثيات النقطة P هو $(2, 3)$.

وعلى العكس مما سبق فإذا أعطينا احداثيات نقطة فإنه يمكن تعيين موضع هذه النطقة . على هذا فإن النقطة ذات الاحداثيات $(-4, -3)$ ، $(-2.3, 4.5)$ وكذلك $(3.5, -4)$ تمثلة بالحروف Q, R, S على التوالى بالشكل .

ومن الممكن برسم المحور z يمر بالنقطة O وعمودى على المستوى $x\,y$ تعميم الفكرة السابقة . وفى هذه الحالة فإن إحداثيات النقطة P يمكن التعبير عنها بالصورة (x, y, z) .

الاشكال البيانية :

الشكل البيانى هو تعبير تصويرى للعلاقة بين المتغيرات . وتستخدم فى الإحصاء أنواع عديدة من الأشكال وذلك حسب طبيعة البيانات موضع الدراسة والهدف المرجو منه من الشكل . من بين هذه الأشكال الأعمدة البيانية ، الرسوم الدائرية والرسوم التصويرية ، وغير ذلك . وهذه الأشكال يشار إليها أحيانا بالخرائط أو الأشكال التوضيحية . وعلى هذا نتحدث عن خرائط الأعمدة البيانية وخرائط الرسوم الدائرية (أنظر المسائل أرقام ١ - ٢٣ ، ١ - ٢٤ ، ١ - ٢٦ ، وكذلك ١ - ٢٧) .

المعادلات :

المعادلة هي تعبير على الصورة $A = B$ حيث تسمى A بالعنصر أو الجانب الأيسر للمعادلة وB بالعنصر أو الجانب الأيمن لها إذا أجرينا على طرفي المعادلة نفس العمليات فإننا نحصل على معادلة مكافئة . وبهذا فإذا جمعنا أو طرحنا أو ضربنا كلا من طرفي المعادلة مستخدمين نفس المقدار فإننا نحصل على معادلة مكافئة والاستثناء الوحيد هو القسمة على الصفر فهي غير مسموح بها .

مثال : اعتبر المعادلة $2X + 3 = 9$.

إطرح 3 من الطرفين $2X = 6$ أو $2X + 3 - 3 = 9 - 3$.

إقسم الطرفين على 2 : $X = 3$ أو $2X/2 = 6/2$.

هذه القيمة لـ X تعد حلا للمعادلة المعطاة وهذا يمكن إثباته إذا عوضنا عن X بالقيمة 3 فإننا سنحصل على $9 = 3 + 2(3)$ أى $9 = 9$ وهذه متساوية . وتسمى عملية الحصول على حلول لمعادلة بحل المعادلة .

والفكرة السابقة يمكن استخدامها للحصول على حلول معادلتين فى مجهولين أو ثلاث معادلات فى ثلاثة مجاهيل وهكذا . هذه المعادلات تسمى بالمعادلات الآنية .

المتباينات :

الرمزان $>$ ، $<$ يعنيان « أقل من » و « أكبر من » على التوالى . والرموز $\leqq$ ، $\geqq$ يعنيان « أقل من أو يساوى » و « أكبر من أو يساوى » على التوالى . وهذه الرموز تعرف برموز المتباينات .

مثال ١ — $3 < 5$ تقرأ « 3 أقل من 5 »

مثال ٢ — $5 > 3$ تقرأ « 5 أكبر من 3 »

مثال ٣ — $X < 8$ تقرأ « X أقل من 8 »

مثال ٤ — $X \geqq 10$ تقرأ « X أكبر من أو تساوى 10 »

مثال ٥ — $4 < Y \leqq 6$ تقرأ « 4 أقل من Y والتى بدورها أقل من أو تساوى 6 » أو « تقع Y بين 4 و 6 بحيث أن 4 نفسها غير متضمنة بينما 6 نفسها متضمنة فى الفترة أو « Y أكثر من 4 وأقل من أو تساوى 6 »

تسمى العلاقات التى تتضمن رموز المتباينة بالمتباينات . وكما كنا نتحدث عن عناصر المعادلة فإنه يمكن الحديث عن عناصر المتباينة . فالمتباينة

$4 < Y \leqq 6$ عناصرها هى $4, Y, 6$.

المتباينة الصحيحة تستمر صحيحة :

(أ) إذا طرح نفس الرقم من أو أضيف إلى كل من عناصر المتباينة

أمثلة : بما أن $15 > 12$ فإن $15 + 3 > 15 + 3$ أى $18 > 15$ وكذلك $15 - 3 > 12 - 3$ أى $12 > 9$.

(ب) إذا ضرب كل عنصر فى أو قسم على نفس الرقم الموجب .

أمثلة بما أن $15 > 12$ فإن $(5)(3) > (3)(12)$ أى $(45 > 36)$ وكذلك $\frac{15}{3} > \frac{12}{3}$ أى $(5 > 4)$

(ج) إذا ضرب كل عنصر فى أو قسم على نفس الرقم السالب على أن يقلب اتجاه المتباينة .

أمثلة : بما أن $15 > 12$ فإن $(15)(-3) < (12)(-3)$ أى $(-45 < -36)$ كذلك $\frac{15}{-3} < \frac{12}{-3}$ أى $(-5 < -4)$

اللوغاريتمات :

أى رقم موجب N يمكن التعبير عنه كقوى للرقم 10 أى أنه من الممكن الحصول على الرقم p بحيث $N = 10^p$ وتسمى p لوغاريتم N للأساس 10 أو اللوغاريتم المعتاد للرقم N وتكتب $p = \log N$ أو $p = \log_{10} N$ على سبيل المثال فإن الرقم $10^3 = 1000$ وبهذا فإن $\log 1000 = 3$ كذلك فبما أن $0.01 = 10^{-2}$ فإن $\log 0.01 = -2$

إذا كان الرقم N رقماً يقع بين 1و10 أى 10^0 و 10^1 فإن $p = \log N$ تقع بين الصفر والواحد ومن الممكن الحصول عليها من جداول اللوغاريتمات فى الملحق صفحة ٥٣٦ .

مثال ١ — الحصول على $\log 2.36$ نبدأ بالبحث فى أسفل العمود المعنون N إلى أن نصل إلى الرقين 23 ثم نتحرك إلى اليمين فى اتجاه العمود المعنون 6 . سنجد أن التقاطع هو 3729 . وبهذا يكون
$\log 2.36 = 0.3729$ أى $2.36 = 10^{0.3729}$

لوغاريتم أى عدد موجب يمكن الحصول عليه من لوغاريتمات الأرقام من 1 إلى 10 .

مثال ٢ — من المثال (١) ، $2.36 = 10^{0.3729}$ إذا ضربنا الأطراف على التوالى بالرقم 10

$$23.6 = 10^{1.3729},\ 236 = 10^{2.3729},\ 2360 = 10^{3.3729},\ \ldots$$

أى

$$\log 2.36 = 0.3729,\ \log 23.6 = 1.3729,\ \log 236 = 2.3729,\ \log 2360 = 3.3729$$

مثال ٣ — بما أن $2.36 = 10^{0.3729}$ فإن القسمة المتكررة على الرقم 10 ، نجد

$$0{\cdot}236 = 10^{0.3729-1} = 10^{-0.6271},\quad 0{\cdot}0236 = 10^{0.3729-2} = 10^{-1.6271}, \ldots$$

ومن المعتاد أن نكتب $0.3729 - 1$ على صورة $9.3729 - 10$ او $\bar{1}.3729$
وكذلك $0.3729 - 2$ تكتب $8.3729 - 10$ على صورة $\bar{2}.3729$ وهكذا باستخدام هذه الرموز نجد .

$$\log 0{\cdot}236 = 9{\cdot}3729 - 10 = \bar{1}{\cdot}3729 = -0{\cdot}6271$$
$$\log 0{\cdot}0236 = 8{\cdot}3729 - 10 = \bar{2}{\cdot}3729 = -1{\cdot}6271, \text{ etc.}$$

ويسمى الجزء العشرى 0.3729 فى كل هذه اللوغاريتمات بالجزء العشرى . أما الجزء الباقى قبل العلامة العشرية للجزء العشرى مثل 1, 2, 3 وكذلك $\bar{1}, \bar{2}$ أو 10 — 9 ,10 — 8 يسمى بالعدد البيانى .

القواعد التالية من السهل إثباتها :

١ – العدد البيانى فى لوغاريتم أى عدد أكبر من الواحد الصحيح يكون موجباً ويساوى عدد الأرقام الصحيحة فى العدد الأصلى ناقصاً واحداً .

بهذا يكون العدد البيانى فى لوغاريتم 2.36, 23.6, 236, 2360 هو 0, 1, 2, 3 وتكون لوغاريتماتها 3.3729, 2.3729, 1.3729, 0.3729 .

٢ – العدد البيانى فى لوغاريتم أى عدد أصغر من الواحد الصحيح يكون سالباً ويساوى عدد الأصفار التى تلى العلامة العشرية مباشرة مضافاً إليها واحداً . بهذا يكون العدد البيانى فى لوغاريتم 0.236, 0.0236, 0.00236 هو 3 — ,2 — ,1 — وتكون لوغاريتماتها $\bar{1}.3729, \bar{2}.3729, \bar{3}.3729$ على التوالى .

أما إذا كان لوغاريتم عدد ذا أربعة أرقام مثل 758.2 ,2.364 فإنه يمكن الحصول عليها بالاستكمال (أنظر المسألة ١ – ٣٦) .

الأعداد المقابلة للوغاريتمات :

يمكن كتابة الرقم 2.36 فى الشكل الأسى على صورة $2.36 = 10^{0.3729}$ ويسمى الرقم 2.36 بالعدد المقابل للوغاريتم 0.3729 أو antilog 0.3729 أى أنه الرقم الذى لوغاريتمه 0.3729 ويترتب على ذلك ما يلى :

$$\text{antilog } 1{\cdot}3729 = 23{\cdot}6,\ \text{antilog } 2{\cdot}3729 = 236,\ \text{antilog } 3{\cdot}3729 = 2360, \ldots$$
$$\text{antilog } (9{\cdot}3729 - 10) = \text{antilog } \bar{1}{\cdot}3729 = 0{\cdot}236,$$
$$\text{antilog } (8{\cdot}3729 - 10) = \text{antilog } \bar{2}{\cdot}3729 = 0{\cdot}0236, \ldots$$

ويمكن الحصول على الأعداد المقابلة للوغاريتم أى رقم بالرجوع إلى الجدول فى الملحق .

مثال : الحصول على العدد المقابل للوغاريتم 10 — 8.6284 فإننا نبحث عن الجزء العشرى 0.6284 فى صلب الجدول . حيث نجده عند تقاطع الصف المعنون 42 والعمود 5 فإن الرقم المطلوب هو 425 . وبما أن العدد البيانى هو 10 — 8 فإن الرقم هو 0.0425 .

وبنفس الطريقة فإن $\text{antilog } 5.6284 = 425\,000$ ، $\text{antilog } 3.6284 = 4250$

أما إذا كان الجزء العشرى غير موجود بالجدول فإنه يمكن الحصول على العدد بالاستكمال (أنظر المسألة رقم ١ — ٣٧)

الحسابات باستخدام اللوغاريتمات :

$$\log MN = \log M + \log N$$
$$\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$$
$$\log M^p = p \log M$$

وباستخدام هذه النتائج معاً فإننا نجد على سبيل المثال

$$\log \frac{A^p B^q C^r}{D^s E^t} = p \log A + q \log B + r \log C - s \log D - t \log E$$

أنظر المسائل من ١ — ٣٨ إلى ١ — ٤٥

مســـائل محلولة

المتغيرات :

١ — ١ حدد أياً من البيانات التالية تمثل بيانات متقطعة وأياً منها تمثل بيانات متصلة

(أ) عدد الأسهم المباعة فى سوق الأوراق المالية — الحل : متقطعة

(ب) درجات الحرارة المسجلة كل نصف ساعة فى مكتب الأرصاد الجوية — الحل : متصلة

(جـ) أعمار لمبات التليفزيون المنتجة فى شركة ما — الحل : متصلة

(د) الدخول السنوية لأساتذة كلية — الحل : متقطعة

(هـ) أطوال 1000 مسمار من انتاج مصنع — الحل : متصلة

١ — ٢ وضح مجال كل من المتغيرات التالية وحدد أياً من هذه المتغيرات متصل وأياً منها متقطع .

(أ) الرقم V لعدد ليترات الماء فى ماكينة غسيل .

المجال : أى رقم يبدأ من الصفر إلى طاقة الماكينة .

المتغير متصل .

(ب) عدد الكتب B الموضوع على رف فى إحدى المكتبات .

المجال ... ,3 ,2 ,1 ,0 إلى أكبر عدد من الكتب يمكن أن تناسب الرف .

المتغير متقطع .

(ج) المجموع S لعدد النقط التى نحصل عليها من رمية زهرتى طاولة

المجال : الأرقام الممكن الحصول عليها من رمية واحدة لزهرة طاولة هى 6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1 . وبهذا يكون مجموع النقط فى رمية زهرتين هو 12 .11 ,10 ,9 ,8 ,7 ,6 ,5 ,4 ,3 ,2 وهذا هو مجال S .

المتغير متقطع

(د) القطر d لكرة

المجال : إذا اعتبرنا أن النقطة هى كرة قطرها صفر فإن المجال d هو جميع القيم ابتداء من الصفر .

المتغير متصل

(هـ) الدولة C فى أوروبا .

المجال : انجلترا ، فرنسا ، ألمانيا . . وهكذا . ويمكن تمثيلها رقمياً ... ,3 ,2 ,1 وهكذا

المتغير متقطع

تقريب البيانات :

١ - ٣ قرب الأرقام التالية إلى درجة الدقة المشار إليها

(أ)	48.6	أقرب وحدة	49	(و)	143.95	أقرب نسبة من العشرة	144.0
(ب)	136.5	أقرب وحدة	136	(ز)	368	أقرب نسبة من المائة	400
(ج)	2.484	أقرب نسبة من مئة	2.48	(ح)	24448	أقرب نسبة من ألف	24000
(د)	0.0435	أقرب نسبة ألف	0.044	(ط)	5.56500	أقرب نسبة من المائة	5.56
(هـ)	4.50001	أقرب وحدة	5	(ى)	5.56501	أقرب نسبة من المائة	5.57

١ - ٤ أجمع الأرقام 9.75 ,7.55 ,6.65 ,12.45 ,2.95 ,8.65 ,4.35

(أ) مباشرة

(ب) بالتقريب إلى أقرب نسبة من العشرة حسب طريقة « الرقم الزوجى »

(ج) بالتقريب بحيث يزيد الرقم السابق على الـ 5

الحـل :

(أ)	(ب)	(جـ)
4.35	4.4	4.4
8.65	8.6	8.7
2.95	3.0	3.0
12.45	12.4	12.5
6.65	6.6	6.7
7.55	7.6	7.6
9.75	9.8	9.8
المجموع 52.35	المجموع 52.4	المجموع 52.7

لاحظ أن الطريقة (ب) أحسن من الطريقة (جـ) حيث أنها تؤدى إلى تناقص أخطاء التقريب المتراكمة.

الرموز العلمية والارقام المعنوية :

١ - ٥ عبر عن الأرقام التالية بدون استخدام قوى العدد 10 .

(أ) 4.823×10^7 . حرك العلامة العشرية 7 أماكن إلى اليمين فيكون الناتج 48230000

(ب) 8.4×10^{-6} حرك العلامة العشرية 6 أماكن إلى اليسار فيكون الناتج 0.000 008 4

(جـ) $3.80 \times 10^{-4} = 0.000\,380$ (هـ) $300 \times 10^8 = 30\,000\,000\,000$

(د) $1.86 \times 10^5 = 186\,000$ (و) $70\,000 \times 10^{-10} = 0.000\,007\,000\,0$

١ - ٦ ما هو عدد الأرقام المعنوية فى الأرقام التالية إذا افترضنا أن الأرقام مسجلة بدقة ؟

(أ) 149.8 mm أربعة (د) 0.002 80 m ثلاثة (ز) 9 منازل غير محدود

(ب) 149.80 mm خمسة (هـ) 1.002 80 m ستة (ح) 4.0×10^3 g إثنان

(جـ) 0.0028 m إثنان (و) 9 g واحد (ط) 7.58400×10^{-5} N ستة

١ - ٧ ماهو الحد الأقصى للخطأ فى القياسات التالية إذا افترضنا أنها مسجلة بدقة ؟ حدد عدد الأرقام المعنوية لكل رقم فى كل حالة .

(أ) 73.854 mm من الممكن أن تكون القياسات فى المدى من 73.8535 mm إلى 73.8545 mm وبهذا يكون الحد الأقصى للخطأ 0.0005 mm يحتوى الرقم على خمسة أرقام معنوية .

(ب) $0.09800\ m^3$ رقم الـ m^3 من الممكن أن يكون أى رقم من 0.097 995 إلى 0.098 005 وبهذا يكون الحد الأقصى للخطأ $0.000\ 005\ m^3$ يحتوى الرقم على أربعة أرقام معنوية .

(جـ) 3.867×10^8 km . الرقم الحقيق بالكيلومترات أكبر من 3.8665×10^8 ولكنه أقل من 3.8675×10^8 .

وبهذا يكون الحد الأقصى للخطأ هو 0.0005×10^8 km يحتوى الرقم على أربعة أرقام معنوية .

١ – ٨ أكتب الأرقام التالية باستخدام الرموز العملية ، مفترضاً أن جميع الأرقام معنوية إلا إذا ذكر غير ذلك .

(أ) 24 380 000 (four sig. fig.) = $2{\cdot}438 \times 10^7$ (جـ) 7 300 000 000 (five sig. fig.) = $7{\cdot}3000 \times 10^9$

(ب) 0·000 009 851 = $9{\cdot}851 \times 10^{-6}$ (د) 0·000 184 00 = $1{\cdot}8400 \times 10^{-4}$

العمليات الحسابية :

١ – ٩ وضح أنه فى حاصل ضرب الرقم 5.74 فى 3.8 مفترضاً أن أرقامها المعنوية هى ثلاثة وإثنان على التوالى لايمكن أن يكون دقيقاً لأكثر من رقمين معنويين .

الطريقة الأولى :

$3.8 \times 5.74 = 21.812$ ولكن ليس كل ناتج الضرب معنوياً . ولتحديد عدد الأرقام المعنوية فنلاحظ أن الرقم 5.74 يمكن أن يكون أى رقم بين 5.745 ، 5.735 بينما الرقم 3.8 يمكن أن يكون أى رقم بين 3.75 ، 3.85 وبهذا يكون أصغر قيمة ممكنة لحاصل الضرب هو $5.735 \times 3.75 = 21.50625$ وتكون أكبر قيمة ممكنة هى $5.745 \times 3.85 = 22.118\ 25$.

وبما أن المدى الممكن للقيم هو من 21.506 25 إلى 22.118 25 فإنه من الواضح أن الأرقام المعنوية لن تزيد عن الأرقام الخمسة الأولى ، وتكتب النتيجة 22 . لاحظ أن الرقم 22 يمثل أى رقم بين 21.5 ، 22.5 .

الطريقة الثانية :

اعتبر فى الصورة التالية أن الأرقام المائلة مشكوك فى صحتها ، وبهذا يحسب حاصل الضرب كالآتى :

يجب أن لانحتفظ بأكثر من رقم واحد مشكوك فيه فى النتيجة وبهذا يكون الرقم 22 إلى رقمين معنويين .

```
 5·74
  3·8
 4592
1722
21·812
```

لاحظ أنه من الضرورى الاحتفاظ بعدد أكبر من الأرقام المعنوية أكبر مما هو فى آخر حد دقيق . لاحظ أنه لو قنا بتقريب الرقم 5.74 إلى 5.7 فإن حاصل ضرب $5.7 \times 3.8 = 21.66 = 22$ إلى رقمين معنويين ، كما فى النتيجة السابقة . عند إجراء الحسابات بدون استخدام آلة حاسبة فإنه يمكن التقليل من العمل بعدم الاحتفاظ بأكثر من رقم أو رقمين معنويين بعد آخر معامل دقيق وتقرب النتيجة النهائية إلى أقرب رقم معنوى .

١ – ١٠ أجمع الأعداد 8.472 ,12.3 ,5.9561 ,15.28 ,4.193 55 مفترضاً أن جميع الأرقام معنوية

الحــل :

فى (أ) الرقم المشكوك فيه فى عمليات الجمع مكتوب بخط مائل . النتيجة النهائية والتى لاتتضمن أكثر من رقم واحد مشكوك فيه هى 46.2

(أ)	(ب)
4·193 55	4·19
15·28	15·28
5·956 1	5·96
12·3	12·3
8·472	8·47
46·201 65	46·20

بعض العمل يمكن تقليله لو اتبعنا الطريقة (ب) حيث احتفظنا برقم معنوى عشرى واحد أكثر من الرقم الأقل دقة . والنتيجة النهائية ، مقربة إلى 46.2 تتفق مع النتيجة فى (أ) .

١ – ١١ أجمع 1372410 — 000 684 12 + 000 000 475 إذا كانت هذه الأعداد تحتوى على 3, 5, 7 أرقام معنوية على التوالى

الحــل :

فى عمليات الجمع فى (أ) جميع الأرقام احتفظ بها ثم قربت النتيجة . فى (ب) استخدمت طريقة مشابهة لما استخدمناه فى الحل ١ – ١٠ (ب) . فى كلتا الحالتين فإن الأرقام المشكوك فيها مكتوبة بخط مائل .

(أ)

$$\begin{array}{r} 487\,684\,000 \\ -\quad 1\,372\,410 \\ \hline 486\,311\,590 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 475\,000\,000 \\ +\quad 12\,684\,000 \\ \hline 487\,684\,000 \end{array}$$

(ب)

$$\begin{array}{r} 487\,700\,000 \\ -\quad 1\,400\,000 \\ \hline 486\,300\,000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 475\,000\,000 \\ +\quad 12\,700\,000 \\ \hline 487\,700\,000 \end{array}$$

وتقرب النتيجة النهائية إلى 000 000 486 وقد يكون من الأفضل لبيان أن هناك 3 أرقام معنوية أن تكتب على صورة 486 مليون أو 4.86×10^8 .

١ – ١٢ أجر العمليات الموضحة فيما يلى :

(أ) $48\cdot0 \times 943 = (48\cdot0)(943) = 45\,300$ (ب) $8\cdot35/98 = 0\cdot085$

(جـ)

$$(28)(4193)(182) = (2\cdot8 \times 10^1)(4\cdot193 \times 10^3)(1\cdot82 \times 10^2)$$
$$= (2\cdot8)(4\cdot193)(1\cdot82) \times 10^{1+3+2} = 21 \times 10^6 = 2\cdot1 \times 10^7$$

وهذه يمكن كتابتها 21 مليون لبيان أن هناك رقمين معنويين

(د) $$\frac{(526 \cdot 7)(0 \cdot 001\,280)}{0 \cdot 000\,034\,921} = \frac{(5 \cdot 267 \times 10^{2})(1 \cdot 280 \times 10^{-3})}{3 \cdot 4921 \times 10^{-5}} = \frac{(5 \cdot 267)(1 \cdot 280)}{3 \cdot 4921} \times \frac{(10^{2})(10^{-3})}{10^{-5}}$$
$$= 1 \cdot 931 \times \frac{10^{2-3}}{10^{-5}} = 1 \cdot 931 \times \frac{10^{-1}}{10^{-5}}$$
$$= 1 \cdot 931 \times 10^{-1+5} = 1 \cdot 931 \times 10^{4}$$

وهذه يمكن كتابتها 19.31 ألف لبيان أن هناك أربعة أرقام معنوية

(هـ) $$\frac{(1 \cdot 475\,62 - 1 \cdot 473\,22)(4895 \cdot 36)}{0 \cdot 000\,159\,180} = \frac{(0 \cdot 002\,40)(4895 \cdot 36)}{0 \cdot 000\,159\,180} = \frac{(2 \cdot 40 \times 10^{-3})(4 \cdot 895\,36 \times 10^{3})}{1 \cdot 591\,80 \times 10^{-4}}$$
$$= \frac{(2 \cdot 40)(4 \cdot 895\,36)}{1 \cdot 591\,80} \times \frac{(10^{-3})(10^{3})}{10^{-4}} = 7 \cdot 38 \times \frac{10^{0}}{10^{-4}} = 7 \cdot 38 \times 10^{4}$$

هذه أيضاً يمكن كتابتها 73.8 ألف لإظهار الأرقام الثلاثة منوية بالعدد

(و) إذا كان البسط 6 ، 5 أرقاما دقيقة ، $3 \cdot 84 \cdot 5 \cdot 009 - 8 \cdot 85$ $\frac{(5 \cdot 482)^2}{6} \cdot \frac{(4 \cdot 38)^2}{5}$

(ز) $(3 \cdot 1416)(8 \cdot 447) - 26 \cdot 54$ $3 \cdot 1416\sqrt{71 \cdot 35}$ (ح) $\sqrt{39 \cdot 3 \quad 6 \cdot 27}$ $\sqrt{128 \cdot 5 - 89 \cdot 24}$

١ - ١٢ احسب قيمة كل مما يلي إذا كانت $X = 3,\ Y = -5,\ A = 4,\ B = -7$ حيث كل الأرقام يفترض فيها أنها دقيقة .

(أ) $$2X - 3Y = 2(3) - 3(-5) = 6 + 15 = 21$$

(ب) $$4Y - 8X + 28 = 4(-5) - 8(3) + 28 = -20 - 24 + 28 = -16$$

(جـ) $$\frac{AX + BY}{BX - AY} = \frac{(4)(3) + (-7)(-5)}{(-7)(3) - (4)(-5)} = \frac{12 + 35}{-21 + 20} = \frac{47}{-1} = -47$$

(د) $$X^2 - 3XY - 2Y^2 = (3)^2 - 3(3)(-5) - 2(-5)^2 = 9 + 45 - 50 = 4$$

(هـ) $$2(X + 3Y) - 4(3X - 2Y) = 2[(3) + 3(-5)] - 4[3(3) - 2(-5)]$$
$$= 2[3 - 15] - 4[9 + 10] = 2(-12) - 4(19)$$
$$= -24 - 76 = -100$$

طريقة أخرى :

(و) $$2(X + 3Y) - 4(3X - 2Y) = 2X + 6Y - 12X + 8Y = -10X + 14Y = -10(3) + 14(-5)$$
$$= -30 - 70 = -100$$

(ز) $$\frac{X^2 - Y^2}{A^2 - B^2 + 1} = \frac{(3)^2 - (-5)^2}{(4)^2 - (-7)^2 + 1} = \frac{9 - 25}{16 - 49 + 1} = \frac{-16}{-32} = \frac{1}{2} = 0 \cdot 5$$

$$\sqrt{2X^2 - Y^2 - 3A^2 + 4B^2 + 3} = \sqrt{2(3)^2 - (-5)^2 - 3(4)^2 + 4(-7)^2 + 3}$$
$$= \sqrt{18 - 25 - 48 + 196 + 3} = \sqrt{144} = 12$$

(ح) $$\sqrt{\frac{6A^2}{X} + \frac{2B^2}{Y}} = \sqrt{\frac{6(4)^2}{3} + \frac{2(-7)^2}{-5}} = \sqrt{\frac{96}{3} + \frac{98}{-5}} = \sqrt{12 \cdot 4} = 3 \cdot 52, \text{ approx}$$

الدوال :

١ - ١٤ الجدول ١ - ١ يظهر عدد الأطنان من الجذور والبنجر التي أنتجتها مزرعة PQR وذلك خلال الأعوام من من 1950 إلى 1960

السنة	عدد الأطنان من الجذور (مقربة لأقرب ٥ أطنان)	عدد الأطنان من البنجر (مقربة لأقرب ٥ أطنان)
1950	200	75
1951	185	90
1952	225	100
1953	250	85
1954	240	80
1955	195	100
1956	210	110
1957	225	105
1958	250	95
1959	230	110
1960	235	100

شكل ١ - ١

بالرجوع إلى هذا الجدول حدد السنة أو السنوات التي في خلالها :

(أ) أنتج أقل عدد من أطنان الجذور

(ب) أنتج أكبر عدد من أطنان البنجر

(ج) حدث أكبر تدهور في إنتاج الجذور

(د) انخفض إنتاج البنجر بينما ارتفع إنتاج الجذور عما كان عليه في العام السابق

(هـ) أنتج نفس كمية الأطنان من الجذور والبنجر

(و) مجموع إنتاج الجذور ، والبنجر وصل إلى نهاية العظمى

الحل : (أ) 1951 (ب) 1959 ، 1956 (ج) 1955 (د) 1953, 1957, 1958, 1960

(هـ) 1952, 1957; 1953, 1958 (و) 1958

١ - ١٥ إذا كانت W تعبر عن عدد الأطنان المنتجة من الجذور و C تعبر عن عدد الأطنان المنتجة من البنجر في العام t في مزرعة PQR المذكورة في المسألة ١ - ١٤ . من الواضح أن W ، C دالتان في t وهذا يعبر عنه $W = F(t)$ و $C = G(t)$.

(أ) أوجد W عند $t = 1956$ — الحل : 210

(ب) أوجد C عند $t = 1959$ ، $t = 1953$ — الحل : 110 ، 85 على التوالي

(ج) أوجد t عند $W = 225$ — الحل : 1957 ، 1952 على التوالي

(د) أوجد $F(1959)$ — الحل : 240

(هـ) أوجد $G(1958)$ — الحل : 95

(و) أوجد C عندما $W = 210$ — الحل : 110

(ز) ماهو مجال المتغير t ؟ — الحل : السنوات 1950, 1951, ...,1960

(ح) هل W دالة وحيدة القيمة فى t ؟

نعم ، حيث أنه لكل قيمة من قيم t (فى مجال t) تقابلها قيمة وحيدة للمتغير W

(ط) هل t دالة فى W ؟ إذا كانت كذلك فهل هى دالة وحيدة القيمة ؟ نعم ، t دالة فى W حيث أنه لكل قيمة يمكن أن تأخذها W تقابلها قيمة أو أكثر من قيم t يمكن الحصول عليها من الجدول .

بما أنه من الممكن أن يكون هناك أكثر من قيمة للمتغير t مقابل قيمة من قيم W (مثال : عندما $W=225$ فإن $t = 1952$ أو $t = 1957$) فإن الدالة متعددة القيم . هذا الاعتماد الدالى لـ t على W يمكن كتابته على صورة $t = H(W)$

(ى) هل C دالة فى W ؟

نعم ، حيث أنه لكل قيمة ممكنة من قيم W يقابلها قيم أو أكثر من قيم C كما هو محدد بالجدول ١ - ١ . كذلك فإن W دالة فى C .

(ك) ما هو المتغير المستقل ، t أو W ؟

من الناحية المادية فإنه من المعتاد أن نفكر فى أن W تتحدد من t وليس أن t تتحدد من W . وبهذا فإنه من الناحية المادية نعتبر t المتغير المستقل و W المتغير التابع . من الناحية الرياضية فإن أياً من المتغيرين يمكن اعتباره متغيراً مستقلا والآخر متغيراً تابعاً . فالمتغير الذى يعطى قيما مختلفة هو المتغير المستقل أما المتغير الذى يتحدد كنتيجة لذلك فهو المتغير التابع .

١ - ١٦ تتحدد قيمة المتغير Y من المتغير X طبقاً للمعادلة $Y = 2X - 3$ (حيث الرقان 2,3 أرقام صحيحة) .

(أ) أوجد قيمة Y إذا أخذت X القيم 1.5 ، -2 ، 3

عندما $X = 3,\ Y = 2X - 3 = 2(3) - 3 = 6 - 3 = 3.$

عندما $X = -2,\ Y = 2X - 3 = 2(-2) - 3 = -4 - 3 = -7.$

عندما $X = 1{\cdot}5,\ Y = 2X - 3 = 2(1{\cdot}5) - 3 = 3 - 3 = 0.$

(ب) كون جدولا لقيم Y المقابلة لقيم X 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4

يظهر الجدول المقابل قيم Y ، محسوبة كما فى الجزء (أ) من المسألة :

X	2	1	0	1	2	3	4
Y	7	5	3	1	1	3	5

لاحظ أنه باستخدام قيم أخرى لـ X فإنه من الممكن تكوين عديد من الجداول . العلاقة $Y = 2X - 3$ مكافئة لمجموعة من كل الجداول المحتملة .

(جـ) إذا كان اعتماد Y على X يعبر عنه بالصورة $Y = F(X)$ حدد قيمة $F(2.4)$ ، $F(0.8)$

$$F(2{\cdot}4) = 2(2{\cdot}4) - 3 = 4{\cdot}8 - 3 = 1{\cdot}8, \quad F(0{\cdot}8) = 2(0{\cdot}8) - 3 = 1{\cdot}6 - 3 = -1{\cdot}4$$

(د) ماهى قيمة X إذا كانت $Y = 15$ ؟

بالتعويض عن Y بالقيمة 15 فى $Y = 2X - 3$. فإن $15 = 2X \quad 3, 2X \quad 18, X \quad 9$

(هـ) هل من الممكن التعبير عن X كدالة فى Y ؟

نعم حيث أن $Y = 2X - 3, Y + 3 = 2X$ أو $X = \frac{1}{2}(Y + 3)$ وهذا يعبر عن X كدالة صريحة فى Y .

(و) هل Y دالة وحيدة القيمة فى X ؟

نعم ، حيث أنه لكل قيمة يمكن أن تأخذها X (وهناك عدد لانهائى من هذه القيم) تأخذ Y قيمة وحيدة فقط .

(ز) هل X دالة وحيدة القيمة فى Y

نعم ، حيث أنه من الجزء (جـ) فإن $X = \frac{1}{2}(Y + 3)$ بحيث أنه لكل قيمة يمكن أن تأخذها Y قيمة وحيدة فقط تأخذها X .

١ - ١٧ إذا كانت $Z = 16 + 4X - 3Y$ أوجد قيم Z المقابلة لما يلى :

(أ) $X \quad 2, Y \quad 5$ (ب) $X \quad 3, Y \quad 7$ (جـ) $X \quad -4, Y \quad 2$

الحـل :

(أ) $Z = 16 + 4(2) - 3(5) = 16 + 8 - 15 = 9$

(ب) $Z = 16 + 4(-3) - 3(-7) = 16 - 12 + 21 = 25$

(جـ) $Z = 16 + 4(-4) - 3(2) = 16 - 16 - 6 = -6$

بمعلومية قيم Y ، X يقابلها قيمة Z . ومن الممكن التعبير عن اعتماد Z على Y ، X بأن تكتب $Z = F(X, Y)$ وتقرأ Z دالة فى Y ، X . $F(2, 5)$ تعبر عن قيمة Z عندما $Y = 5$ $X = 2$ وهى 9 ، من الجزء (أ) . بصورة مماثلة $F(-3, -7) = 25$ ، $F(-4, 2) = -6$ من (ب) و (جـ) وتسمى المتغيرات X, Y بالمتغيرات المستقلة و Z بالتغير التابع .

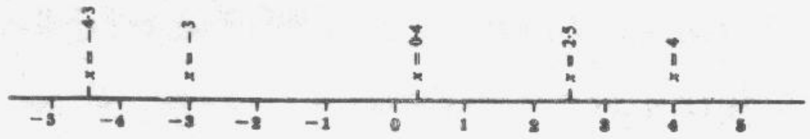
الأشكال البيانية :

١ - ١٨ عين على المحور X فى نظام للإحداثيات النقط المقابلة لما يلى :

(أ) $x = 4$ (ب) $x = -3$ (جـ) $x = 2.5$

(د) $x = -4.3$ (هـ) $x = 0.4$ ، مفترضاً أن كل هذه القيم قيم صحيحة .

الحل :



لكل قيمة من قيم x الصحيحة نقطة وحيدة فقط على المحور . وبالعكس فإنه من الثابت فى الرياضة المتقدمة أن كل نقطة على الأحداثى تقابلها قيمة وحيدة من قيم x .

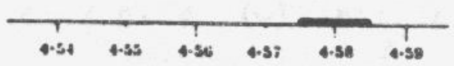
من الناحية النظرية فإن هناك نقطة تقابل ... $x = \pi = 3.141\,592653\,58$

أو ... $x = 7/22 = 3.142857142875$.

ومن الناحية العملية فإننا لن نأمل أن نحدد موضع نقطة بالدقة حيث أن كثافة القلم الذى تستخدمه له سمك يغطى على عدد لانهائى من النقط ، كذلك فإن المحور x نفسه له سمك . وبهذا فإن الشكل أعلاه هو تمثيل مادى للوضع الرياضى الفعل .

١ - ١٩ إذا كان x يعبر عن قطر حامل كرة بالمليمتر . إذا كانت $x = 4.58$ إلى ثلاثة أرقام معنوية . كيف يمكن تمثيل هذا على المحور x ؟

الحل :



القياس المعطى 4.58 mm. يظهر أن القياس الحقيق يقع بين 4.575 mm. و 4.585 . وبهذا فإن القياس يجب أن يمثل بالجزء الثقيل من الخط .

١ - ٢٠ عين فى نظام للاحداثيات المتعامدة النقطة التى إحداثياتها :

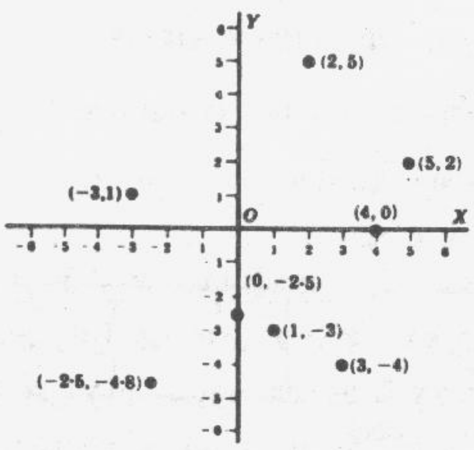
(أ) $(5, 2)$ (ب) $(2, 5)$

(جـ) $(-3, 1)$ (د) $(1, -3)$

(هـ) $(-2.5, -4.8)$

(و) $(0, -2.5)$

(ز) $(3, -4)$ (ح) $(4, 0)$



الشكل ١ - ٢

افترض أن الأرقام المعطاة هي أرقام صحيحة . أنظر الشكل (١ - ٢) لتوضيح الحل .

١ - ٢١ عبر بيانياً عن المعادلة $y = 2x - 3$

الحل :

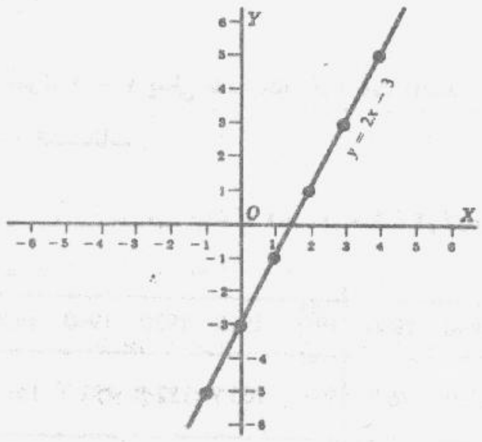
ضع $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$

فإننا نجد

$y = -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5$

على التوالي [أنظر المسألة ١ - ١٦ (ب)]. وبهذا تكون النقطة على الرسم هي (٨٨) .

وقد رسمت باستخدام نظام الاحداثيات المتعامدة كما هو موضح بالشكل ١ - ٣ جميع هذه النقط وكذلك غيرها من النقط التي يمكن الحصول عليها باستخدام قيم أخرى لـ x تقع على خط مستقيم وهو الشكل المطلوب .



الشكل ١ - ٣

وبما أن الشكل البياني المعادلة $y = 2x - 3$ هو خط مستقيم فإننا نسمى أحياناً $F(x) = 2x - 3$ دالة خطية

وبشكل عام فإن $F(x) = ax + b$ حيث a, b ثوابت دالة خطية وشكلها البياني هو خط مستقيم .

لاحظ أن نقطتين فقط لازمتين لرسم الدالة الخطية لأن نقطتين كافيتان لتحديد خط

١ - ٢٢ عبر بيانياً عن المعادلة $y = x^2 - 2x - 8$

الحل :

يظهر الجدول قيم y المقابلة للقيم المختلفة لـ x وعلى سبيل المثال فعندما $x = 2$

$y = (-2)^2 - 2(-2) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0$

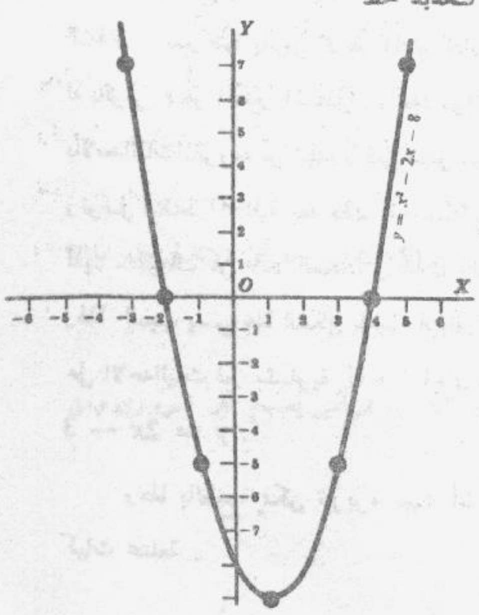
x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	7	0	−5	−8	−9	−8	−5	0	7

من الجدول فإن النقط الموضحة بالشكل هي $(-3, 7)$

$(-2, 0), (-1, -5), (0, -8), (1, -9), (2, -8)$

$(3, -5), (4, 0), (5, 7)$

هذه النقط وغيرها من النقط التي يمكن الحصول عليها باستخدام



الشكل ١ - ٤

قيم مختلفة لـ x ، تقع على المنحنى الموضح بالشكل ١ – ٤ . هذا المنحنى يسمى قطع مكافىء .

والدالة $F(x) = x^2 - 2x - 8$

تسمى دالة من الدرجة الثانية . وبشكل عام فإن الرسم البياني للمعادلة $y = a + bx + cx^2$ حيث a, b, c ثوابت و $c \neq 0$ يعبر عن قطع مكافىء . أما إذا كانت $c = 0$ فإن الشكل يعبر عن خط مستقيم كما في المسألة ١ – ٢١ .

١ – ٢٣ الجدول ١ – ٢ يعطي عدد سكان الولايات المتحدة (بالمليون) للسنوات $1840, 1850, \ldots, 1960$. ارسم هذه البيانات .

جدول ١ – ٢ سكان الولايات المتحدة (بالمليون) ، 1840 — 1960

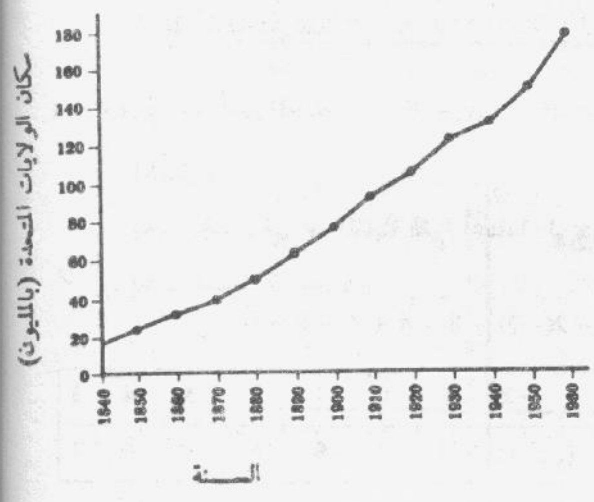
السنة	1840	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960
السكان (بالمليون)	17·1	23·2	31·4	39·8	50·2	62·9	76·0	92·0	105·7	122·8	131·7	151·1	179·3

المصدر : مكتب التعداد

الطريقة الاولى :

بالرجوع إلى الشكل ١ – ٥ فإننا في الرسم اعتبرنا أن السكان ، يعبر عنها بالرمز P هو المتغير التابع بينما الزمن ، يرمز له بالرمز t هو المتغير المستقل . وتحدد مواضع النقط كالمعتاد بالاحداثيات المقروءة من الجدول فعلى سبيل المثال $(1880, 50.2)$ وتوصل النقاط المتتالية بعد ذلك بخط مستقيم حيث أنه لاتوجد لدينا معلومات عن عدد السكان في خلال السنوات المتوسطة . ولهذا السبب يسمى هذا الشكل بالخط البياني لاحظ أن الوحدات على الاحداثيات غير متساوية كما هو الحال عند رسم المعادلة $y = 2x - 3$.

وهذا بالطبع يمكن تبريره حيث أن المتغيران يمثلان كميات مختلفة .



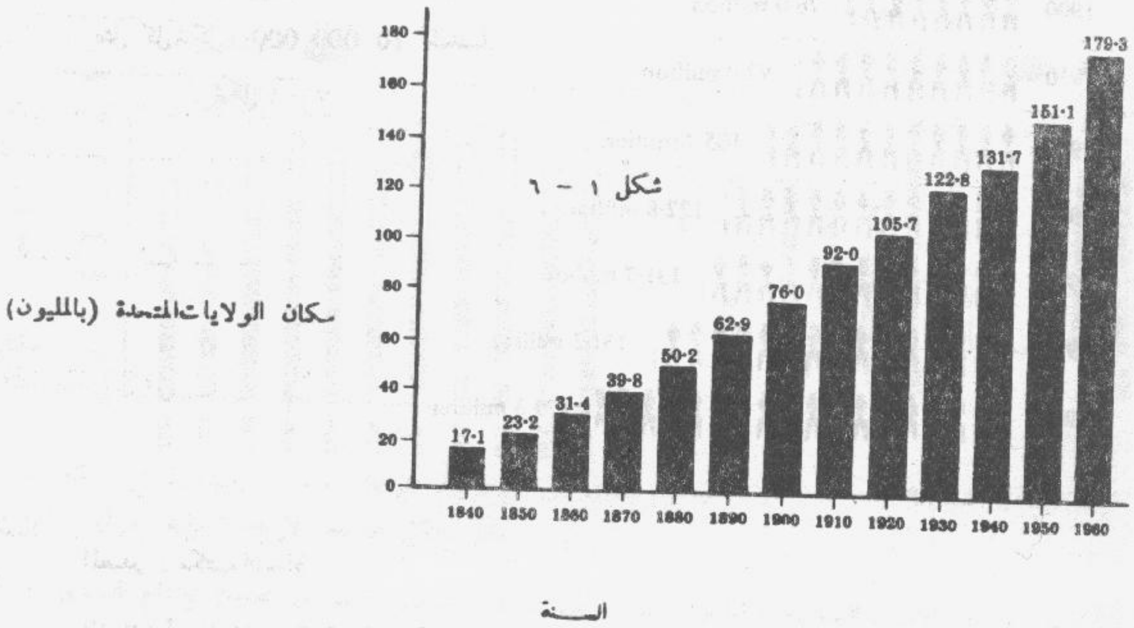
(المصدر : مكتب التعداد)

شكل ١ – ٥

لاحظ أيضاً أن الصفر قد وضع على المحور الرأسى وليس (لأسباب واضحة) على المحور الأفقى . وبشكل عام يجب أن يوضح الصفر وبخاصة على المحور الرأسى .

فإذا كان من المستحيل وضع الصفر لأى سبب وإذا كان حذفه قد يؤدى إلى استنتاجات خاطئة بواسطة القارىء فإنه من الممكن لفت النظر إلى هذا الحذف بإحدى الوسائل كما هو موضح فى المسألة ١ – ٢٦ . الجدول أو الرسم البيانى الذى يوضح توزيع متغير كدالة فى الزمن يسمى سلسلة زمنية .

الطريقة الثانية :

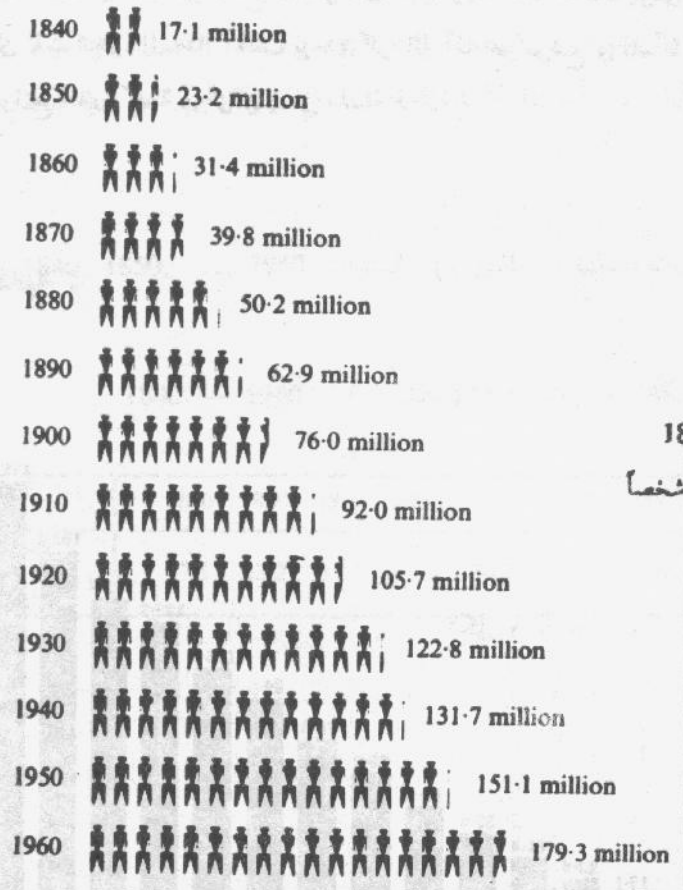


المصدر : مكتب التعداد

الشكل ١ – ٦ يسمى بالأعمدة البيانية ، خرائط الأعمدة أو مخططات الأعمدة . عرض الأعمدة ليس له أى دلالة فى هذه الحالة ويمكن أن يأخذ أى حجم مادامت الأعمدة لاتتراكب فوق بعضها .

الأرقام الموضحة على الأعمدة من الممكن تركها أو حذفها . فإذا أبقينا عليها فإن التدريج الرأسى يصبح غير ضرورى ومن الممكن حذفه .

الطريقة الثالثة :



سكان الولايات المتحدة

خلال الأعوام 1840 to 1960

يمثل كل شكل 10 000 000 شخصاً

شكل ١ – ٧

المصدر : مكتب التعداد

الخرائط أو المخططات كالتى فى الشكل ١ – ٧ تسمى بالرسوم التصويرية أو الخرائط المصورة . وعادة تستخدم لتوضيح البيانات الإحصائية بطريقة مشوقة للعامة . وكثير من هذه الرسوم التصويرية تظهر مقدرة كبيرة على الابتكار والابداع فى فن توضيح البيانات .

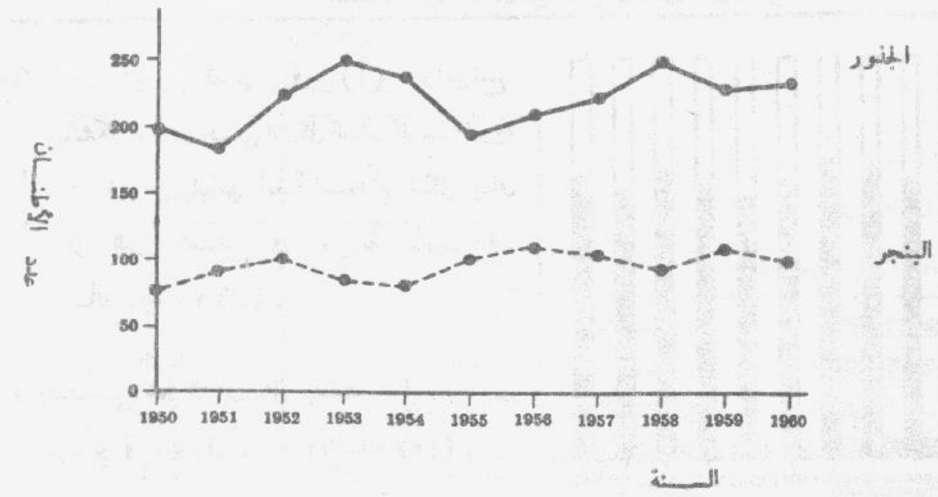
الأرقام على يمين الرسوم فى الرسم التصويرى السابق يمكن إدراجها أو عدم إدراجها وعند حذفها فإنه يظل من الممكن القارئ تقدير عدد السكان إلى أقرب خمسة ملايين شخص .

١ – ٢٤ عبر بيانياً عن بيانات المسألة ١ – ١٤ باستخدام

(أ) الخطوط البيانية (ب) الأعمدة البيانية

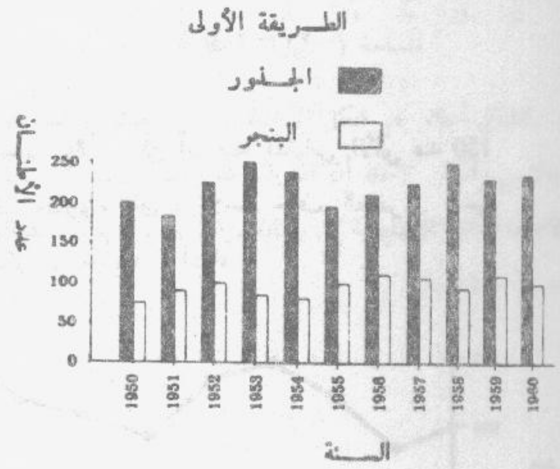
الحـل :

(أ)

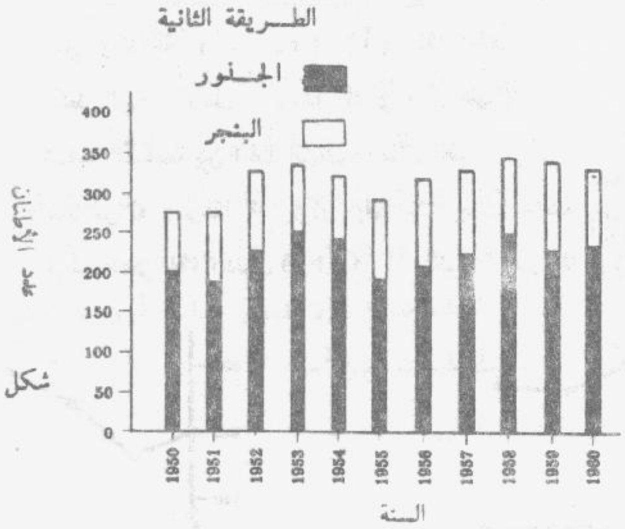


شكل ١ — ٨

(ب)



شكل ١ — ٩



شكل ١ — ١٠

يسمى هذا الشكل بخريطة الأعمدة البيانية المجزأة

١ — ٢٥ (أ) عبر عن عدد الأطنان السنوية من الجذور والبنجر فى المسألة ١ — ١٤ كنسبة من مجموع الإنتاج السنوى .

(ب) ارسم النسب التى حصلت عليها فى (أ)

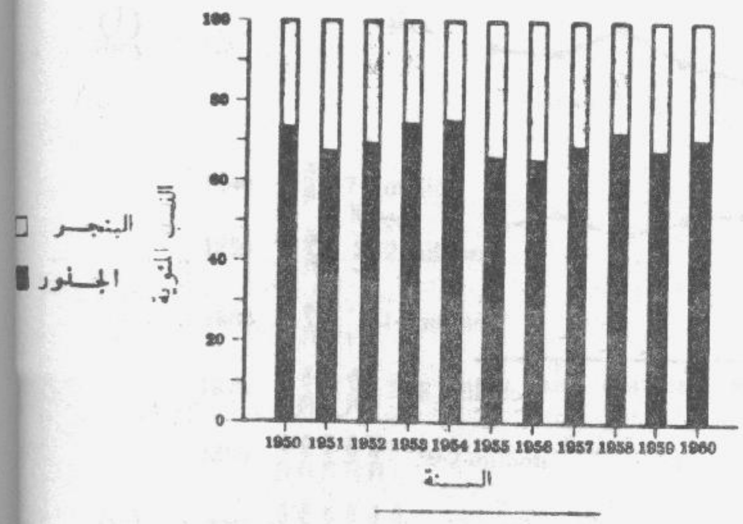
الحـل :

(أ) فى 1950 نسبة الجذور $72{\cdot}7\% = \frac{200}{200+75} =$ ونسبة البنجر $= 100\% - 72{\cdot}7\% = 27{\cdot}3\%$

جـدول ١ — ٣

السـنة	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960
نسبة الجـذور	72·7	67·3	69·2	74·6	75·0	66·1	65·6	68·2	72·5	67·6	70·1
نسبة البنجر	27·3	32·7	30·8	25·4	25·0	33·9	34·4	31·8	27·5	32·4	29·9

(ب) الرسم البياني للنسب في (أ) والموضح بالشكل ١-١١ يسمى الشكل البياني للنسب المئوية المجزأة . من الممكن أيضاً استخدام شكل بياني مثل الذي استخدم في الطريقة الأولى لحل المسألة ١ - ٢٤ (ب) .

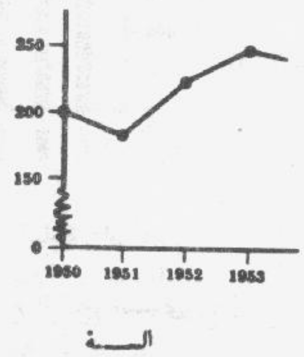


شكل ١ - ١١

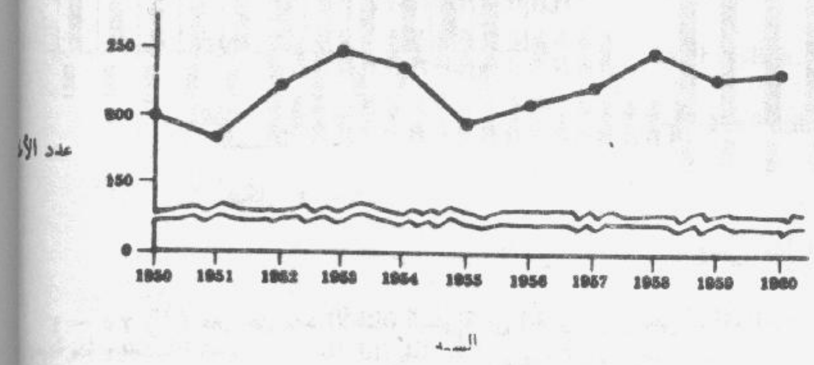
١ - ٢٦ باستخدام الخط البياني مثل بيانات انتاج الجذور الموضح في الجدول ١ - ١ بالمسألة (١٤) .

الحـل :

الخط البياني المطلوب يمكن الحصول عليه من حل (المسألة ١ - ٢٤) (أ) وذلك بحذف الخط البياني الأدنى . وهذا يؤدي إلى ظهور مساحة مضاعفة بين الخط البياني الأعلى والمحور الرأسي . ولتجنب ذلك يمكن أن نبدأ المقياس الأفقي عند 150 بدلا من 0 . وهذا قد يؤدي إلى استنتاجات خاطئة من جانب القارىء الذي لا يلاحظ حذف الصفر . وحتى نوجه النظر لهذا الحذف فمن الممكن أن يكون الرسم كما في (الشكل ١ - ١٢) أدناه .



شكل ١ - ١٢



شكل ١ - ١٣

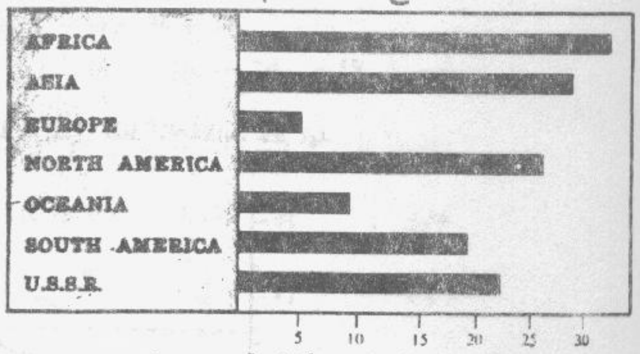
أسلوب آخر يمكن استخدامه حتى نوجه النظر إلى حذف الصفر نستخدم خطاً متعرجاً على أحد الاحداثيات كما هو موضح (بالشكل ١ - ١٣) أعلاه .

١ - ٢٧ الجدول ١ - ٤ يظهر مساحات القارات المختلفة في العالم معبراً عنها بمليون الكيلومترات المربعة ، عبر بيانياً عن هذه البيانات .

الطريقة الأولى :

الشكل ١ – ١٤

مساحات قارات العالم
(من واقع بيانات الأمم المتحدة)



المساحة (بمليون كيلومتر مربع)

الشكل أعلاه هو شكل الأعمدة البيانية حيث الأعمدة أفقية بدلا بدلا من رأسية . لاحظ أن القارات قد رتبت حسب الترتيب الأبجدى لأسمائها (باللغة الإنجليزية) . وكان من الممكن ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً حسب مساحاتها .

جدول ١ – ٤

مساحات قارات العالم

القارة	المساحة بمليون كيلومتر (مربع)
أفريقيا	30.3
آسيا	26.9
أوروبا	4.9
أمريكا الشمالية	24.3
استراليا و نيوزيلندا	8.5
أمريكا الجنوبية	17.9
الاتحاد السوفييتى	20.5
المجموع	133.3

المصدر الأمم المتحدة

ملحوظة ١ – مساحة أوروبا لاتتضمن مساحة الاتحاد السوفيتى والبلاد الخاضعة لسيطرته حيث ظهر فى خانة الـ *U.S.S.R* (الاتحاد السوفيتى)

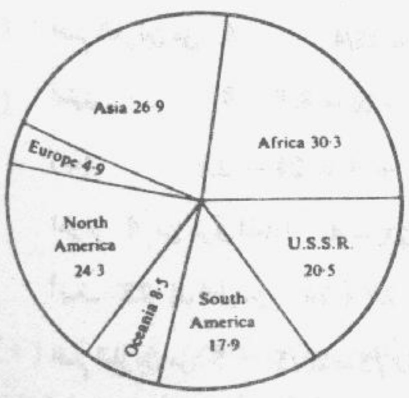
ملحوظة ٢ – لاتتضمن مساحة أوروبا تركيا حيث ظهرت ضمن آسيا .

الطريقة الثانية :

(الشكل ١ – ١٥) يسمى بالرسم الدائرى أو الخريطة التوضيحية الدائرية . لرسم هذا الشكل تستخدم النتيجة بأن المساحة الكلية 133.3 مليون كيلومتر مربع وهذه تقابل مجموع درجات قوس الدائرة أى $360°$.

وبهذا فإن كل مليون كيلومتر مربع يقابله $360°/133.3$
ومن هذا فإن أفريقيا ومساحتها 30.3 مليون كيلومتر مربع يقابلها قوس المقدار $30.3\,(360°/133.3) = 82°$ بينما آسيا ، أوروبا ، أمريكا الشمالية استراليا ونيوزيلندا ، أمريكا الجنوبية والاتحاد السوفيتى يقابلها قوس المقدار $73°, 13°, 66°, 23°, 48°$ and $55°$ على التوالى .
وباستخدام المنقلة فإن خطوط التقسيم المطلوبة يمكن رسمها .

مساحة قارات العالم
(بمليون كيلومتر مربع)



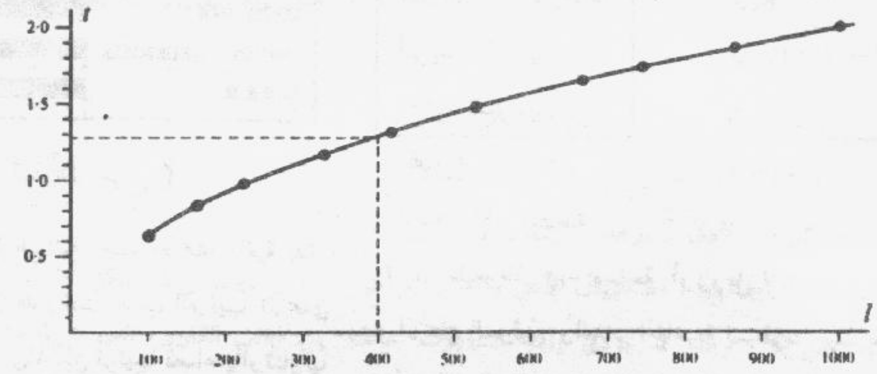
شكل ١ – ١٥

٩ – ٢٨ الملاحظات التالية سجلت فى معمل للطبيعة للزمن t (بالثوانى) اللازم لكى يكمل بندول طوله l (بالمليمترات) اهتزازة واحدة (أ) أعرض بيانياً t كدالة فى l (ب) من الرسم قدر t لبندول طوله 400 مليمتر

l	101	162	222	338	420	534	667	745	866	1000
t	0·64	0·81	0·95	1·17	1·30	1·47	1·65	1·74	1·87	2·01

الحـــل :

(أ) الخط البيانى الموضح بالشكل ١ – ١٦ حصلنا عليها بتوصيل نقط الملاحظات بخط ممهد .



شكل ١ – ١٦

(ب) القيمة المقدرة لـ t هى 1.27 ثانية .

المعادلات :

١ – ٢٩ حل المعادلات التالية :

(أ) $4a - 20 = 8$

أضف 20 إلى طرفى المعادلة $4a - 20 + 20 = 8 + 20$ أو $4a = 82$

اقسم الطرفين على 4 : $4a/4 = 28/4$ و $a = 7$

تحقيق : $4(7) - 20 = 8, 28 - 20 = 8, 8 = 8$

(ب) $3X + 4 = 24 - 2X$

اطرح 4 من طرفى المعادلة $3X + 4 = 24 - 2X - 4$ أو $3X = 20 - 2X$

أضف $2X$ إلى الطرفين $3X + 2X = 20 - 2X + 2X$ أو $5X = 20$

اقسم الطرفين على 5 : $5X/5 = 20/5$ و $X = 4$

تحقيق : $3(4) + 4 = 24 - 2(4), 12 + 4 = 24 - 8, 16 = 16$

من الممكن الحصول على الحل بطريقة أسرع بمعلومية أنه من الممكن نقل أو تحريك أى حد من أحد طرفى المعادلة إلى الطرف الآخر بعد تغيير إشاراته . وبهذا يمكن أن نكتب

$$3X + 4 = 24 - 2X, \quad 3X + 2X = 24 - 4, \quad 5X = 20, \quad X = 4$$

(جـ) $$18 - 5b = 3(b + 8) + 10$$

$$18 - 5b = 3b + 24 + 10, \; 18 - 5b = 3b + 34$$

للتحويل $18 - 34 = -5b - 3b$ أو $-8b = 16$

بالقسمة على $-8, \; \frac{-8b}{-8} = \frac{16}{-8}$ ، $b = -2$

تحقيق : $18 - 5(-2) = 3(-2 + 8) + 10, \; 18 + 10 = 3(6) + 10, \; 28 = 28$

(د) $$\frac{Y + 2}{3} + 1 = \frac{Y}{2}$$

اضرب أولا الطرفين فى 6 ، العامل المشترك الأصغر للمقام

$$6\left(\frac{Y + 2}{3} + 1\right) = 6\left(\frac{Y}{2}\right), \quad 6\left(\frac{Y + 2}{3}\right) + 6(1) = \frac{6Y}{2}, \; 2(Y + 2) + 6 = 3Y$$
$$2Y + 4 + 6 = 3Y, \quad 2Y + 10 = 3Y, \quad 10 = 3Y - 2Y, \quad Y = 10$$

تحقيق : $$\frac{10 + 2}{3} + 1 = \frac{10}{2}, \; \frac{12}{3} + 1 = \frac{10}{2}, \; 4 + 1 = 5, \; 5 = 5$$

١ – ٣٠ حل كل من مجموعات المعادلات الآتية التالية :

(أ) $$\left.\begin{array}{l} 3a - 2b = 11 \\ 5a + 7b = 39 \end{array}\right\}$$

اضرب المعادلة الأولى فى 7 : $21a - 14b = 77$ (١)

اضرب المعادلة الثانية فى 2 : $10a + 14b = 78$ (٢)

أجمع $31a = 155$

اقسم على 31 : $a = 5$

لاحظ أنه بضرب المعادلات المعطاة فى الأرقام المناسبة فإنه يمكننا كتابة معادلتين مكافئتين وهما (١) ، (٢) . حيث تتساوى القيمة العددية لمعاملات المجهول . وبجمع المعادلتين فإنه يمكن حذف المجهول b وبهذا نحصل على قيمة a .

وبالتعويض عن a فى المعادلة الأولى : $3(5) - 2b = 11, \; -2b = -4, \; b = 2$.

وبهذا نحصل على $a = 5$ ، $b = 2$

تحقيق :
$$3(5) - 2(2) = 11,\ 15 - 4 = 11,\ 11 = 11.$$
$$5(5) + 7(2) = 39,\ 25 + 14 = 39,\ 39 = 39$$

(ب)
$$\left.\begin{array}{l} 5X + 14Y = 78 \\ 7X + 3Y = -7 \end{array}\right\}$$

اضرب المعادلة الأولى فى 3 $\quad 15X + 42Y = 234 \quad$ (١)

اضرب المعادلة الثانيه فى 14 − $\quad 98X - 42Y = 98 \quad$ (٢)

اجمع $\quad -83X = 332$

اقسم على 83 − : $\quad X = -4$

بالتعويض عن $X = -4$ فى المعادلة الأولى $5(-4) + 14Y = 78,\ 14Y = 98.\ Y = 7$

أى $X = -4,\ \ Y = 7$

تحقيق :
$$5(\ 4) \cdot 14(7) \quad 78,\ -20 \cdot 98 = 78,\ 78 = 78.$$
$$7(\ 4) \cdot 3(7) \quad -7,\ -28 \cdot 21 = -7,\ -7 = -7$$

(جـ)
$$\left.\begin{array}{l} 3a + 2b + 5c = 15 \\ 7a - 3b + 2c = 52 \\ 5a + b - 4c = 2 \end{array}\right\}$$

اضرب المعادلة الأولى فى 2 :

اضرب المعادلة الثانية فى 5 − :

اجمع

$$\begin{array}{rl} 6a + 4b + 10c &= 30 \\ -35a + 15b - 10c &= 260 \\ \hline -29a + 19b &= 230 \end{array} \qquad (١)$$

اضرب المعادلة الثانىة فى 2 ·

ضع المعادلة الثالثة :

$$\begin{array}{rl} 14a - 6b + 4c &= 104 \\ 5a + b - 4c &= 2 \\ \hline 19a - 5b &= 106 \end{array} \qquad (٢)$$

وبهذا نكون قد حذفنا c ويبقى لدينا المعادلتين (١) ، (٢) والتى يمكن حلها آنياً لنحصل على قيم $a,\ b$.

اضرب المعادلة (١) فى 5 :

اضرب المعادلة (٢) فى 19 :

اجمع

اقسم على 216 :

$$\begin{array}{rl} -145a + 95b &= -1150 \\ 361a - 95b &= 2014 \\ \hline 216a &= 864 \\ a &= 4 \end{array}$$

بالتعويض عن $a = 4$ فى (١) أو (٢) نجد أن $b = -6$

بالتعويض عن $b = -6,\ a = 4$ فى أى من المعادلات المعطاة نحصل على قيمة $c = 3$.

أى أن $a = 4,\ b = -6.c = 3$

تحقيق : $3(4) + 2(-6) + 5(3) = 15,\ 15 = 15.\ 7(4) - 3(-6) + 2(3) = 52,\ 52 = 52.$
$5(4) + (-6) - 4(3) = 2,\ 2 = 2.$

المتباينات :

١ - ٣١ عبر بالكلمات عن معنى مايلى :

(أ) $N > 30$ N أكبر من 30

(ب) $X \leqq 12$ X أقل من أو تساوى 12

(جـ) $0 < p \leqq 1$ p أكبر من الصفر وأقل من أو تساوى الواحد

(د) $\mu - 2t < X < \mu + 2t$ X أكبر من $\mu - 2t$ وأقل من $\mu + 2t$

١ - ٣٢ ترجم مايلى إلى رموز

(أ) المتغير X يأخذ فيما بين 5,2 بما فى ذلك 5,2 : $2 \leqq X \leqq 5$

(ب) الوسط الحسابى $\bar{X}$ أكبر من 28.42 ولكن أقل من 31.56 : $28.42 < X < 31.56$:

(جـ) m مقدار موجب أقل من أو يساوى 10 : $0 < m \leqq 10$

(د) P مقدار غير سالب : $P \geqq 0$

١ - ٣٣ باستخدام رموز المتباينات رتب الأرقام $3{\cdot}42,\ -0{\cdot}6,\ -2{\cdot}1,\ 1{\cdot}45,\ -3$

(أ) ترتيباً تصاعدياً حسب قيمها

(ب) ترتيباً تنازلياً حسب قيمها

الحل :

(أ) $-3 < -2{\cdot}1 < -0{\cdot}6 < 1{\cdot}45 < 3{\cdot}42$

(ب) $3{\cdot}42 > 1{\cdot}45 > -0{\cdot}6 > -2{\cdot}1 > -3$

لاحظ أنه عند تعيين الأرقام كنقط على خط (أنظر المسألة ١ - ١٨) فإنها تتزايد من اليسار إلى اليمين .

١ – ٣٤ فى كل مما يلى أوجد المتباينة المقابلة فى X . بمعنى حل كل متباينة فى X

(أ) $2X < 6$ اقسم الطرفين على 2 لتحصل على $X < 3$

(ب) $3X - 8 \geq 4$ بإضافة 8 على كلا الطرفين $3X \geq 12$ أقسم الطرفين على 3 لتحصل على $X \geq 4$.

(جـ) $6 - 4X < -2$ بإضافة 6 - على كلا الطرفين ، $-4X < -8$ وبقسمة الطرفين على -4 تحصل على $X > 2$

لاحظ أنه كما فى المعادلات يمكن نقل حد من طرف إلى آخر من أطراف المتباينة مع تغيير إشارة الحد المنقول . مثال الجزء (ب)

(د) $-3 < \frac{X - 5}{2} < 3$ بالضرب فى 2 ، $-6 < X - 5 < 6$ ، بإضافة 5 . $-1 < X < 11$

(هـ) $-1 \leq \frac{3 - 2X}{5} \leq 7$ بالضرب فى 5 ، $-5 \leq 3 - 2X \leq 35$ ، بإضافة 3 — تحصل على $-8 \leq -2X \leq 32$ ، بالقسمة على 2— ، $4 \geq X \geq -16$ أو $-16 \leq X \leq 4$

اللوغاريتمات والاعداد المقابلة للوغاريتمات :

١ – ٣٥ حدد العدد البيانى للوغاريتمات المعتادة (الأساس 10) لكل من الأرقام التالية :

(أ) 57 (جـ) 5.63 (هـ) 982.5 (ز) 186000 (ط) 0.7314 (ك) 0.0071

(ب) 57.4 (د) 35.63 (و) 7824 (ح) 0.71 (ى) 0.0325 (ل) 0.0003

الحل :

(أ) 1 (جـ) 0 (هـ) 2 (ز) 5 (ط) $9 - 10$ (ك) $7 - 10$

(ب) 1 (د) 1 (و) 3 (ح) $9 - 10$ (ى) $8 - 10$ (ل) $6 - 10$

١ – ٣٦ تحقق من اللوغاريتمات التالية :

(أ) $\log 87.2$ الجزء العشرى $= 0.9405$ ، العدد البيانى $= 1$ وبهذا يكون $\log 87.2 = 1.9405$

(ب) $\log 37\,300 = 4.5717$ (د) $\log 9.21 = 0.9643$

(جـ) $\log 753 = 2.8768$ (هـ) $\log 54.50 = 1.7364$

(و) $\log 0.382$ الجزء العشرى = 0.5821 ، العدد البيانى = وبهذا يكون $10 - 9.5821 = \log 0.382$

(ز) $\log 0.001\,59 = 7.2014 - 10$ (ط) $\log 0.000\,827 = 6.9175 - 10$

(ح) $\log 0.0753 = 8.8768 - 10$ (ى) $\log 0.0503 = 8.7016 - 10$

(ك) $\log 4.638$ الجزء العشرى لـ $\log 4638$ هو 0.8 من المسافة بين الجزء العشرى لـ $\log 4630$ والجزء العشرى لـ $\log 4640$

الجزء العشرى لـ $\log 4640 = 0.6665$

الجزء العشرى لـ $\log 4630 = 0.6656$

الفرق الجدول $= 0.0009$

الجزء العشرى $\log 4.638 = 0.6656 + (0.8)(0.00009)$

$= 0.6663$ إلى أربعة أرقام عشرية

وبهذا يكون $0.6663 = \log 4.638$

وهذه العملية تسمى الاستكمال الخطى

وإذا رغبنا ، فإن خانة الفروق فى الجدول صفحة ٥٣٦ و ٥٣٧ من الممكن استخدامها لإيجاد الجزء العشرى مباشرة $(6656 + 7)$

(ل) $\log 6.753 = 0.8295\ (8293 + 2)$ (ع) $\log 0.2548 = 9.4062 - 10\ (4048 + 14)$

(م) $\log 183.2 = 2.2630\ (2625 + 5)$ (ف) $\log 0.043\,72 = 8.6407 - 10\ (6405 + 2)$

(ن) $\log 43.15 = 1.6350\ (6345 + 5)$ (ص) $\log 0.009\,848 = 7.9933 - 10\ (9930 + 3)$

(س) $\log 876\,400 = 5.9427\ (9425 + 2)$ (ق) $\log 0.000\,178\,8 = 6.2524 - 10\ (2504 + 20)$

١ – ٣٧ تحقق من الأعداد المقابلة للوغاريتمات

(أ) antilog 1.9058

من الجدول فإن الجزء العشرى 0.9058 يقابل الرقم 805 . وبما أن العدد البيانى هو 1 ، فإن العدد به رقمان قبل العلامة العشرية وبهذا يكون العدد المطلوب هو 80.5 أى antilog $1.9058 = 80.5$

(ب) antilog $3.8531 = 7130$ ، antilog $2.1875 = 154$, antilog $0.4997 = 3.16$,

antilog $4.9360 = 86\,300$

(جـ) antilog $7.8657 - 10$

من الجدول فإن الجزء العشرى 0.8657 يقابل الرقم 734 وحيث أن العدد البيانى هو $7 - 10$ فإن الرقم يحتوى على صفرين تاليين مباشرة للعلامة العشرية . وبهذا يكون الرقم المطلوب هو $0.007\,34$

أى $7.8657 - 10 = 0.007\,34$

وإذا رغبنا ، فإن خانة الفرق فى الجدول صفحة ٥٣٦ ، ٥٣٧ من الممكن استخدامها لايجاد الجزء العشرى مباشرة

(د) $\text{antilog } 2.3927 = 0.0247$, $\text{antilog } 9.8267 - 10 = 0.671$,

(هـ) $\text{antilog } 7.7443 - 10 = 0.00555$ $\text{antilog } 9.3842 - 10$

وبما أن الجزء العشرى غير موجود بالجداول فإننا نلجأ إلى الاستكمال :

الجزء العشرى لـ $\log 2430 = 0.3856$		الجزء العشرى المعطى	$= 0.3842$
الجزء العشرى لـ $\log 2420 = 0.3838$		الجزء العشرى التالى فى الصغر	$= 0.3838$
الفرق الجدولى $= 0.0018$		الفرق	$= 0.0004$

وبهذا $2422 = (2430 - 2420)(4\ 18) + 2420$ إلى أربعة أرقام ويكون الرقم المطلوب هو 0.2422.

(و)

$$\text{antilog } 2{\cdot}6715 = 469{\cdot}3 \qquad (3/9 \times 10 = 3 \text{ approx.})$$
$$\text{antilog } 4{\cdot}1853 = 15\,320 \qquad (6/28 \times 10 = 2 \text{ approx.})$$
$$\text{antilog } 0{\cdot}9245 = 8{\cdot}404 \qquad (2/5 \times 10 = 4)$$

(ز)

$$\text{antilog } 1{\cdot}6089 = 0{\cdot}4064 \qquad (4/11 \times 10 = 4 \text{ approx.})$$
$$\text{antilog } 8{\cdot}8907 - 10 = 0{\cdot}077\,75 \qquad (3/6 \times 10 = 5)$$
$$\text{antilog } 1{\cdot}2000 = 15{\cdot}85 \qquad (13/27 \times 10 = 5 \text{ approx.})$$

الحسابات باستخدام اللوغاريتمات :

احسب كلا مما يلى باستخدام اللوغاريتمات :

١ – ٣٨ $P = (3.81)(43.4)$ $\log P = \log 3.81 + \log 43.4$

$$\log 3.81 = 0.5809$$
$$(+)\ \log 43.4 = 1.6375$$
$$\log P = 2.2184$$

إذن $P = \text{antilog } 2.2184 = 165.3$

أو 165 إلى ثلاثة أرقام معنوية لاحظ الدلالة الأسية للحساب حيث

$$(3{\cdot}81)(43{\cdot}4) = (10^{0.5809})(10^{1.6375}) = 10^{0.5809 + 1.6375} = 10^{2.2184} = 165{\cdot}3$$

١ ٣٩ $P = (73.42)(0.004\,620)(0.5143)$ $\log P = \log 73.42 + \log 0.004\,620 + \log 0.5143$

$$\log 73{\cdot}42 = 1{\cdot}8658$$
$$(+)\ \log 0{\cdot}004\,620 = 7{\cdot}6646 - 10$$
$$(+)\ \log 0{\cdot}5143 = 9{\cdot}7112 - 10$$
$$\log P = 19{\cdot}2416 - 20 = 9{\cdot}2416 - 10$$

إذن $P = .1744$

$$P = \frac{(784{\cdot}6)(0{\cdot}0431)}{28{\cdot}23} \qquad \log P = \log 784{\cdot}6 + \log 0{\cdot}0431 - \log 28{\cdot}23$$ ١ - ٤٠

$$\begin{array}{rll} \log 784{\cdot}6 & = & 2{\cdot}8947 \\ (+)\ \log 0{\cdot}0431 & = & \underline{8{\cdot}6345-10} \\ & & 11{\cdot}5292-10 \\ (-)\ \log 28{\cdot}23 & = & \underline{1{\cdot}4507} \\ \log P & = & 10{\cdot}0785-10 = 0{\cdot}0785 \end{array}$$

إذن $P = 1.198$ أو $p = 1.20$ إلى ثلاثة أرقام معنوية لاحظ الدلالة الأسية للحساب . حيث

$$\frac{(784{\cdot}6)(0{\cdot}0431)}{28{\cdot}23} = \frac{(10^{2\cdot8947})(10^{8\cdot6345-10})}{10^{1\cdot4507}} = 10^{2\cdot8947+8\cdot6345-10-1\cdot4507} = 10^{0\cdot0785} = 1{\cdot}198$$

$P = (5{\cdot}395)^8$. $\log P = 8 \log 5{\cdot}395 = 8(0{\cdot}7320) = 5{\cdot}8560$, and $P = 717\,800$ or $7{\cdot}178 \times 10^5$ ١ - ٤١

$P = \sqrt{387{\cdot}2} = (387{\cdot}2)^{1/2}$. $\log P = \frac{1}{2}\log 387{\cdot}2 = \frac{1}{2}(2{\cdot}5879) = 1{\cdot}2940$, and $P = 19{\cdot}68$ ١ - ٤٢

$P = (0{\cdot}083\,17)^{1/5}$. $\log P = \log 0{\cdot}083\,17 = \frac{1}{5}(8{\cdot}9200-10) = \frac{1}{5}(48{\cdot}9200-50) = 9{\cdot}7840-10$, and $P = 0{\cdot}6081$ ١ - ٤٣

$$P = \frac{\sqrt{0{\cdot}003\,654}\,(18{\cdot}37)^3}{(8{\cdot}724)^4\,\sqrt[4]{743{\cdot}8}}. \qquad \log P = \tfrac{1}{2}\log 0{\cdot}003\,654 + 3\log 18{\cdot}37 - (4\log 8{\cdot}724 + \tfrac{1}{4}\log 743{\cdot}8)$$ ١ - ٤٤

البسط N

$$\begin{array}{lllll} \frac{1}{2}\log 0{\cdot}003\,654 & = \frac{1}{2}(7{\cdot}5628-10) & & & \\ & = \frac{1}{2}(17{\cdot}5628-20) & & = & 8{\cdot}7814-10 \\ 3\log 18{\cdot}37 & = 3(1{\cdot}2641) & & = & \underline{3{\cdot}7923} \\ \text{Add:} & & \log N & = & 12{\cdot}5737-10 \\ & & (-)\ \log D & = & \underline{4{\cdot}4806} \\ & & \log P & = & 8{\cdot}0931-10 \\ & & P & = & 0{\cdot}012\,39 \end{array}$$

المقام D

$$\begin{array}{lll} 4\log 8{\cdot}724 = 4(0{\cdot}9407) & = & 3{\cdot}7628 \\ \frac{1}{4}\log 743{\cdot}6 = \frac{1}{4}(2{\cdot}8714) & = & \underline{0{\cdot}7178} \\ \text{Add:} \qquad \log D & = & 4{\cdot}4806 \end{array}$$

١ - ٤٥

$$P = \sqrt{\frac{(874\cdot3)(0\cdot038\,16)(28\cdot53)^3}{(1\cdot754)^4\,(0\cdot007\,352)}}$$

$$\begin{array}{lcll}
\log 874\cdot3 & = 2\cdot9417 & = & 2\cdot9417 \\
\log 0\cdot038\,16 & = 8\cdot5816-10 & = & 8\cdot5816-10 \\
3\log 28\cdot53 & = 3(1\cdot4553) & = & 4\cdot3659 \\
\text{Add:} & & & \overline{15\cdot8892-10} \\
 & & (-) & 8\cdot8424-10 \\
 & & & \overline{7\cdot0468}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
4\log 1\cdot754 = 4(0\cdot2440) & = & 0\cdot9760 \\
\log 0\cdot007\,352 & = & 7\cdot8664-10 \\
\text{Add:} & & \overline{8\cdot8424-10}
\end{array}$$

Then $\log P = \frac{1}{2}(7\cdot0468) = 3\cdot5234$, and $P = 3338$.

مسائل اضافية

المتغيرات :

١ - ٤٦ حدد أى من البيانات التالية تمثل بيانات متقطعة وأياً منها تمثل بيانات متصلة :

(أ) عدد ملليمترات الأمطار الساقطة على مدينة ما خلال أشهر السنة المختلفة .

(ب) سرعة سيارة بالكيلومترات / ساعة .

(ج) عدد أوراق النقد فئة 5 £ المتداولة بالمملكة المتحدة فى فترة ما .

(د) القيمة الإجمالية للأسهم المباعة يومياً فى سوق الأوراق المالية .

(هـ) عدد الطلبة المسجلين بجامعة على مدار عدد من السنين .

الحـل : (أ) متصلة (ب) متصلة (ج) متقطعة (د) متقطعة (هـ) متقطعة .

١ - ٤٧ وضح مجال كل من المتغيرات التالية وحدد أيا من هذه المتغيرات متصل وأى منها متقطع .

(أ) العدد W من كيلوجرامات القمح التى ينتجها الفدان فى مزرعة على مدار عدد من السنين .

(ب) العدد N للافراد فى عائلة .

(ج) الحالة الاجتماعية لشخص .

(د) الزمن t لطيران صاروخ .

(هـ) العدد P للبتلات فى زهرة .

الحـل :

(أ) الصفر ومابعده ، متصل (ب) ... ,2, 3 متقطعة .

(ج) أعزب ، متزوج ، مطلق ، منفصل ، أرمل ، متقطعة .

(د) الصفر وما بعده ، متصل .

(هـ) ... ,0, 1, 2 متقطعة .

تقريب البيـانات ، الرموز العلميـة والأرقام المعنوية :

١ – ٤٨ قرب الأرقام التالية إلى درجة الدقة المشار إليها :

(أ)	3256	أقرب مئة	(و)	3 502 378	أقرب مليون
(ب)	5·781	أقرب نسبة من العشرة	(ز)	148·475	أقرب وحدة
(جـ)	0·0045	أقرب نسبة من ألف	(ح)	0·000 098 501	أقرب نسبة من المليون
(د)	46·7385	أقرب نسبة من مئة	(ط)	2184·73	أقرب عشرة
(هـ)	125·9995	إلى رقين عشرين	(ى)	43·875 00	أقرب نسبة من المئة

الحـل :

(أ) 3300 (ب) 5.8 (جـ) 0.004 (د) 46.74 (هـ) 126.00 (و) 4000 000 (ز) 148
(ح) 0.000 099 (ط) 2180 (ى) 43.88 .

١ – ٤٩ عبر عن الأرقام التالية بدون استخدام قوى الرقم 10

(أ) 132.5×10^{4} (ب) 418.72×10^{-5} (جـ) 280×10^{-7} (د) 7300×10^{6} (هـ) 3.487×10^{-4}
(و) 0.0001850×10^{5}

الحـل :

(أ) 1325000 (ب) 0.004 187 2 (جـ) 0.000 028 0 (د) 7 300 000 000 (هـ) 0.000 3487
(و) 18.50

١ – ٥٠ ماهو عدد الأرقام المعنوية فى الأرقام التالية إذا افترضنا أن الأرقام قد سجلت بدقة :

(أ)	2·54 mm	(د)	3·51 million litres	(و)	378 people	(ح)	$4{\cdot}50\times10^{-3}$ km
(ب)	0·004 500 m	(هـ)	10·000 100 m	(ز)	378 g	(ط)	$500{\cdot}8\times10^{5}$ kg
(جـ)	3 510 000 litres					(ى)	100·00 km

الحـل : (أ) 3 (ب) 4 (جـ) 7 (د) 3 (هـ) 8 (و) غيرمحدود (ز) 3 (ح) 3
(ط) 4 (ى) 5

١ – ٥١ ماهو الحد الأقصى للخطأ فى القياسات التالية إذا افترضنا أنها مسجلة بدقة ؟ حدد عدد الأرقام المعنوية لكل رقم فى كل حالة .

(أ)	7·20 million litres	(جـ)	5280 metres	(هـ)	186 000 metres per second
(ب)	0·000 048 35 millimetres	(د)	$3{\cdot}0\times10^{8}$ metres	(و)	186 thousand metres per second

الحـل :

(أ) 0·005 million or 5000 litres; 3 (جـ) 0·5 m; 4 (هـ) 0·5 m/s; 6

(ب) 0·000 000 005 or 5 × 10^{-9} mm; 4 (د) 0·05 × 10^8 or 5 × 10^6 m; 2 (و) 0·5 thousand or 500 m/s; 3

١ - ٥٢ اكتب الأرقام التالية باستخدام الرموز العلمية ، مفترضاً أن جميع الارقام معنوية إلا إذا ذكر غير ذلك .

(أ) 0.000317 (ب) 428 000 000 (أربعة أرقام معنوية)

(جـ) 21 600.00 (د) 0.000 009810

(هـ) 732 ألف (و) 18.0 عشر الألف

الإجابة :

(أ) 3.17×10^{-4} (ب) 4.280×10^{8} (جـ) $2.160\ 000\times10^{4}$ (د) 9.810×10^{-6}

(هـ) 7.32×10^{5} (و) 1.80×10^{-3}

العمليات الحسابية :

١ - ٥٣ وضح أن (أ) حاصل ضرب (ب) حاصل قسمة ، الرقمين 5.16 ، 72.48 مفترضاً أن أرقامها المعنوية هي أربعة وثلاثة على التوالي لايمكن أن يكون دقيقاً لأكثر من ثلاثة أرقام معنوية ، اكتب ناتج الضرب وناتج القسمة لدرجة الدقة المسجلة .

الاجابة : (أ) 374 (ب) 14.0

١ - ٥٤ أجر العمليات الموضحة أدناه . مفترضاً أن الأرقام مسجلة بدقة مالم يذكر خلاف ذلك

(أ) $0{\cdot}36 \times 781{\cdot}4$ (جـ) $5{\cdot}78 \times 2700 \times 16{\cdot}00$ (هـ) $\sqrt{120 \times 0{\cdot}5386 \times 0{\cdot}4614}$ (120 exact)

(ب) $\dfrac{873{\cdot}00}{4{\cdot}881}$ (د) $\dfrac{0{\cdot}004\,80 \times 2300}{{\cdot}2084}$ (و) $\dfrac{(416\,000)(0{\cdot}000\,187)}{\sqrt{73{\cdot}84}}$

(ز) $14{\cdot}8641 + 4{\cdot}48 - 8{\cdot}168 + 0{\cdot}361\,25$

(ح) $4\,173\,000 - 170\,264 + 1\,820\,470 - 78\,320$ الأرقام مسجلة بدقة إلى 4, 6, 6, 6 رقماً معنوياً

(ط) $\sqrt{\dfrac{7(4{\cdot}386)^2 - 3(6{\cdot}47)^2}{6}}$ الأرقام 3, 6, 7 أرقام دقيقة (ى) $4{\cdot}120\sqrt{\dfrac{3{\cdot}1416[(9{\cdot}483)^2 - (5{\cdot}075)^2]}{0{\cdot}000\,198\,0}}$

الإجابة :

(a) 280 (two sig fig.), or 2·8 hundred, or 2·8 × 10^2. (*b*) 178·9. (*c*) 250 000 (three sig. fig.), or 250 thousand, or 250 × 10^3. (*d*) 53·0. (*e*) 5·461. (*f*) 9·05. (*g*) 11·54. (*h*) 5 745 000 (four sig fig.), or 5·745 thousand, or 5·745 million, 5·745 × 10^6. (*i*) 1·2. (*j*) 4157

١ - ٥٥ احسب قيمة كل مما يلي إذا كانت $U = -2, V = \frac{1}{2}, W = 3, X = -4, Y = 9, Z = \frac{1}{6}$, حيث يفترض أن جميع الأرقام دقيقة .

(أ) $4U + 6V - 2W$ (هـ) $\sqrt{U^2 - 2UV + W}$ (ح) $\frac{X - 3}{\sqrt{(Y - 4)^2 + (U + 5)^2}}$

(ب) $\frac{XYZ}{UVW}$ (و) $3X(4Y + 3Z) - 2Y(6X - 5Z) - 25$ (ط) $X^3 + 5X^2 - 6X - 8$

(جـ) $\frac{2X - 3Y}{UW + XV}$ (ز) $\sqrt{\frac{(W - 2)^2}{V} + \frac{(Y - 5)^2}{Z}}$ (ى) $\frac{U - V}{\sqrt{U^2 + V^2}}[U^2V(W + X)]$

(د) $3(U - X)^2 + Y$

الإجابة :

(أ) -11 (هـ) 3 (ح) $-7/\sqrt{34}$, or $-1{\cdot}200\,49$ approx.

(ب) 2 (و) -16 (ط) 32

(جـ) $35/8$ or $4{\cdot}375$ (ز) $\sqrt{98}$, or $9{\cdot}899\,61$ approx. (ى) $10/\sqrt{17}$, or $2{\cdot}425\,36$ approx.

(د) 21

الدوال ، الجداول والاشكال البيانية :

١ - ٥٦ تتحدد قيمة المتغير Y من قيمة المتغير X طبقاً للمعادلة $Y = 10 - 4X$

(أ) أوجد قيمة Y إذا أخذت X القيم $X = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ أظهر هذه النتائج فى جدول

(ب) أوجد قيمة Y إذا أخذت X القيم $X = -2{\cdot}4, -1{\cdot}6, -0{\cdot}8, 1{\cdot}8, 2{\cdot}7, 3{\cdot}5, 4{\cdot}6$

(جـ) إذا كان اعتماد Y على X يعبر عنه بالعلاقة $Y = F(X)$ أوجد $F(2{\cdot}8), F(-5), F(\sqrt{2}), F(-\pi)$

(د) ماهى قيمة X المقابلة لقيم Y المساوية لـ $Y = -2, 6, -10, 1{\cdot}6, 16, 0, 10$ ؟

(هـ) عبر عن X كدالة صريحة فى Y .

الإجـابة :

(أ) $22, 18, 14, 10, 6, 2, -2, -6, -10$ (جـ) $-1{\cdot}2, 30, 10 - 4\sqrt{2} = 4{\cdot}34$ approx., $10 + 4\pi = 22{\cdot}57$ approx.

(ب) $19{\cdot}6, 16{\cdot}4, 13{\cdot}2, 2{\cdot}8, -0{\cdot}8, -4, -8{\cdot}4$ (د) $3, 1, 5, 2{\cdot}1, -1{\cdot}5, 2{\cdot}5, 0$. (هـ) $X = \frac{1}{4}(10 - Y)$

١ - ٥٧ إذا كانت $Z = X^2 - Y^2$, أوجد قيمة Z عندما :

(أ) $X = -2, Y = 3$ (ب) $X = 1, Y = 5$

(جـ) باستخدام الرمز الدالى $Z = F(X, Y)$ أوجد $F(-3, -1)$

الإجـابة : (أ) -5 (ب) -24 (جـ) 8

١ – ٥٨ إذا كانت $W = 3XZ - 4Y^2 + 2XY$ أوجد W عندما (أ) $X = 1, Y = -2, Z = 4$

(ب) $X = -5, Y = -2, Z = 0$ (جـ) إذا استخدمنا الرمز الدالى $W = F(X, Y, Z)$ أوجد $F(3, 1, -2)$

الإجـابة : (أ) -8 (ب) 4 (جـ) -16

١ – ٥٩ عين باستخدام نظام الاحداثيات المتعامدة النقط التى أحداثياتها :

(أ) $(3, 2)$ (ب) $(2, 3)$ (جـ) $(-4, 4)$ (د) $(4, -4)$

(هـ) $(-3, -2)$ (و) $(-2, -3)$ (ز) $(-4.5, 3)$ (ح) $(-1.2, -2.4)$

(ط) $(0, -3)$ (ى) $(1.8, 0)$

١ – ٦٠ عبر بيانياً عن المعادلات (أ) $y = 10 - 4x$ (أنظر المسألة ١ – ٥٦)

(ب) $y = 2x + 5$ (جـ) $y = \frac{1}{3}(x - 6)$, (د) $2x + 3y = 12$, (هـ) $3x - 2y = 6$.

١ – ٦١ عبر بيانياً عن المعادلات (أ) $y = 2x^2 + x - 10$ (ب) $y = 6 - 3x - x^2$

١ – ٦٢ عبر بيانياً عن المعادلة $y = x^3 - 4x^2 + 12x - 6$.

١ – ٦٣ الجدول التالى يوضح عدد العاملين بالزراعة وغير العاملين بها بالولايات المتحدة الأمريكية فى الأعوام 1840 – 1950 عبر بيانياً عن هذه البيانات باستخدام (أ) الخطوط البيانية (ب) خرائط الأعمدة البيانية (جـ) خرائط الأعمدة البيانية المجزأة .

السنة	1840	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950
العمال الزراعيين (بالمليون)	3·7	4·9	6·2	6·9	8·6	9·9	10·9	11·6	11·4	10·5	8·8	6·8
العمال غير الزراعيين (بالمليون)	1·7	2·8	4·3	6·1	8·8	13·4	18·2	25·8	31·0	38·4	42·9	52·2

المصدر : مصلحة التجارة ، مكتب التعدادات

١ - ٦٤ صمم رسماً تصويرياً ملائماً لإظهار التغيرات فى أعداد

(أ) العمال الزراعيين (ب) العمال غير الزراعيين

فى بيانات المسألة السابقة . هل يمكنك تصميم رسم تصويرى يظهر التغيرات فى كل من (أ) ، (ب) معاً ؟ .

١ - ٦٥ باستخدام بيانات المسألة ١ - ٦٣ ارسم شكلا بيانياً يوضح النسب المئوية للعاملين

(أ) الزراعيين (ب) غير الزراعيين . هل يمكنك تصميم شكل بيانى يظهر كلا من (أ) ، (ب) فى نفس الوقت ؟

١ - ٦٦ الجدول التالى يظهر معدل المواليد والوفيات لكل 1000 من السكان بالولايات المتحدة فى الأعوام 1955 و 1915 عبر بيانياً عن هذه البيانات باستخدام شكل بيانى مناسب .

السنة	1915	1920	1925	1930	1935	1940	1945	1950	1955
معدل المواليد لكل 1000 من السكان	25·0	23·7	21·3	18·9	16·9	17·9	19·5	23·6	24·6
معدل الوفيات لكل 1000 من السكان	13·2	13·0	11·7	11·3	10·9	10·8	10·6	9·6	9·3

المصدر : مصلحة الصحة والتعليم والخدمات

١ - ٦٧ الجدول التالى يبين ارتفاعات أعلى سبعة مبانى ومنشآت فى العالم . ارسم هذه البيانات مستخدماً شكلا بيانياً مناسباً .

المكان	الارتفاع بالأمتار	المبنى أو المنشأة
نيويورك	381	مبنى « الأمبير ستت »
نيويورك	319	مبنى « كريزلر »
باريس	300	برج إيفل
نيويورك	290	مبنى « وول ستريت »
نيويورك	283	بنك مانهاتن
نيويورك	259	مبنى الـ R.C.A. مركز روكفلر
نيويورك	241	مبنى « وولورث »

١ – ٦٨ الجدول التالي يظهر السرعة المدارية لكواكب المجموعة الشمسية . ارسم هذه البيانات :

الـكوكب	عطارد	الزهرة	الأرض	المريخ	المشترى	زحل	أورانوس	نيتون	بلوتو
السرعة (km/s)	47.8	35.1	29.8	24.1	13.0	9.7	6.8	5.5	4.8

١ – ٦٩ الجدول التالي يبين الحالة الاجتماعية للذكور والإناث (14 سنة فأكثر) بالولايات المتحدة فى عام 1958 . عبر عن هذه البيانات بيانياً باستخدام رسمين دائريين لهما نفس القطر

الحالة الاجتماعية	الذكور (نسبة مئوية من المجموع)	الإناث (نسبة مئوية من المجموع)
أعزب	24.5	18.8
متزوج	69.8	66.0
أرمل	3.9	12.8
مطلق	1.8	2.3

المصدر : مكتب التعداد .

١ – ٧٠ الجدول التالي يبين المساحة بمليون الكيلومترات المربعة لمحيطات العالم .
ارسم هذه البيانات مستخدماً : (أ) الأعمدة البيانية (ب) الرسوم الدائرية .

المحيط	الهادى	الأطلنطى	الهندى	القطبى الجنوبى	القطبى الشمالى
المساحة مليون km^2	183.4	106.7	73.8	19.7	12.4

المعادلات :

١ – ٧١ حل المعادلات التالية :

(أ) $16 - 5c = 36$ (جـ) $4(X - 3) - 11 = 15 - 2(X + 4)$ (هـ) $3[2(X + 1) - 4] = 10 - 5(4 - 2X)$

(ب) $2Y - 6 = 4 - 3Y$ (د) $3(2U + 1) = 5(3 - U) + 3(U - 2)$ (و) $\frac{2}{5}(12 + Y) = 6 - \frac{1}{4}(9 - Y)$

الحـــل : (أ) -4 (ب) 2 (جـ) 5 (د) $3/4$ (هـ) 1 (و) -7

١ – ٧٢ حل كل من مجموعة المعادلات الآنية التالية :

(أ) $\left.\begin{matrix} 2a + b = 10 \\ 7a - 3b = 9 \end{matrix}\right\}$ (ب) $\left.\begin{matrix} 3a + 5b = 24 \\ 2a + 3b = 14 \end{matrix}\right\}$ (جـ) $\left.\begin{matrix} 8X - 3Y = 2 \\ 1X + 7Y = -9 \end{matrix}\right\}$ (د) $\left.\begin{matrix} 5A - 9B = -10 \\ 3A - 4B = 16 \end{matrix}\right\}$

(هـ) $\left.\begin{matrix} 2a + b - c = 2 \\ 3a - 4b + 2c = 4 \\ 4a + 3b - 5c = -8 \end{matrix}\right\}$ (و) $\left.\begin{matrix} 5X + 2Y + 3Z = -5 \\ 2X - 3Y - 6Z = 1 \\ X + 5Y - 4Z = 22 \end{matrix}\right\}$ (ز) $\left.\begin{matrix} 3U - 5V + 6W = 7 \\ 5U + 3V - 2W = -1 \\ 4U - 8V + 10W = 11 \end{matrix}\right\}$

الحـــل :

(أ) $a = 3, b = 4$ (ب) $a = -2, b = 6$ (جـ) $X = -0{\cdot}2, Y = -1{\cdot}2$

(د) $4 = 184/7 = 26{\cdot}285\,71$ approx., $B = 110/7 = 15{\cdot}714\,29$ approx.

(هـ) $a = 2, o = 3, c = 5$ (و) $X = -1, Y = 3, Z = -2$ (ز) $U = 0{\cdot}4, V = -0{\cdot}8, W\ 0{\cdot}3$

١ – ٧٣ (أ) عبر بيانياً عن المعادلات $5x + 2y = 4$ and $7x - 4y = 23$ مستخدماً نفس الأحداثيات .

(ب) من الرسم أوجد الحل الآنى للمعادلتين .

(جـ) استخدم نفس الطريقة لحصول على الحل الآنى لمعادلات (أ) – (د) بالمسألة ١ – ٧٢ .

الحـــل : (ب) $(2, -3)$, i.e. $x = 2,\ y = -3$

١ – ٧٤ (أ) استخدم الرسم البيانى لمسألة ١ – ٦١ (أ) لإيجاد حل المعادلة $2x^2 + x - 10 = 0$ (ملحوظة : أوجد قيمة x من تقاطع القطع المكافىء مع محور x أى عندما $y = 0$) .

(ب) استخدم الطريقة الموضحة فى (أ) لإيجاد حل المعادلة $3x^2 - 4x - 5 = 0$.

الحـــل : (أ) $2, -2.5$ (ب) (تقريباً) $2.1, -0.8$.

١ – ٧٥ حل المعادلة من الدرجة الثانية $aX^2 + bX + c = 0$ معطى بصيغة الدرجة الثانية $X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

استخدم هذه الصيغة لإيجاد حل

(أ) $3X^2 - 4X - 5 = 0$ (ب) $2X^2 + X - 10 = 0$

(جـ) $5X^2 + 10X = 7$ (د) $X^2 + 8X + 25 = 0$

الحل (أ) $\frac{4 \pm \sqrt{76}}{6}$ or 2·12 and – 0·79 approx (ب) $2, -2.5$ (جـ) (تقريباً) $0.549, -2.549$

(د) $\frac{-8 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{36}\sqrt{-1}}{2} = \frac{-8 \pm 6\sqrt{-1}}{2} = -4 \pm 3\sqrt{-1} = -4 \pm 3i$

حيث $\sqrt{-1} = i$ هذه الجذور هى أرقام مركبة ولن تظهر إذا استخدمنا الرسوم البيانية .

المتباينات :

١ – ٧٦ باستخدام رموز المتباينات رتب الأعداد 1.5 —, 1.52, 2.37, 6.15 —, 4.3— حسب قيمتها (أ) ترتيباً تصاعدياً (ب) ترتيباً تنازلياً .

الحل (أ) $-6.15 < -4.3 < -1.5 < 1.52 < 2.37$ (ب) $2.37 > 1.52 > -1.5 > -4.3 > -6.15$

١ – ٧٧ استخدم رموز المتباينات للتعبير عن الجمل التالية

(أ) عدد الأطفال N يقع بين 30 , 50 متضمناً العددين 30 , 50

(ب) المجموع S لعدد النقط التى تظهر على زهرتى طاولة لا يقل عن 7

(جـ) X أكبر من أن يساوى 4— ولكن أقل من 3

(د) أقصى قيمة لـ P هى 5

(هـ) X لا تزيد عن Y بأكثر من 2

الحل : (أ) $30 \leqq N \leqq 50$, (ب) $S \geqq 7$, (جـ) $-4 \leqq X < 3$, (د) $P \leqq 5$, (هـ) $X - Y > 2$

١ – ٧٨ حل كل من المتباينات التالية :

(أ) $3X \geqq 12$ (د) $3 + 5(Y - 2) \leqq 7 - 3(4 - Y)$ (ز) $-2 \leqq 3 + \frac{1}{2}(a - 12) < 8$

(ب) $4X < 5X - 3$ (هـ) $-3 \leqq \frac{1}{5}(2X + 1) \leqq 3$

(جـ) $2N + 15 > 10 + 3N$ (و) $0 < \frac{1}{4}(15 - 5N) \leqq 12$

الحل : (أ) $X \geqq 4$, (ب) $X > 3$, (جـ) $N < 5$, (د) $Y \geqq 1$, (هـ) $-8 \leqq X \leqq 7$, (و) $-1.8 \leqq N < 3$, (ز) $2 \leqq a < 22$

اللوغارتيمات :

١ – ٧٩ أوجد اللوغاريتم المعتاد لكل من الأعداد التالية :

(أ) 387 (ب) 0·387 (جـ) 0·0792 (د) 14 630 (هـ) 0·6042 (و) 0·002 795 (ز) 476·3 (ح) 1·007 (ط) 7·146 (ى) 71·46 (ك) 0·000 98 (ل) 84·620 000

الحـــل :

(أ) 2·5877 (ب) 9·5877 − 10 (جـ) 8·8987 − 10 (د) 4·1653 (هـ) 9·7812 − 10 (و) 7·4464 − 10 (ز) 2·6779 (ح) 0·0030 (ط) 0·8541 (ى) 1·8541 (ك) 6·9912 − 10 (ل) 7·9275

١ – ٨٠ أوجد العدد المقابل للوغاريتم الأعداد التالية :

(أ) 3·5611 (ب) 9·8293 − 10 (جـ) 1·7045 (د) 8·9266 − 10 (هـ) 2·4700 (و) 6·4700 − 10 (ز) 2·8003 (ح) 3·7072 (ط) 0·0800 (ى) 6·3841

الحـــل :

(أ) 3640 (ب) 0·675 (جـ) 50·64 (د) 0·084 45 (هـ) 295·1 (و) 0·000 295 1 (ز) 0·063 14 (ح) 5096 (ط) 1·202 (ى) 2 422 000 or $2·422 \times 10^6$

١ – ٨١ احسب قيمة ما يلي باستخدام اللوغاريتمات

(أ) $(783·6)(1654)$

(ب) $\dfrac{21·7}{378·2}$

(جـ) $\dfrac{(0·045\,56)(624·1)}{(14·32)(0·003\,572)}$

(د) $(1·562)^{15}$

(هـ) $\dfrac{(0·3854)^4\,(12·48)^2}{(0·043\,82)^3}$

(و) $0·041\,82\,\sqrt{0·6758}$

(ز) $\sqrt[3]{3728}$

(ح) $\sqrt[5]{(21·63)(33·81)(47·53)(65·28)(87·47)}$

(ط) $\sqrt{\dfrac{(48·79)(0·005\,74)^3}{(2·143)^5}}$

(ى) $\dfrac{3·781}{0·018\,73}\sqrt{\dfrac{(43·25)(0·087\,43)}{(0·002\,356)(6·824)}}$

الحـــل :

(أ) 1296000 أو 1.296×10^6 (ب) 0.057 39 أو 0.0574 إلى ثلاثةأرقام معنويه (جـ) 556.0

(د) 804.4 (هـ) 40820 (و) 0.03438 (ز) 15.51 (ح) 45.67 (ط) $0.0004519 = 4.519 \times 10^{-4}$

أو 4.52×10^{-4} إلى ثلاثه أرقام معنوية (ى) 3096

١ – ٨٢ ارسم (أ) $y = \log x$. (ب) $y = 10^x$. ناقش التشابه بين الشكلين .

١ - ٨٣ أكتب المعادلة (أ) $2 \log X - 3 \log Y = 2$ (ب) $\log Y + 2X = \log 3$ بصورة خالية من اللوغاريتمات

الحـــل : (أ) $X^2 = 100Y^3$ (ب) $Y = 3(10^{-2x})$

١ - ٨٤ إذا كانت If $a^p = N$, w حيث a , p أرقام موجبة ، $a \neq 1$ فإننا نسمى p لوغاريتم N للأساس a ونكتب $p = \log_a N$ احسب :

(أ) $\log_2 8$ (ب) $\log_{25} 125$

(جـ) $\log_4 1/16$ (د) $\log_{1/2} 32$

(هـ) $\log_5 1$

الحـــل :

(أ) 3 (ب) 3/2 (جـ) -2 (د) -5 (هـ) 0

١ - ٨٥ وضح أن $\log_e N = 2.303 \log_{10} N$ تقريباً ، حيث ... $e = 2.71828$ تسمى بالأساس الطبيعى للوغاريتم حيث $N > 0$.

١ - ٨٦ وضح أن $(\log_b a)(\log_a b) = 1$ حيث $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$.

الفصل الثانى

التوزيعات التكرارية

البيانات الخام

البيانات الخام هى بيانات جمعت ولكنها غير منتظمة عدديا . مثال ذلك مجموعة أوزان 100 طالب استخرجت من سجلات جامعة حسب الترتيب الأبجدى لأسمائهم .

المفردات المنظومة

المنظومة هى ترتيب للبيانات الرقية الخام ترتيبا تصاعديا أو تنازليا حسب قيمها . الفرق بين الرقم الأكبر والرقم الأصغر يسمى مدى البيانات . على سبيل المثال ، إذا كان أكبر الطلبة وزنا فى المائة طالب هو 74 kg وأقلهم وزناً هو 60 kg فإن المدى هو 14 kg = 60 — 74 .

التوزيعات التكرارية

عند تلخيص أعداد كبيرة من البيانات الخام فإنه من المفيد توزيعها على فئات أو طوائف وتحديد عدد الأشخاص الذين ينتمون لكل فئة ويسمى هذا العدد بتكرار الفئة .

الجدول المنظم على صورة فئات يقابل كل فئة تكرارها يسمى بالتوزيع التكرارى أو الجدول التكرارى . ويمثل الجدول ٢ — ١ توزيع تكرارى لأوزان (مقربة إلى أقرب kg) 100 طالب من طلبة جامعة XYZ .

جدول ٢ — ١

أوزان 100 طالب من طلبة جامعة XYZ

الأوزان (كيلو جرامات)	عدد الطلبة
60–62	5
63–65	18
66–68	42
69–71	27
72–74	8
	100 المجموع

الفئة أو الطائفة الأولى على سبيل المثال تشتمل على الأوزان من 60 kg إلى 62 kg . ويعبر عنها بالرمز 62 — 60 . وبما أن عدد الطلبة الذين ينتمون إلى هذه الفئة هم 5 طلبة فإن التكرار المقابل لهذه الفئة هو 5 .

تسمى البيانات المنظمة والملخصة كما فى التوزيع التكرارى أعلاه بالبيانات المجمعة وعلى الرغم من أن عملية التجميع تؤدى بشكل عام إلى ضياع كثير من تفصيلات البيانات الأصلية فإن الفائدة الهامة منها هى الصورة العامة التى يمكن الحصول عليها والعلاقات الأساسية التى تظهر بالتالى أكثر وضوحا .

فترة الفئات وحدود الفئات

الرمز الذى يعبر عن الفئة مثل 62 — 60 فى الجدول أعلاه يسمى بفترة الفئة . الرقمان 60 و 62 يسميان حدود الفئة . الرقم الأصغر 60 يسمى الحد للفئة الأدنى والرقم الأكبر 62 يسمى الحد الأعلى للفئة . المصطلح فئة وفترة الفئة يستخدمان فى أغلب الأحيان للدلالة على نفس المعنى على الرغم من أن فترة الفئة هى فى الحقيقة رمز للفئة .

وفترة الفئة التى ، من الناحية النظرية على الأقل ، ليس لها أما حد الفئة الأعلى أو حد الفئة الأدنى تسمى بفترة فئة مفتوحة . على سبيل المثال إذا أخذنا مجموعة أعمار لأشخاص فإن فترة الفئة « 65 سنة فأكثر » هى فترة فئة مفتوحة .

الحدود الحقيقية للفئات

إذا كانت الأوزان سجلت إلى أقرب kg فإن فـترة الفئة 62 — 60 تتضمن من النـاحية النظرية كل القياسات من 59.5000 ... kg إلى 62.5000 ... kg . هذه الأرقام إذا عبرنا عنها باختصار بالأرقام الصحيحة 59.5 ,62.5 تسمى بالحدود الحقيقية للفئة . الرقم الأصغر 59.5 هو الحد الأدنى الحقيقى للفئة والرقم الأكبر وهو 62.5 هو الحد الأعلى الحقيقى للفئة .

ومن الناحية العملية فإن الحدود الحقيقية للفئة يمكن الحصول عليها بجمع الحد الأعلى لفترة فئة والحد الأدنى لفترة الفئة التالية لها والقسمة على 2

فى بعض الأحيان تستخدم الحدود الحقيقية للفئات كرمز للفئات . مثال ذلك ، الفئات المختلفة بالعمود الأول فى الجدول ٢ — ١ يمكن التعبير عنها بالصورة 65.5 — 62.5 ,62.5 — 59.5 وهكذا ولتلافى الغموض باستخدام هذه الرموز فإن الحدود الحقيقية للفئات يجب أن لا تتطابق مع أحد القيم الفعلية . فلو كان لدينا القيمة 62.5 فإنه يكون من الصعب تقرير ما إذا كانت تنتمى إلى الفئة 62.5—59.5 أو 62.5-65.5 .

حجم أو طول فترة الفئة

حجم أو طول فترة الفئة هو الفرق بين الحد الأدنى الحقيقى والحـد الأعلى الحقيقى للفئة ويسمى أيضا طول الفئة ، حجم الفئة أو طول الفئة . إذا كانت جميع الفئات فى التوزيع التكرارى لها نفس الطول فإن الطول المشترك يرمز له بالرمز c .

وفى هذه الحالة فإن c هو الفرق بين الحدين الأدنيين لفئتين متتاليتين . أو الحدين الأعليين لفئتين متتاليتين . مثال ذلك لو أخذنا بيانات الجدول ٢ — ١ فإن طول الفئة هو $c = 62.5 - 59.5 = 65.5 - 62.5 = 3$.

مركز الفئة

مركز الفئة هو منتصف فترة الفئة وتحصل عليه بجمع الحد الأدنى والحد الأعلى للفئة وتقسم المجموع على أثنين . فمركز الفئة 62—60 هو $(60+62)/2$. ويسمى مركز الفئة أيضا بمنتصف الفئة .

وبهدف مزيد من التحليل الرياضى فإنه يفترض أن جميع القراءات الموجودة داخل فترة فئة تأخذ قيما تتطابق مع مركز الفئة . بهذا فإن جميع الأوزان داخل الفئة 62 kg—60 تعتبر كما لو أنها 61 kg .

قواعد عامة لتكوين التوزيعات التكرارية

١ – حدد أكبر قيمة وأقل قيمة فى البيانات الخام ومنها أوجد المدى (الفرق بين أكبر رقم وأقل رقم) .

٢ – قسم المدى إلى عدد مناسب من الفئات المتساوية الطول . إذا لم يكن ذلك ممكنا استخدم فئات ذات أطوال مختلفة أو فئات مفتوحة (أنظر المسألة ٢ – ١٢) . ويأخذ عدد الفئات عادة بين 5 ,20 حسب البيانات . وتختار الفئات أيضا بحيث يتفق مركز الفئة مع المشاهدات الفعلية . وهذا يؤدى إلى التقليل من أخطاء التجميع عند اجراء مزيد من المعالجة الرياضية . وعلى أية حال فإن الحدود الحقيقية للفئات يجب ألا تتفق مع بيانات مشاهدة فعلا .

٣ – حدد عدد المشاهدات التى تقع فى كل فترة فئة . أى حدد تكرار كل فئة . وأحسن طريقة لأداء ذلك هو استخدام كشف الحزم أو النقط (أنظر المسألة ٢ – ٨) .

المدرجات التكرارية والمضلعات التكرارية :

هما طريقتان فى الرسم البيانى للتعبير عن التوزيعات التكرارية .

١ – **المدرج التكرارى** أو مدرج التكرارات يتكون من مجموعة من المستطيلات لها :

(أ) قاعدة على المحور الأفقى (محور x) مراكزها عند مركز الفئة وطول القاعدة يساوى طول فترة الفئة .

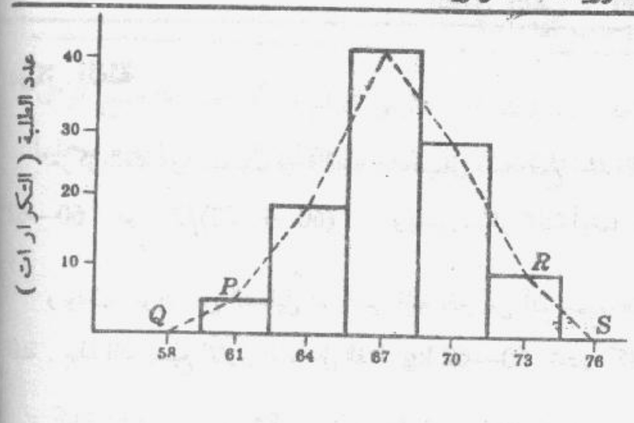
(ب) مساحة متناسبة مع تكرارات الفئات .

وإذا كانت الفئات كلها لها نفس الطول فإنه من المعتاد أن تأخذ الارتفاعات مساوية لتكرارات الفئات . أما إذا كانت الفئات غير متساوية الطول فإن هذه الأطوال يجب أن تعدل (أنظر المسألة ٢ – ١٣) .

٢ – **المضلع التكرارى** ، هو خط بيانى لتكرار الفئة المقابلة لمركز الفئة . ويمكن رسمه بإيصال نقط تنصيف رؤوس المستطيلات المكونة للمدرج التكرارى .

المدرج التكرارى والمضلع التكرارى لبيانات التوزيع التكرارى للأوزان موضحان على نفس الاحداثيات فى الشكل ٢ – ١ . من المعتاد أن تضيف الوصلتين PQ و RS إلى ما بعد مركز الفئة الدنيا ومركز الفئة العليا ونعتبر أن التكرارات المقابلة لهما صفر . وفى هذه الحالة فإن مجموع مساحات المستطيلات فى المدرج التكرارى تتساوى مع المساحة الكلية المحصورة بين المضلع التكرارى ومحور السينات .

(أنظر المسألة ٢ – ١١) .



الأوزان (بالكيلوجرامات)

شكل ٢ – ١

التوزيع التكرارى النسبى

التكرار النسبى لفئة هو تكرار الفئة مقسوما على التكرار الكلى لجميع الفئات وعادة يعبر عنه كنسبة مئوية . فعلى سبيل المثال فإن التكرار النسبى للفئة 68—66 فى الجدول (٢ – ١) هو $42\% = 42/100$. مجموع التكرارات النسبية لجميع الفئات هـو 1 أو 100% .

إذا استبدلنا التكرارات فى الجدول التكرارى السابق بما يقابلها من التكرارات النسبية فإن الجدول الناتج يسمى بالتوزيع التكرارى النسبى أو توزيع النسب المئوية أو جداول التكرارات النسبية .

تمثيل البيانى للتوزيع التكرارى النسبى يمكن الحصول عليه من المدرج التكرارى أو المضلع التكرارى وذلك بإبدال تدريج المحور الرأسى من التكرارات إلى التكرارات النسبية وهذا لن يغير فى الشكل نفسه . ويسمى الشكل الناتج بمدرج التكرارات النسبية أو المدرج التكرارى للنسب المئوية وكذلك المضلع التكرارى النسبى أو المضلع التكرارى للنسب المئوية .

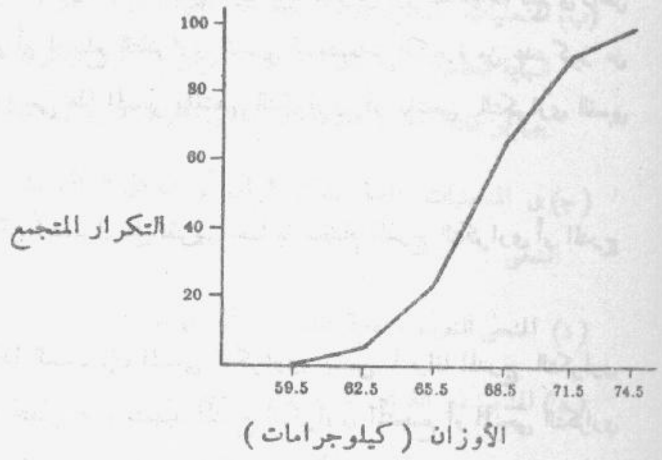
التوزيع التكرارى المتجمع ، والمنحنى التكرارى المتجمع

مجموع التكرارات المقابلة لجميع القيم الأقل من الحد الأعلى الحقيقى لفئة معينة يسمى بالتكرار المتجمع إلى هذه الفئة المتضمن تكرارها أيضا . وعلى سبيل المثال فى الجدول ١ – ٢ فإن التكرار المتجمع إلى الفئة 68 — 66 والمتضمن تكرارها أيضا هو $65 = 42 + 18 + 5$ وهذا يعنى أن 65 طالبا أوزانهم تقل عن 68.5 kg .

والجدول الذى يمثل التكرارات المتجمعة يسمى بالتوزيع المتجمع أو جدول التكرارات المتجمعة أو باختصار التوزيع المتجمع ومثال له الجدول ٢ – ٢ لتوزيع أوزان الطلبة .

جدول ٢ – ٢

عدد الطلبة	الأوزان (كيلوجرامات)
0	أقل من 59.5
5	أقل من 62.5
23	أقل من 65.5
65	أقل من 68.5
92	أقل من 71.5
100	أقل من 74.5



شكل ٢ – ٢

والشكل البيانى الذى يظهر التكرارات المتجمعة إلى أقل من الحد الأعلى الحقيقى لأى فئة بالمقابلة لحد الأعلى الحقيقى للفئات يسمى بالمضلع التكرارى المتجمع أو المنحنى التكرارى كما هو موضح بالشكل ٢ – ٢ والخاص بتوزيع أوزان الطلبة .

وفى بعض الأحيان قد يكون من المرغوب فيه الحصول على التوزيع التكرارى المتجمع لجميع القيم الأكبر من أو المساوية لحد الأدنى الحقيقى لكل فئة . وحيث أننا تعتبر فى هذه الحالة الأوزان 59.5 kg أو أكثر ، 62.5 kg أو أكثر وهكذا . فإن هذا يسمى أحيانا التوزيع المتجمع على أساس « أو أكثر من » بينما التوزيع الذى ذكرناه سابقا يسمى التوزيع المتجمع على أساس « الأقل من » . ومن السهل الحصول على أحدهما من الآخر (أنظر المسألة ٢ – ١٥) . وشكل التكرار المتجمع يسمى تبعا لذلك المنحنى التكرارى الصاعد « أقل من » فى الحالة الأولى والمنحنى التكرارى النازل « أو أكثر » . ولكن عندما نشير إلى التوزيع التكرارى المتجمع أو المنحنى التكرارى المتجمع بدون توصيف فإن هذا يتضمن أن الأساس هو « الأقل من » .

التوزيع التكرارى المتجمع النسبى ، المنحنى المتجمع للنسب المئوية

التوزيع التكرارى المتجمع النسبى أو التكرار المتجمع المئوى . هو التكرار المتجمع مقسوما على التكرار الكلى . مثال ذلك فإن التكرار المتجمع النسبى للأوزان الأقل من 68.5 kg هو 65/100 = 65% وهذا يعنى أن 65% من الطلبة أوزانهم أقل من 68.5 kg .

إذا استخدمنا التكرارات المجتمعة النسبية فى الجدول ٢ – ٢ والشكل ٢ – ٢ بدلا من التكرارات المتجمعة فإن النتيجة تسمى بالتوزيع التكرارى المتجمع النسبى أو بالتوزيع المتجمع للنسب المئوية أو المضلع التكرارى المتجمع النسبى أو المنحنى التكرارى المتجمع للنسب المئوية .

المنحنى التكرارى ، تمهيـد المنحنى التكـرارى المتجمع

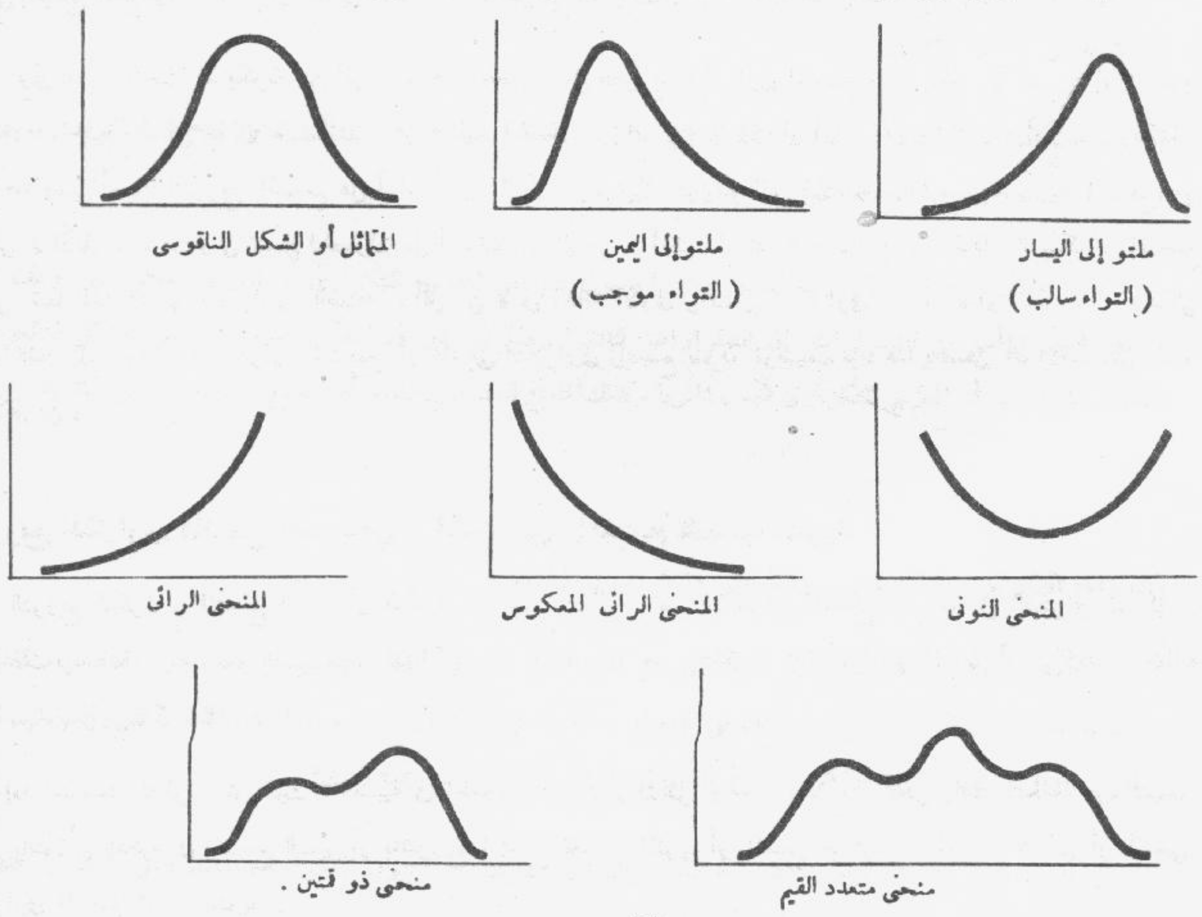
يمكن اعتبار البيانات المجمعة كعينة مسحوبة من مجتمع أكبر . وبما أن هناك عددا كبيرا من المشاهدات فى المجتمع فإنه من الممكن من الناحية النظرية (البيانات المتصلة) اختيار فترة الفئة صغيرة جدا ويظل لدينا عدد ملموس من المشاهدات تقع فى داخل كل فئة . وبهذا فإنه من المتوقع أن يتكون المضلع التكرارى أو المضلع التكرارى النسبى للمجتمعات الكبيرة من عدد كبير من الخطوط الصغيرة المتكسرة والتى يمكن تقريبها بمنحنى ، ويسمى هذا المنحنى بالمنحنى التكرارى أو المنحنى التكرارى النسبى على التوالى .

ومن المنطقى أن نتوقع أن مثل هذه المنحنيات النظرية يمكن الحصول على تقريب لها باستخدام المدرج التكرارى أو المدرج التكرارى النسبى للعينة بعد تمهيده .

وتزيد درجة الدقة فى التقريب بزيادة حجم العينة . ولهذا السبب فإن المنحنى التكرارى يسمى أحيانا المدرج التكرارى الممهد . وبنفس الطريقة فإن المنحنى التكرارى المتجمع الممهد نحصل عليه بتمهيد المدرج التكرارى المتجمع أو المنحنى التكرارى المتجمع . ومن المعتاد أن يكون تمهيد المنحنى المتجمع أكثر سهولة من تمهيد المدرج التكرارى (أنظر المسألة ٢ – ١٨) .

اشكال المنحنيات التكرارية

المنحنيات التكرارية التى تظهر فى الناحية العملية تأخذ أشكالا مميزة كما هو موضح بالشكل ٢ – ٣ .



شكل ٢ – ٣

(ا) المنحنى التكرارى المتماثل أو ذو الشكل الناقوسى متميز بأن المشاهدات المتساوية البعد عن مركز النهاية العظمى لها نفس التكرارات . ومن الأمثلة الهامة له المنحنى المعتدل .

(ب) المنحنيات التكرارية متوسطة عدم التماثل أو الالتواء تتميز بأن أحد طرفيها يمتد أكثر من الآخر على جانبى مركز النهاية العظمى . إذا كان الطرف (الأيمن) أطول فيكون المنحنى فى هذه الحالة ملتوياً إلى اليمين أو ملتويا التواء موجبا . بينما لو كان العكس صحيحا فإن المنحنى يكون ملتويا إلى اليسار أو ملتويا التواء سالبا .

(جـ) فى المنحنيات ذات الشكل الرائى أو الشكل الرائى المعـــكوس فإن نقطة النهاية العظمى للمنحنى تقع عند أحد طرفى المنحنى .

(د) المنحنى النونى له نهاية عظمى عند كل من طرفيه .

(هـ) المنحنى ذو القمتين له نهايتان عظميان .

(و) المنحنى متعدد القيم له أكثر من نهايتين عظمتين .

مسائل محلولة

المفردات المنظومة

٢ - ١ (ا) رتب الأرقام 22 ,34 ,57 ,11 ,48 ,6 ,27 ,38 ,45 ,17 فى منظومة ، ثم

(ب) حدد المدى .

الحـل :

(ا) بترتيبها تصاعديا حسب قيمها تكون المنظومة 6, 11, 17, 22, 27, 34, 38, 45, 48, 57

بترتيبها تنازليا حسب قيمها تكون المنظومة 57, 48, 45, 38, 34, 27, 22, 17, 11, 6

(ب) بما أن الرقم الأصغر هو 6 والرقم الأكبر هو 57 فإن المدى هو 51 = 6 — 57 .

٢ - ٢ درجات 80 طالبا فى مادة الرياضة فى جامعة ولاية مسجلة بالجدول التالى

68	84	75	82	68	90	62	88	76	93
73	79	88	73	60	93	71	59	85	75
61	65	75	87	74	62	95	78	63	72
66	78	82	75	94	77	69	74	68	60
96	78	89	61	75	95	60	79	83	71
79	62	67	97	78	85	76	65	71	75
65	80	73	57	88	78	62	76	53	74
86	67	73	81	72	63	76	75	85	77

بالرجوع إلى هذا الجدول حدد .

(ا) أكبر درجة .

(ب) أقل درجة .

(ج) المدى

(د) درجات أعلى خمسة طلبة من حيث الترتيب .

(هـ) درجات أقل خمسة طلبة من حيث الترتيب .

(و) درجات الطالب الذى ترتيبه العاشر من أعلى .

(ز) ما هو عدد الطلبة الذين حصلوا على الدرجة 75 فأكثر .

(ح) ما هو عدد الطلبة الذين حصلوا على درجات أقل من 85 .

(ط) ما هى النسبة المئوية للطلبة الحاصلين على درجات أعلى من 65 ولكن ليست أعلى من 85 .

(ى) ما هى الدرجات التى لم تظهر مطلقا .

الحــل :

بعض هذه الأسئلة تتطلب تفصيلات بحيث تكون أحسن طريقة للإجابة عليها هى تكوين منظومة . وهذا يمكن عمله بتقسيم البيانات إلى عدد مناسب من الفئات ووضع كل رقم يأخذ من الجدول فى الفئة الملائمة ، كما فى الجدول ٢ – ٣ أدناه . وهذا يسمى جدول المدخلات . ويتم بعد ذلك ترتيب الأرقام داخل كل فئة فى منظومة كما فى الجدول ٢ – ٤ وبهذا نحصل على المنظومة المطلوبة .

جدول ٢ – ٣

50-54	53
55-59	59, 57
60-64	62, 60, 61, 62, 63, 60, 61, 60, 62, 62, 63
65-69	68, 68, 65, 66, 69, 68, 67, 65, 65, 67
70-74	73, 73, 71, 74, 72, 74, 71, 71, 73, 74, 73, 72
75-79	75, 76, 79, 75, 75, 78, 78, 75, 77, 78, 75, 79, 79, 78, 76, 75, 78, 76, 76, 75, 77
80-84	84, 82, 82, 83, 80, 81
85-89	88, 88, 85, 87, 89, 85, 88, 86, 75
90-94	90, 93, 93, 94
95-99	95, 96, 95, 97

جدول ٢ – ٤

50–54	53
55–59	57, 59
60–64	60, 60, 60, 61, 61, 62, 62, 62, 62, 63, 63
65–69	65, 65, 65, 66, 67, 67, 68, 68, 69
70–74	71, 71, 71, 72, 72, 73, 73, 73, 73, 74, 74, 74
75–79	75, 75, 75, 75, 75, 75, 75, 76, 76, 76, 76, 77, 77, 78, 78, 78, 78, 78, 79, 79, 79
80–84	80, 81, 82, 82, 83, 84
85–89	85, 85, 85, 86, 87, 88, 88, 88, 89
90–94	90, 93, 93, 94
95–99	95, 95, 96, 97

من الجدول ٢ – ٤ يكون من الأسهل نسبيا الإجابة على هذه الأسئلة . حيث

(ا) أكبر درجة : 97

(ب) أقل درجـة : 53

(ج) المـدى 44 = 53 — 97

(د) درجات أعلى خمسة طلبة من حيث الترتيب : 97, 96, 95, 95, 94

(هـ) درجات أقل خمسة طلبة من حيث الترتيب : 53 57, 59, 60, 60

(و) درجة الطالب الذى ترتيبه العاشر من أعلى : 88

(ز) عدد الطلبة الذين حصلوا على الدرجة 75 فأكثر : 44

(ح) عدد الطلبة الذين حصلوا على درجات أقل من 85 : 63

(ط) نسبة الطلبة الحاصلين على درجات أعلى من 65 ولـكن ليست أعلى من 85 : 49/80 = 61.2%

(ى) الأرقام التى لم تظهر هى 0 وكذلك 52, 54, 55, 56, 58, 64, 70, 91, 92, 98, 99, 100 .

التوزيعـات التكرارية والمدرجـات والمضلعات التكرارية

٢ – ٣ يبين الجدول ٢ – ٥ التوزيع التكرارى للأجور الشهرية بالجنيهات الاسترلينية لـ 65 عاملا فى شركة P and R .

حدد باستخدام هذا الجدول :

(ا) الحد الأدنى للفئة السادسة ج : £ 100.00

(ب) الحد الأعلى للفئة الرابعة ج : £89.99

(جـ) مركز الفئة (أو منتصف الفئة) الثالثة . مركز الفئة الثالثة

$$\tfrac{1}{2}(£70.00 + £79.99) = £74.9995$$

ولكثير من الأغراض العملية يقرب هذا الرقم إلى £75.00 .

جدول ٥ – ٢

الأجور	عدد العاملين
£50·00–£59·99	8
60·00– 69·99	10
70·00– 79·99	16
80·00– 89·99	14
90·00– 99·99	10
100·00–109·99	5
110·00–119·99	2
	المجموع 65

(د) الحدود الحقيقية للفئة الخامسة

الحد الأدنى الحقيقى للفئة الخامسة

الحد الأعلى الحقيقى للفئة الخامسة :

$= \tfrac{1}{2}(£90·00 + £89·99) = £89·995.$

$= \tfrac{1}{2}(£99·99 + £100·00) = £99·995.$

(هـ) طول الفئة الخامسة :

طول الفئة الخامسة = الحد الأعلى الحقيقى للفئة الخامسة – الحد الأدنى الحقيقى للفئة الخامسة

$$= £99.995 - £88.995 = £10.00$$

وفى هذه الحالة فإن جميع الفئات لها نفس الطول £10.00 .

(و) تكرار الفئة الثالثة ج : 16

(ز) التكرار النسبى للفئة الثالثة : ج : $16/65 = 0.246 = 24.6\%$

(ح) الفئة ذات التكرار الأكبر ج : £70.00—£79.99

وهذه تسمى أحيانا بالفئة المنوالية . ويسمى تكرارها بتكرار الفئة المنوالية .

(ط) نسبة العاملين الذين يحصلون على دخل شهرى أقل من £80.00

العدد الكلى للعاملين الذين يحصلون على دخل أقل من £80.00 شهريا $34 = 8 + 10 + 16$

نسبة العاملين يحصلون على دخل أقل من £80.00 شهريا = $34/65 = 52.3\%$

(ى) العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من £100.00 ولكن لا يقل دخلهم عن £60.00 شهريا

$$= 10 + 14 + 16 + 10 = 50$$

نسبة العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من £100.00 ولكن لا يقل دخلهم عن £60.00 شهريا

$= 50/65 = 76.9\%$.

نسبة العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من £100.00 ولكن لا يقل دخلهم عن £60.00 شهريا

$50/65 = 76.9\%$.

٢ – ٤ إذا كانت مراكز الفئات للتوزيع التكرارى لأطوال أوراق نبات الغار هى 128, 137, 146, 155, 164, 173, 182 mm أوجد (ا) طول الفئة (ب) الحدود الحقيقية للفئات (جـ) حدود الفئات ، مفترضا أن القياس أخذ إلى أقرب مليمتر .

الحـــل :

(أ) طول الفئة = الفرق المشترك بين مراكز الفئات المتتالية = $9\ mm = 137 - 146 = 128 - 137$.

(ب) بما أن أطوال الفئات كلها متساوية ، فإن الحدود الحقيقية للفئات هى فى منتصف المسافة بين مراكز الفئات وبهذا يكون لدينا القيم .

$$\tfrac{1}{2}(128 + 137),\ \tfrac{1}{2}(137 + 146), \ldots, \tfrac{1}{2}(173 + 182) \text{ or } 132{\cdot}5,\ 141{\cdot}5,\ 150{\cdot}5, \ldots, 177{\cdot}5 \text{ mm.}$$

وبهذا يكون الحد الحقيقى للفئة الأولى هـــو

$123.5 = 9 - 132.5$ والفئة الأخيرة هو $186.5 = 9 + 177.5$

وبما أن الطول المشترك للفئات هـــو $9\ mm$. فإن الحـــدود الحقيقية للفئات هى :

$$123{\cdot}5,\ 132{\cdot}5,\ 141{\cdot}5,\ 150{\cdot}5,\ 159{\cdot}5,\ 168{\cdot}5,\ 177{\cdot}5,\ 186{\cdot}5 \text{ mm.}$$

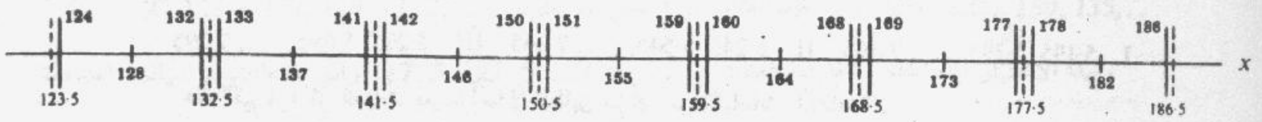
(ج) بما أن حدود الفئات هى قيم صحيحة فإننا نختار حدود الفئات من الأرقام الصحيحة الأقرب إلى الحدود الحقيقية للفئة وعلى سبيل التحديد :

$$123,\ 124,\ 132,\ 133,\ 141,\ 142, \ldots$$

وبهذا فإن حدود الفئة الأولى هى 132–124 والفئة التالية 141–133 وهكذا .

٢ – ٥ عبر بيانيا عن نتائج المسألة السابقة :

الحـــل :



مراكز الفئات $182, \ldots, 146, 137, 128$ حدد موضعها على محور x . ويوضح على الرسم الحـــدود الحقيقية للفئات بالخطوط الرأسية المتقطعة بينما حدد حدود الفئات بالخطوط الرأسية المتصلة .

٢ – ٩ إذا كان أصغر 150 قياسا هو $5.18\ mm$ وكان أكبرها هو $7.44\ mm$. حدد مجموعة ملائمة من :

(أ) حدود الفئات (ب) الحدود الحقيقية للفئات (ج) مراكز الفئات

والتى يمكن استخدامها لتكوين توزيع تكرارى لهذه القياسات .

الحل :

المـــدى $2.26\ mm = 5.18 - 7.44$. وإذا استخدمنا 5 فئات كحد أدنى فإن طول الفئـــة سيكون $0.45 = 2.26/5$ تقريبا أما إذا استخدمنا كحد أعلى 20 فئة فإن طول الفئة سيكون $0.11 = 2.26/20$ تقريبا . وبهذا يكون الاختيار المناسب لطول الفئة يقع بين 0.11 ، 0.45 وقد يكون $0.20, 0.30$ أو 0.40 .

(أ) تظهر الأعمدة I, II, III فئات ملائمة أطوالها 0.20, 0.30, 0.40 على الترتيب .

I	II	III
5·10–5·29	5·10–5·39	5·10–5·49
5·30–5·49	5·40–5·69	5·50–5·89
5·50–5·69	5·70–5·99	5·90–6·29
5·70–5·89	6·00–6·29	6·30–6·69
5·90–6·09	6·30–6·59	6·70–7·09
6·10–6·29	6·60–6·89	7·10–7·49
6·30–6·49	6·90–7·19	
6·50–6·69	7·20–7·49	
6·70–6·89		
6·90–7·09		
7·10–7·29		
7·30–7·49		

لاحظ أن الحد الأدنى للفئة الأولى من الممكن أن يكون مختلفا عن 5.10 . فعلى سبيل المثال فى العمـود I إذا بدأنا بالرقم 5.15 كحد أدنى فإن الفئة الأولى يمكن كتابتها على الشكل 5.15–5.34 .

(ب) الحدود الحقيقية للفئات المقابلة للأعمدة I, II, III أعلاه هى كالآتى .

I 5·095–5·295, 5·295–5·495, 5·495–5·695, . . ., 7·295–7·495
II 5·095–5·395, 5·395–5·695, 5·695–5·995, . . ., 7·195–7·495
III 5·095–5·495, 5·495–5·895, 5·895–6·295, . . ., 7·095–7·495

لاحظ أن هذه الحدود الحقيقية للفئات ملائمة حيث أنها لا تتطابق مع أى من القياسات المشاهدة .

(جـ) مراكز الفئات المقابلة للأعمدة I, II, III المعطاة فى (أ) هى كالآتى :

I 5·195, 5·395, . . ., 7·395 II 5·245, 5·545, . . ., 7·345 III 5·295, 5·695, . . ., 7·295

هذه القيم لمراكز الفئات يعيبها أنها لا تتطابق مع أى من القياسات المشاهدة .

٢ – ٧ فى الاجابة على السؤال السابق اختار أحد الطلبة الفئات التالية .

5.10—5.40, 5.40—5.70 . . ., 6.90—7.20, 7.20—7.50

هل هناك أى خطأ فى هذا الاختيار ؟

الحـل :

هذه الفئات تتشابك فيما بينها عند 5.40, 5.70, . . ., 7.20 وبهذا فإنه إذا كانت قيمة مسـجلة لقياس هى 5.40 على سبيل المثال ، فإنه يمكن أن توضع فى أى من الفئتين الأولى أو الثانية . ويبرر بعض الإحصـائيين ذلك بالاتفاق على أن يوضع نصف هذه الحالات غير الواضحة فى أحد الفئات والنصف الآخر فى الفئة الأخرى .

وعدم الوضـوح فى هذه الحالة يمكن حذفه بأن نكتب الفئات كالآتى : 5.10 — أقل من 5.40 و 5.40 أقل من 5.70 وهكذا . وفى هذه الحالة فإن الحدود تتطابق مع الحدود الحقيقية للفئة ومراكز الفئات تتطابق مع

البيانات المشاهدة . وبشكل عام فمن المستحب أن نتجنب مثل هذا التشابك فى الفئات كلما كان ذلك ممكننا وكذلك اختيار الحدود الحقيقية للفئات بحيث لا تتطابق مع قيم فعلية مشاهدة . وعلى سبيل المثـال فإن الفئات فى المسألة السابقة يمكن اختيارها مثل 5.695 — 5.395 ، 5.395 — 5.095 وهكذا . بدون أى غموض . ويعيب هذا الاختيار بالذات أن مراكز الفئات لا تتطابق مع قيم مشاهدة .

٢ – ٨ فى الجدول التالى سجلت أطوال 40 من أوراق نبات الفار إلى أقرب مليمتر . كون توزيعا تكراريا .

138	164	150	132	144	125	149	157
146	158	140	147	136	148	152	144
168	126	138	176	163	119	154	165
146	173	142	147	135	153	140	135
161	145	135	142	150	156	145	128

الحـل :

أكبر طول هو 176 mm وأصغر طول هو 119 mm وبهذا يكون المدى 176 — 119 = 57 mm

إذا استخدمنا 5 فئات فإن طول الفئة سيكون بالتقريب 11 = 57/5 .

إذا استخدمنا 20 فئة فإن طول الفئة سيكون بالتقريب 3 = 57/20 .

أحد الاختيارات الملائمة لطول الفئة هـو 5 mm . وكذلك فإنه من الملائم اختيار مراكز الفئـات عند ...,120, 125, 130, 135 وبهذا فإن الفئات من الممكن أن تكون ... ,118 — 122,123 —127, 128—132 .

وبهذا الاختيار فإن الحدود الحقيقية للفئات هى ...,117.5, 122.5, 127.5 والتى لاتتطابق مع البيانات المشاهدة .

جدول ٢ – ٦

الطـول	الحـزم	التكرار
118-122	/	1
123-127	//	2
128-132	//	2
133-137	////	4
138-142	~~////~~ /	6
143-147	~~////~~ ///	8
148-152	~~////~~	5
153-157	////	4
158-162	//	2
163-167	///	3
168-172	/	1
173-177	//	2
		المجمـوع 40

التوزيع التكرارى المطلوب موضح بالشكل ٢–٦ . ويستخدم العمود الأوسط ويسمى كشف الحزم (أو النقط) فى ترتيب البيانات الخام لمحصـول على التـكرارات ويحذف عادة عنـد العرض النهائى للتوزيع التكرارى . وليس ضروريا وضع القيم فى منظومة وأن كان من الممكن فى حالة وجودها استخدامها فى تبويب التكرارات .

جدول ٢ – ٧

الطول	الحـــزم	التكرار
118–126	///	3
127–135	𝍸	5
136–144	𝍸 ////	9
145–153	𝍸 𝍸 //	12
154–162	𝍸	5
163–171	////	4
172–180	//	2
	المجموع	40

طريقة أخرى

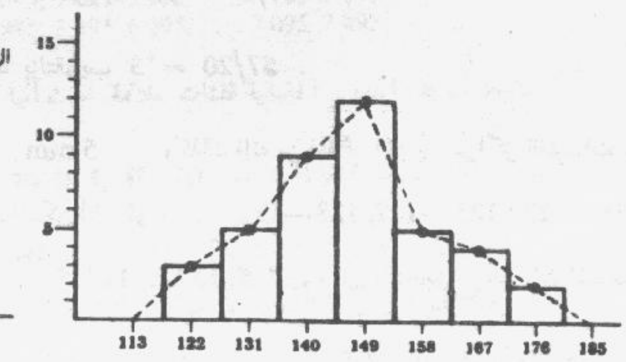
ومن الطبيعي أن يكون من الممكن الحصول على توزيعات تكرارية أخرى .

بالجدول ٢ – ٧ يظهر على سبيل المثال التوزيع التكراري باستخدام 7 فئات حيث طول الفئة هو 9 mm.

٢ – ٩ كون (أ) مدرج تكراري (ب) مضلع تكراري لتوزيع الأطوال في المسألة ٢–٨

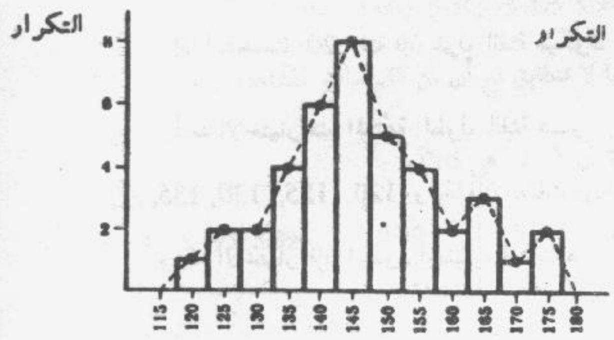
الحـــل :

المدرج التكراري والمضلع التكراري لكل من الحالات المذكورة في المسألة ٢–٨ معطاة في الأشكال ٢–٤(أ) ٢ – ٤ (ب)



الأطوال (بالمليمترات)

شكل ٢ – ٤ (ب)



الأطوال (بالمليمترات)

شكل ٢ – ٤ (أ)

لاحظ أن مراكز قواعد المستطيلات قد عينت عند مراكز الفئات .

٢ – ١٠ باستخدام بيانات المسألة ٢ – ٣ كون

(أ) توزيع تكراري نسبي (أو نسب مئوية) .

(ب) مدرج تكراري

(ج) مدرج تكراري نسبي

(د) مضلع تكراري

(هـ) مضلع تكراري نسبي .

الحــل :

(أ) التوزيع التكرارى النسبى المبين بالجدول ٢ – ٨ حصــلنا عليه من التوزيع التكرارى للمسألة ٢ – ٣ بقسمة تكرارات كل فئة على المجموع الكلى للتكرارات (65) وعبرنا عن النتيجة كنسبة مئوية .

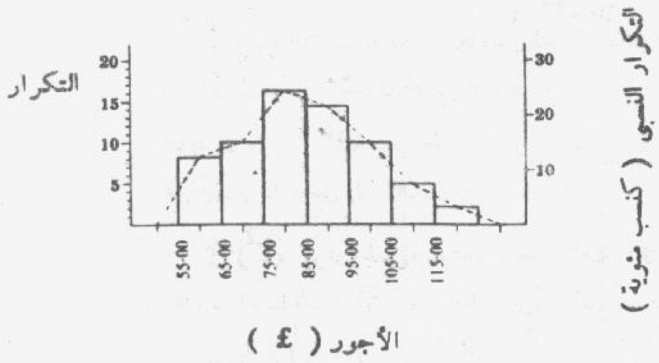
جدول ٢ – ٨

الأجور	التكـــرار النسبى (كنسب مئـــوية)
£50·00–£59·99	12·3
60·00– 69·99	15·4
70·00– 79·99	24·6
80·00– 89·99	21·5
90·00– 99·99	15·4
100·00–109·99	7·7
110·00–119·99	3·1
	المجموع 100.0%

(ب) ، (ج) . المدرج التكرارى والمدرج التكرارى النسبى موضحان بالشكل ٢ – ٥ . لاحظ أنه للتحويل إلى مدرج تـــكرارى نسبى فإنه من الضرورى فقـــط إضافة مقياس رأسى يظهر التكرارات النسبية كما هو موضـــح على يمين الشكل .

(د)، (هـ) المضلع التكرارى والمضلع التكرارى النسبى موضحان بالخط البيانى المتقطع بالشكل ٢ – ٥ .

للتحويل إلى مضلع تكرارى نسبى فإنه من الضرورى فقط إضافة مقيـــاس رأسى يظهر التكرارات النسبية .



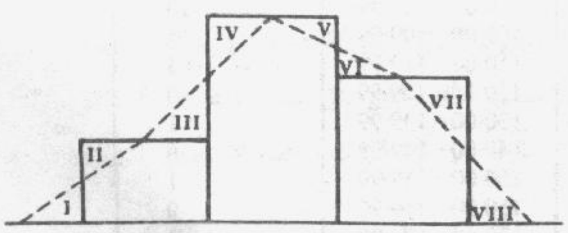
شكل ٢ – ٥

لاحظ أنه إذا كان المطلوب هو المضلع التكرارى النسبى فقط فإن الرسم المقابل لن يحتوى على المدرج التكرارى ومحور التكرارات النسبية سوف يظهر على اليسار بدلا من محور التكرارات .

٢ – ١١ أثبت أن المســاحة الكلية للمستطيلات فى المدرج التكرارى تساوى المساحة الكلية المحصـــورة بين المضلع التكرارى ومحور السينات .

الحــل :

سنثبت ذلك فى حالة مدرج تكرارى يتكون من ثلاثة مستطيلات كما بالرسم ، حيث يظهر المضلع التكرارى بخطوط متقطعة .



شكل ٢ – ٦

المساحة الكلية للمستطيلات =

المساحة المظللة + مساحة II + مساحة IV + مساحة V + مساحة VII

= المساحة المظللة + مساحة I + مساحة III + مساحة II + مساحة VIII

= المساحة المحصورة بين المضلع التكرارى ومحور السينات .

لأن مساحة I = مساحة II ، مساحة III = مساحة IV ، مساحة V = مساحة VI ، مساحة VII = مساحة VIII .

٢ – ١٢ فى شركة P and R (المسألة ٢ – ٣) عين خمسة عاملين جدد وكانت أجورهم الشهرية £85·34 . كون توزيعاً تكرارياً لأجور الـ 70 عاملا .

الحـل :

التوزيعات التكرارية الممكنة تظهر فى الجداول (أ) ، (ب) ، (جـ) ، (د) ، (هـ) ، أدناه . (أ) احتفظ بنفس طول الفئة £10.00 خلال الجدول . وكنتيجة لذلك ظهرت فئات خالية وتفاصيل دقيقة حول الحد الأعلى لهيكل الأجور .

فى (ب) الفئات الخالية والتفاصيل الدقيقة أمكن تلافيها باستخدام الفئة المفتوحة £120.00 وأكبر . أحد عيوب هذا الأسلوب أن الجدول أصبح لاقيمة له عند إجراء بعض العمليات الرياضية . وعلى سبيل المثال أصبح من المستحيل تحديد الأجور الكلية المدفوعة فى أسبوع حيث £120.00 وأكبر من الممكن أن تتضمن أن الأفراد يمكن أن يحصلوا على أجور قد تصل إلى £1200.00 فى الشهر .

فى (جـ) كون الجدول باستخدام طول الفئة £20.00 أحد العيوب فى ذلك أن كثيراً من المعلومات قد فقدت فى الحدود الدنيا لهيكل الأجور والتفاصيل مازالت دقيقة فى الحد الأعلى لهيكل الأجور .

فى (د) أطوال الفئات غير متساوية . أحد العيوب فى ذلك هو أن عمليات رياضية سوف تتم فيما بعد تفقد السهولة المتاحة فى حالة ما إذا كانت الفئات متساوية . كذلك فكلما زاد طول الفئة زادت أخطاء التجميع .

(أ)

الأجـــور	التكرار
£50·00 – £59·99	8
60·00 – 69·99	10
70·00 – 79·99	16
80·00 – 89·99	15
90·00 – 99·99	10
100·00 – 109·99	5
110·00 – 119·99	3
120·00 – 129·99	0
130·00 – 139·99	1
140·00 – 149·99	0
150·00 – 159·99	1
160·00 – 169·99	0
170·00 – 179·99	1
المجموع	70

(ب)

الأجور	التكرار
£50·00 – £59·99	8
60·00 – 69·99	10
70·00 – 79·99	16
80·00 – 89·99	15
90·00 – 99·99	10
100·00 – 109·99	5
110·00 – 119·99	3
120·00 and over	3
المجموع	70

(جـ)

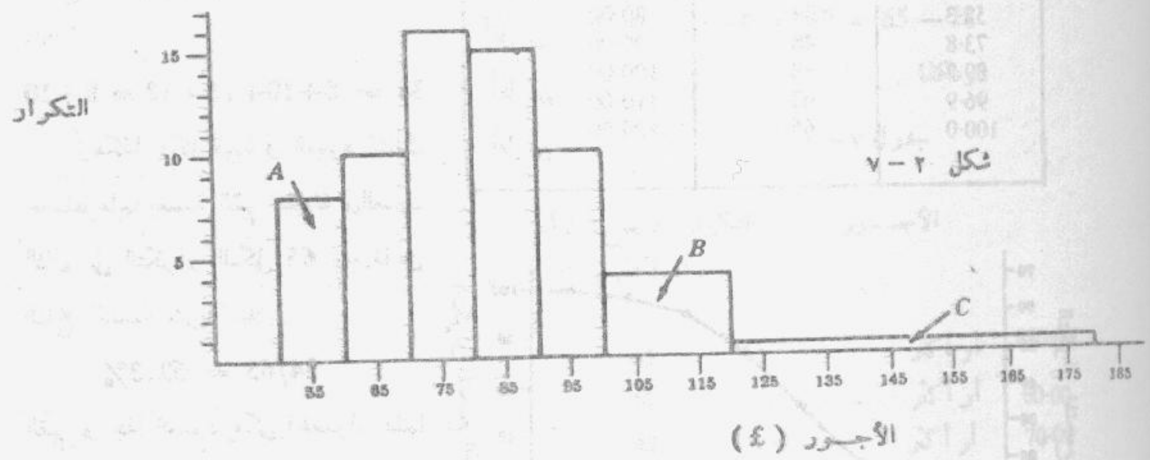
التكرار	الأجـور
18	£50·00 - £69·99
31	70·00 - 89·99
15	90·00 - 109·99
3	110·00 - 129·99
1	130·00 - 149·99
1	150·00 - 169·99
1	170·00 - 189·99
المجموع 70	

(د)

التكرار	الأجور
8	£50·00 - £59·99
10	60·00 - 69·99
16	70·00 - 79·99
15	80·00 - 89·99
10	90·00 - 99·99
8	100·00 - 119·99
3	120·00 - 179·99
المجموع 70	

٢ — ١٣ كون مدرجاً تكرارياً للتوزيع التكرارى الموضح فى الجدول (د) بالمسألة ٢ — ١٢

الحـل :



شكل ٢ — ٧

المدرج التكرارى المطلوب يظهر بالشكل ٢ — ٧ . لتكوين هذا المدرج نستخدم القاعدة أن المساحة تتناسب مع التكرار . إذا افترضنا أن المستطيل A يقابل الفئة الأولى (أنظر الجدول (د) فى المسألة ٢–١٢) بتكرار قدره 8. وبما أن الفئة السادسة بالجدول (د) لها نفس التكرار 8 ، فإن المستطيل B والذى يمثل هـذه الفئة يجب أن تكون مساحته هى نفسها مساحة المستطيل A . بما أن طول B ضعف طول A فإن ارتفاعه يجب أن يكون نصف ارتفاع A كما هو موضح .

وكذلك فإن المستطيل C الممثل للفئة الأخيرة فى الجدول (د) له ارتفاع نصف وحدة على المحور الرأسى .

التوزيع التكرارى المتجمع والمنحنى التكرارى المتجمع

٢ – ١٤ كون : (أ) التوزيع التكرارى المتجمع .

(ب) التوزيع التكرارى المتجمع النسبى .

(ج) المنحنى التكرارى المتجمع .

(د) المنحنى التكرارى المتجمع النسبى .

وذلك من التوزيع التكرارى بالمسألة ٢ – ٣ .

الحـل :

(أ) ، (ب) التوزيع التكرارى المتجمع والتوزيع التكرارى المتجمع للنسب المئوية (أو التوزيع التكرارى المتجمع النسبى) موضحان بالجدول ٢ – ٩ . لاحظ أن كل قيمة فى العمود الثانى حصلنا عليها بالجمع المتتالى فى جدول المسألة ٢ – ٣ . مثلا

$34 = 8+10+16$ ، $18 = 8+10$

وهكذا ، كل قيمة فى العمود الثالث حصلنا عليها بقسمة القيم المقابلة فى العمود الثانى على التكرار الكلى 65 وعبرنا عن الناتج كنسبة مئوية مثلا

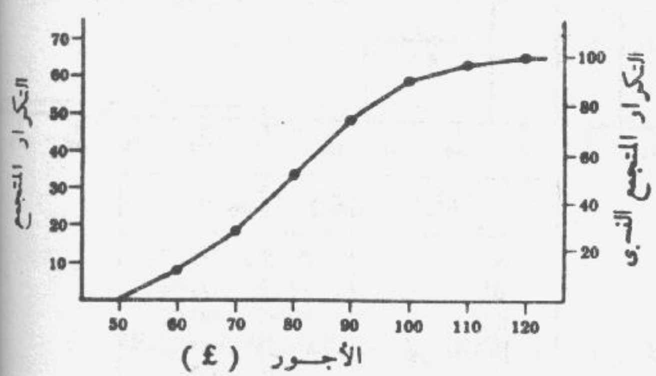
$$34/65 = 52.3\%$$

القيم فى هذا العمود يمكن الحصول عليها أيضاً من الجمع المتتالى للقيم فى العمود الثانى من جدول المسألة ٢ – ١٠ (أ) . مثلا

$52.3 = 12.3 + 15.4 + 24.6$ ، $27.7 = 12.3 + 15.4$ ، وهكذا

جدول ٢ – ٩

الأجور	التكرار المتجمع	التكرار المتجمع النسبى
أقل من £50.00	0	0.0
أقل من 60.00	8	12.3
أقل من 70.00	18	27.7
أقل من 80.00	34	52.3
أقل من 90.00	48	73.8
أقل من 100.00	58	89.2
أقل من 110.00	63	96.9
أقل من 120.00	65	100.0



شكل ٢ – ٨

(ج) ، (د) المنحنى التكرارى المتجمع (أو المضلع التكرارى المتجمع) والمنحنى التكرارى المتجمع النسبى (أو المضلع التكرارى المتجمع النسبى) مرسومان معاً بالشكل ٢–٨ المقياس الرأسى إلى اليسار مبين عليه التكرار المتجمع بينما المقياس الرأسى إلى اليمين مبين عليه التكرار المتجمع النسبى . وتسمى هـذه الحالة . بالمنحنى التكرارى المتجمع الصاعد أو المنحنى التكرارى النسبى الصاعد أو للاساس « أقل من » وذلك نظراً للطريقة التى تتجمع بها التكرارات .

٢ – ١٥ كون (أ) التوزيع التكرارى المتجمع النازل « أو أكثر »

(ب) المنحنى التكرارى المتجمع النسبى النازل « أو أكثر »

وذلك من بيانات التوزيع التكرارى للمسألة ٢ – ٣

الحـــل :

(أ) لاحظ أن القيم الموجودة بالعمود الثانى بالجدول ٢ – ١٠ قد حصلنا عليها بالإضافة المتتالية للقيم الموجودة بالعمود التالى بالجدول ٢ – ٥ بالمسألة ٢ – ٣ بادئين بأسفل هذا الجدول . مثلا

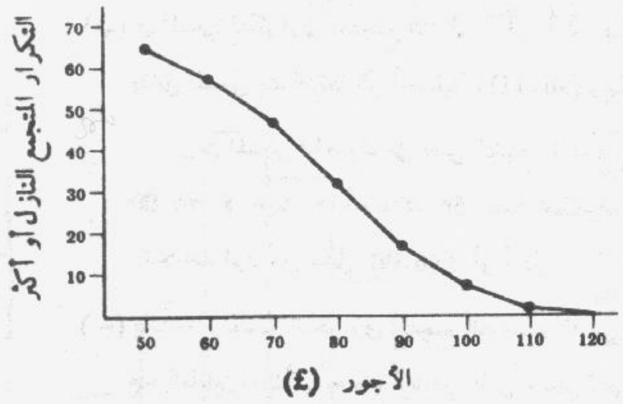
$7 = 2+5$ ، $17 = 2+5+10$

وهكذا .

ويمكن الحصول على هذه القيم أيضاً بطرح كل قيمة بالعمود الثـانى من جدول المسألة ٢–١٤ من التكرار الكلى 65. مثلا

$57 = 65 - 8$ ، $47 = 65 - 18$

وهكذا .



شكل ٢ – ٩

جدول ٢ – ١٠

الأجـــور	التكرار المتجمع النازل « أو أكثر »
£50·00 أو أكثر	65
60·00 أو أكثر	57
70·00 أو أكثر	47
80·00 أو أكثر	31
90·00 أو أكثر	17
100·00 أو أكثر	7
110·00 أو أكثر	2
120·00 أو أكثر	0

٢ – ١٦ من المنحنى التكرارى المتجمع بالمسألة ٢ – ١٤ أو ٢ – ١٥ قدر عدد العاملين الذين يحصلون على دخل .

(أ) أقل من £88.00 شهرياً .

(ب) £96.00 أو أكثر شهرياً .

(جـ) على الأقل £63.00 ولكن لا يقل عن £75.00 شهرياً .

الحـــل :

(أ) بالرجوع إلى المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد « أقل من » للمسألة ٢–١٤ ، ارسم خطاً رأسياً يتقاطع مع محور الأجور عند £88.00 . هذا الخط يقابل المنحنى المتجمع الصاعد عند النقطة التى أحداثياتها (88, 45) وبهذا فإن عدد العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من 88.00 £ شهرياً هو 45 .

(ب) فى المنحنى التكرارى المتجمع النازل أو أكثر بالمسألة ٢ – ١٥ ارسم خطاً رأسياً عند £96.00 . هذا الخط يقابل المنحنى عند النقطة التى أحداثياتها (96، 11) وبهذا فإن هناك 11 عاملا يحصلون على دخل £96.00 أو أكثر .

ومن الممكن الحصول على نفس النتيجة باستخدام المنحنى المتجمع الصاعد « أقل من » برسم خط رأسى عند 96.00 £ حيث نجد أن هناك 54 عاملا يحصلون على دخل أقل من £96.00 وبهذا فإن 11 = 54 — 65 عاملا يحصلون على دخل £96.00 أو أكثر .

(ج) باستخدام المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد « أقل من » بالمسألة ٢ – ١٤ نجد أن :

عدد العاملين المطلوب = عدد العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من £75.00

– عدد العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من £63.00 : 15 – 11 = 26

لاحظ أن النتيجة السابقة يمكن الحصول عليها بالاستكمال فى جدول التكرارات المتجمعة ، على سبيل المثال فإن النتيجة التى حصلنا عليها فى (أ) يمكن الحصول عليها كالآتى : بما أن £88.00 هى 8/10 أو 4/5 المسافة بين £80 و £90 فإن رقم العاملين المطلوب يجب أن يكون 4/5 المسافة بين القيم المقابلة وهى 34 و 48 (أنظر جدول المسألة ٢ – ١٤) . ولكن 4/5 الطريق بين 34 ,48 هو $\frac{4}{5}(48-34) = 11$ فإن رقم العاملين المطلوب هو 45 = 11 + 34 .

٢ – ١٧ خمسة بنسات رميت 1000 مرة وفى كل مرة يسجل عدد البنسات التى تظهر الصورة . يسجل عدد الرميات التى ظهر فيها 5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0 صورة بالجدول ٢ – ١١ .

(أ) ارسم هذه البيانات .

(ب) كون جدولا تظهر فيه النسبة المئوية للرميات التى تظهر بها الصورة أقل من 6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0

(ج) ارسم بيانات الجدول الذى حصلت عليه فى (ب) .

جدول ٢ – ١١

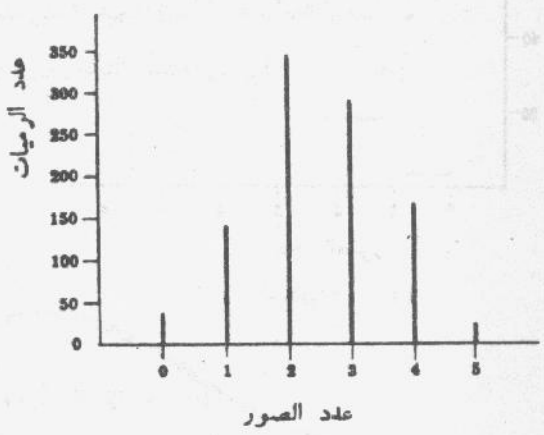
عدد الصور	عدد الرميات (التكرار)
0	38
1	144
2	342
3	287
4	164
5	25
المجموع	1000

الحـــل :

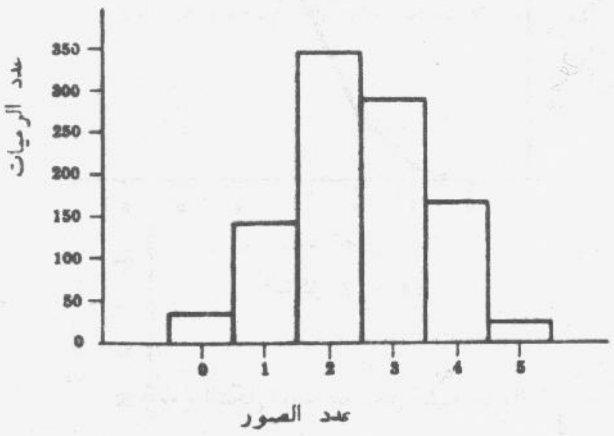
(أ) يمكن التعبير بيانياً عن هذه البيانات كما فى الشكل ٢ – ١٠ أو ٢ – ١١ .

الشكل ٢ – ١٠ يبدو أنه أكثر ملاءمة لتمثيل هذه البيانات حيث ان عدد الصور لا يمكن ان يكون 1.5 أو 3.2 مثلا . وهذا الشكل هو صورة من صور الأعمدة البيانية حيث عرض العمود هو الصفر . ويسمى أحياناً بالشكل القضيبى . ويستخدم على وجه الخصوص عندما تكون البيانات متقطعة .

الشكل ٢ – ١١ يمثل المدرج التكرارى للبيانات . لاحظ أن المساحة الكلية للمدرج التكرارى هو التكرارات الكلية 1000 كما يجب أن تكون . عند التمثيل البيانى باستخدام المدرج التكرارى أو المضلع التكراوى فإنه من الضرورى معالجة البيانات كما لو كانت متصلة . وسوف يتضح فيما بعد أن هذه الطريقة مفيدة . لاحظ أننا قد سبق أن استخدمنا المدرج التكرارى والمضلع التكرارى لبيانات متقطعة فى بيانات المسألة ٢ – ١٠ .



شكل ٢ – ١٠



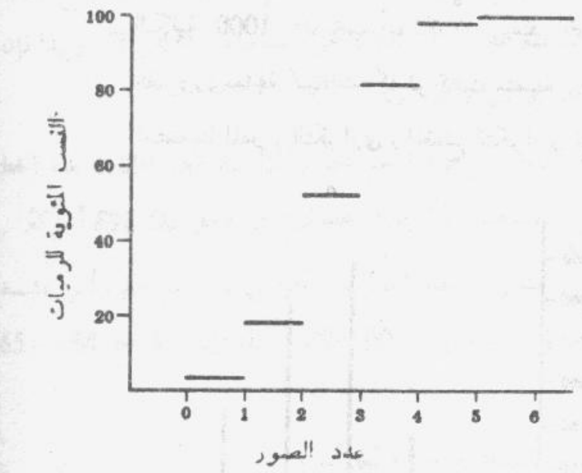
شكل ٢ – ١١

(ب) بالرجوع إلى بيانات الجدول ٢ – ١٢ نجد أنه يوضح التوزيع التكرارى المتجمع والتوزيع التكرارى المتجمع النسبى (نسب مئوية) لعدد الصور .

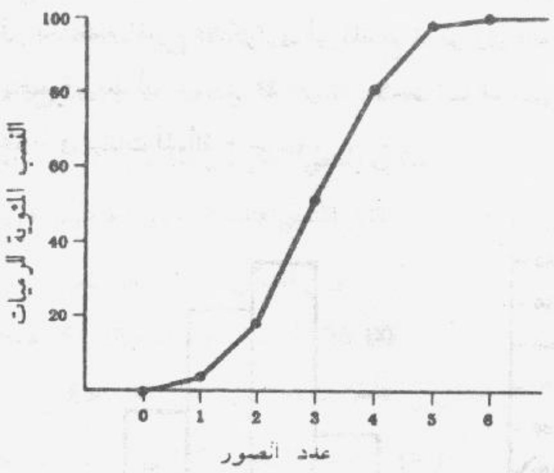
يجب أن نلاحظ أن البيانات « أقل من 1 » ، « أقل من 2 » ..... وهكذا من الممكن أن تكتب « أقل من أو يساوى 0 » « أقل من أو يساوى 1 » .... . وهكذا

جدول ٢ – ١٢

عدد الصور		عدد الرميات (تكرار متجمع)	النسبة المئوية لعدد الرميات والتكرار المتجمع للنسب المئوية
	0	0	0·0
أقل من	1	38	3·8
أقل من	2	182	18·2
أقل من	3	524	52·4
أقل من	4	811	81·1
أقل من	5	975	97·5
أقل من	6	1000	100·0



الشكل ٢ – ١٢



الشكل ٢ – ١٣

(جـ) الشكل المطلوب يمكن تمثيله إما بالشكل ٢ – ١٢ أو الشكل ٢ – ١٣ .

الشكل ٢ – ١٢ أكثر ملاءمة لتمثيل البيانات المتقطعة ، حيث أن النسب المئوية للرميات حيث عدد الصور أقل من 2 يساوى النسب المئوية للرميات حيث عدد الصور أقل من 1.75 أو 1.56 أو 1.23 . بحيث أن النسبة 18.2% يجب أن تظهر كتمثيل لهذه القيم . (موضحة بالخط الأفقى) .

الشكل ٢ – ١٣ يظهر المضلع التكرارى المتجمع أو المنحنى التكرارى المتجمع لهذه البيانات وبه تعالج البيانات كما لو كانت بيانات متصلة

لاحظ أن الأشكال ٢ – ١٢ و ٢ – ١٣ يقابلان على الترتيب الأشكال ٢ – ١٠ ، ٢ – ١١ فى الجزء (أ)

المنحنيات التكرارية والمنحنيات التكرارية المتجمعة الممهدة

٢ – ١٨ بيانات الـ 100 طالب فى جامعة XYZ (أنظر صفحة ٤٥) تمثل فى الواقع عينة مأخوذة من 1546 طالب من طلبة هذه الجامعة . من البيانات المعطاة من العينة .

(أ) كون مضلعاً تكرارياً ممهداً للنسب المئوية (منحنى تكرارى) ، ثم

(ب) كون منحنى تكرارياً متجمعاً صاعداً « أقل من » للنسب المئوية بحيث يكون ممهداً

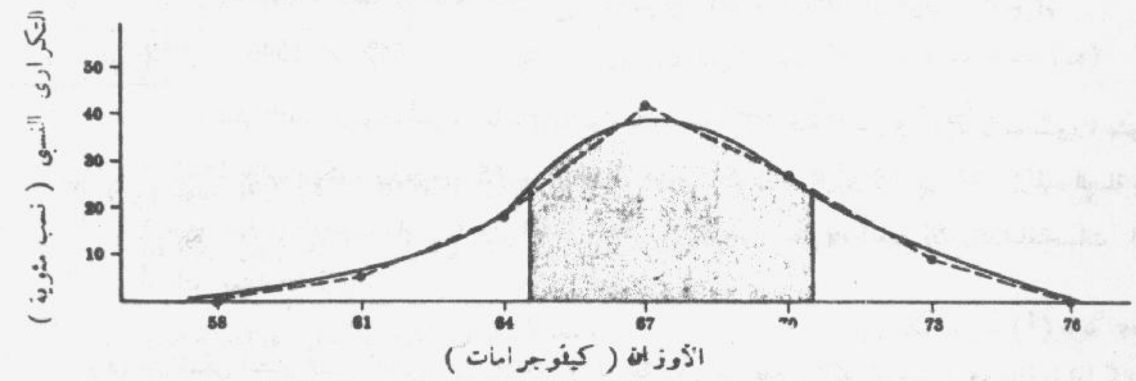
(جـ) من بيانات (أ) ، (ب) قدر عدد الطلبة فى الجامعة الذين تقع أوزانهم بين 70 kg و 65. ماهى الفروض التى يجب أن تضعها .

(د) هل من الممكن استخدام هذه النتائج لتقدير نسبة الذكور فى الولايات المتحدة الذين تقع أوزانهم بين 70 kg و 65 ؟

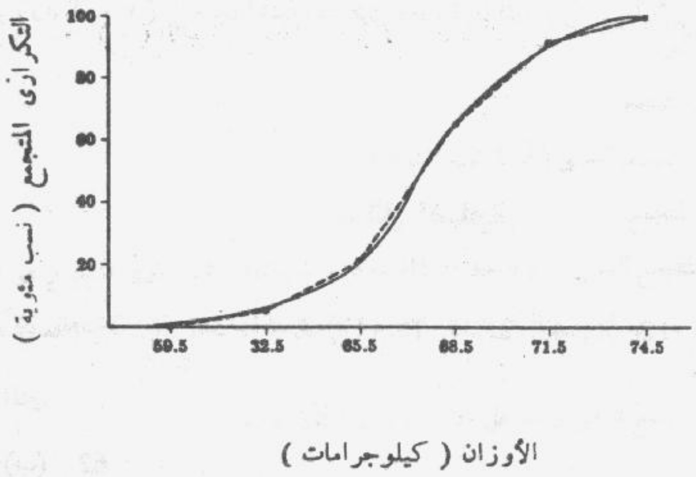
الحــل :

(أ) ، (ب) فى الشكلين ٢ – ١٤ ، ٢ – ١٥ نجد أن الخطوط المتقطعة تمثل المضلع التكرارى والمنحنى التكرارى المتجمع وقد حصلنا عليهما من المعطى فى صفحتى (٤٨، ٤٩) .

والمنحنى الممهد المطلوب يظهر فى الشكل بالخطوط الثقيلة وقد حصلنا عليه بتقريب الخطوط المتقطعة بخط ممهد . من الناحية العملية فن الأسهل تمهيد المنحنى التكرارى المتجمع بحيث نحصل عليه أولا ثم نحصل على المدرج التكرارى الممهد بقراءة القيم من المنحنى التكرارى المتجمع الممهد .



شكل ٢ — ١٤



شكل ٢ — ١٥

(ج) إذا كانت العينة المكونة من 100 طالب ممثلة للمجتمع المكون من 1546 طالب ، فإن المنحنيات الممهدة فى الأجزاء (أ) ، (ب) من الممكن اعتبارها المنحنى التكرارى النسبى والمنحنى المتجمع النسبى للمجتمع . هذا الفرض صحيح فقط فى حالة ما إذا كانت العينة عشوائية ، بمعنى أن فرصة كل طالب فى اختياره ضمن العينة مساوية لفرصة أى طالب آخر .

وبما أن الأوزان بين 65 kg و70 مسجلة إلى أقرب كيلوجرام فإنها تمثل مثلا الأوزان بين 64.5 و70.5 kg، ونسبة الطلبة فى المجتمع الذين لهم هذه الأوزان من الممكن الحصول عليها بقسمة المساحة المظللة فى الشكل ٢ – ١٤ على المساحة الكلية المحصورة بين الخط الممهد ومحور السينات .

ومن السهل استخدام الشكل ٢ – ١٤ . ومنه نجد أن

نسبة الطلبة الذين تقل أوزانهم عن 70.5 kg = 82%

نسبة الطلبة الذين تقل اوزانهم عن 64.5 kg = 18%

ولهذا فإن أوزان الطلبة بين 65 و 70 kg وهى $64\% = 18\% - 82\%$

وبهذا فإن عدد الطلبة فى الجامعة الذين تقع أوزانهم بين 65 و 70kg إلى أقرب كيلوجرام

$$64\% \times 1546 = 989$$

ويمكن التعبير بصوره أخرى عما سبق بالقول بأن احتمال أو فرصة شخص فى أن يختار بصـــورة عشوائية من الـ 1546 طالب ويكون وزنه بين 65 و 70 kg هو 64%, 0.64 أو 64 من 100 ولهذه الصلة بالأحتمال (سندرسها فى الفصل السادس) فإن المنحنى التكرارى النسبى يسمى فى أغلب الأحيان بالمنحنيات الاحتمالية أو التوزيعات الاحتمالية .

(د) من الممكن اعتبار النسبة المطلوبة هى 64% (بدرجة أكبر من عدم التأكد عما سبق) فى حالة ما إذا كنا مقتنعين بأن العينة المكونة من الـ 100 طالب المسحوبة من المجتمع الكلى للذكور بالولايات المتحدة هى عينة عشوائية وعلى أية حال فإن هذا يبدو غير محتمل لعدة أسباب منها (١) من الممكن أن يكون بعض طلبة الكليات لم يصلوا إلى أقصى وزن لهم (٢) الأجيال الجديدة قد تميل لأن تكون أثقل وزناً من آبائهم .

مسائل اضافية

٢ – ١٩ (أ) رتب الأرقام 24, 65, 34, 61, 3, 10, 18, 5, 21, 42, 56, 12 فى منظومة ، م

(ب) حدد المدى

ج : (ب) 62

٢ – ٢٠ الجدول ٢ – ١٣ يبين التوزيع التكرارى للعمر الانتاجى لـ 400 من لمبات الراديو التى أختبرت فى شركة L&M للمبات . بالرجوع لهذا الجدول . عين

(أ) الحد الأعلى للفئة الخامسة

(ب) الحد الأدنى للفئة الثامنة

(ج) مركز الفئة السابعة

(د) الحدود الحقيقية للفئة الأخيرة

(هـ) طول الفئة

(و) تكرار الفئة الرابعة

(ز) التكرار النسبى للفئة السادسة

(ح) النسبة المئوية للمبات التى عمرها الانتاجى لايتجاوز 600 ساعة

(ط) النسبة المئوية للمبات التى يزيد عمرها الانتاجى أو يساوى 900 ساعة .

(ى) النسبة المئوية للمبات التى لايقل عمرها الانتاجى عن 500 ولكن يقل عن 1000 ساعة .

جدول ٢ – ١٣

العمر الإنتاجى (بالساعات)	عدد اللمبات
300 - 399	14
400 - 499	46
500 - 599	58
600 - 699	76
700 - 799	68
800 - 899	62
900 - 999	48
1000 - 1099	22
1100 - 1199	6
الإجمالى	400

ج : (أ) 799 (ب) 1000 (ج) 949.5 (د) 1099.5, 1199.5 (هـ) 100 ساعة (و) 76
(ز) 62/400 = 0.155 or 15.5% (ح) 29.5% (ط) 19.0% (ى) 78.0%

٢ – ٢١ كون (أ) مدرجاً تكرارياً . (ب) مضلعاً تكرارياً للتوزيع التكرارى للمسألة السابقة .

٢ – ٢٢ لبيانات المسألة ٢ – ٢٠ كون (أ) التوزيع التكرارى النسبى (ب) المدرج التكرارى النسبى (ج) المضلع التكرارى النسبى .

٢ – ٢٣ لبيانات المسألة ٢ – ٢٠ كون

(أ) التوزيع التكرارى المتجمع .

(ب) التوزيع التكرارى المتجمع النسبى (أو النسب المئوية) .

(ج) المنحنى التكرارى المتجمع .

(د) المنحنى التكرارى المتجمع النسبى . (لاحظ أن المقصود عادة بالمنحنى التكرارى المتجمع هو المنحنى المستخدم فيه الأساس « أقل من » أى المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد هذا مالم يذكر خلاف ذلك) .

٢ – ٢٤ حل المسألة السابقة عندما تتجمع التكرارات على الأساس « أو أكثر » .

٢ – ٢٥ قدر نسبة اللمبات فى المسألة ٢ – ٢٠ التى أعمارها الإنتاجية :

(أ) أقل من 560 ساعة .

(ب) 970 أو أكثر ساعة .

(ج) بين 620 و 890 ساعة .

ج : (أ) 24% (ب) 11% (ت) 46% .

٢ – ٢٦ القطر الداخلى لجلبة مستديرة منتجة بواسطة إحدى الشركات يمكن قياسها إلى أقرب وحدة من مائة من المليمترات . إذا كانت مراكز الفئات للتوزيع التكرارى لهذه الأقطار معطاه بالمليمترات هى

3.21, 3.24, 3.27, 3.30, 3.33, 3.36

أوجد :

(أ) طول الفئة . (ب) الحدود الحقيقية للفئات (ج) حدود الفئة .

ج : (أ) 0.03 mm

(ب) 3.195, 3.225, 3.255, ..., 3.375 mm

(ج) 3.20 — 3.22, 3.23 — 3.25, 3.26 — 3.28,..., 3.35 — 3.37

٢ – ٢٧ الجدول التالى يبين الأقطار بالمليمترات لعينه من 60 من رلمان البلى مصنوعة فى شركة ما . كون التوزيع التكرارى للأقطار مستخدماً طول فئة ملائم .

7·38	7·29	7·43	7·40	7·36	7·41	7·35	7·31	7·26	7·37
7·28	7·37	7·36	7·35	7·24	7·33	7·42	7·36	7·39	7·35
7·45	7·36	7·42	7·40	7·28	7·38	7·25	7·33	7·34	7·32
7·33	7·30	7·32	7·30	7·39	7·34	7·38	7·39	7·27	7·35
7·35	7·32	7·35	7·27	7·34	7·32	7·36	7·41	7·36	7·44
7·32	7·37	7·31	7·46	7·35	7·35	7·29	7·34	7·30	7·40

٢ – ٢٨ لبيانات المسألة السابقة كون (أ) مدرج تكرارى (ب) مضلع تكرارى نسبى

(ج) منحنى تكرارى نسبى (د) مدرج تكرارى نسبى (هـ) مضلع تكرارى نسبى

(و) التوزيع التكرارى المتجمع (ز) التوزيع التكرارى المتجمع النسبى

(ح) المنحنى التكرارى المتجمع (ط) المنحنى التكرارى المتجمع النسبى .

٢ – ٢٩ من نتائج المسألة ٢ – ٢٨ أوجد نسبة رولمان البلى الذى قطره

(أ) يزيد عن 0.732 mm (ب) ليس أكبر من 0.736 mm

(ج) بين 0.730 mm و 0.738 .

قارن نتائجك بالنتائج التى تحصل عليها مباشرة من البيانات الخام للمسألة ٢ – ٢٧

٢ – ٣٠ حل المسألة ٢ – ٢٨ مستخدما بيانات المسألة ٢ – ٢٠ .

٢ – ٣١ يظهر الجدول ٢ – ١٤ التوزيع النسبى لإجمالى دخول الذكور الذين أعمارهم 14 سنة فأكثر فى الولايات المتحدة فى سنة 1956 باستخدام هذا الجدول أجب عن الأسئلة التالية :

(أ) ماهو طول الفئة الثانية ؟ الفئة السابعة ؟

(ب) ماهو عدد أطوال الفئات المختلفة بالجدول ؟

(ج) ما هو عدد الفئات المفتوحة ؟

(د) كيف يمكن كتابة الفئة الأولى بحيث
يكون طولها مساوياً لطول الفئة الثانية ؟

(هـ) ماهو مركز الفئة الثانية ؟ الفئة السابعة ؟

(و) ماهى الحدود الحقيقية للفئة الرابعة ؟

(ز) ما هى نسبة الذكور الذين يحصلون على
دخل $4000 أو أكثر ؟ أقل من $3000 ؟

(ح) ماهى نسبة الذكور الذين يحصلون على
دخل على الأقل $3000 ولكن لايزيد على $5000 ؟

الدخل بالدولارات	النسبة المئوية
Under $1000	17·2
1000 – 1999	11·7
2000 – 2999	12·1
3000 – 3999	14·8
4000 – 4999	15·9
5000 – 5999	11·9
6000 – 9999	12·7
10000 and over	3·6

المصدر : مكتب التعداد

(ط) ماهى نسبة الذكور الذين يحصلون على دخل بين $6300 ، $3000. ماهى الفروض المستخدمة فى هذا الحساب ؟

(ى) لماذا لايساوى مجموع النسب 100% ؟

ج : (أ) $4000 ، $1000 (ب) أربعة (على الرغم من أنه من حيث الدقة فإن الفئة الأولى ليس لها طول محدد) (ج) واحد (على الرغم من أن الفئة الأولى تظهر كفئة مفتوحة ، ولكنها فى الواقع بديل عن كتابة (0—$999.99) (د) 0-$999 (هـ) $1499.50 ، ولكثير من الأغراض العملية يمكن كتابتها $ 8000 ، $1500 على التوالى . (و) $3999.50 ، $2999.50
(ز) 44.1%, 41.0% . (ح) 30.7% . (ط) 42.0%
(ى) نظراً لأخطاء التقريب فى حساب النسب المئوية .

٢ — ٣٢ (أ) لماذا يستحيل تكوين مدرج تكرارى نسبى أو مضلع تكرارى للتوزيع الموضح بالمسألة السابقة
(ب) كيف يمكن تعديل التوزيع بحيث يمكن تكوين المدرج التكرارى النسبى أو المضلع التكرارى النسبى ؟
(ج) نفذ التكوين باستخدام التعديلات الموضحة فى (د) .

٢ — ٣٣ (أ) كون المدرج التكرارى النسبى الممهد والمنحنى التكرارى النسبى الممهد المقابلين لبيانات المسألة ٢ — ٢٠ .
(ب) من النتائج (أ) قدر احتمال أن تحترق لمبة قبل 600 ساعة
(ج) ناقش المخاطرة أو الفرصة التى يتحملها المصنع إذا ضمن أن اللمبة ستستمر صالحة 425 ساعة ؟ 875 ساعة ؟
(د) إذا قدم المصنع ضماناً برد ثمن اللمبة إذا تلفت خلال 90 يوماً . ما هو احتمال أنه سيقوم برد الثمن إذا افترضنا أن اللمبة تستخدم 4 ساعات يومياً ؟ 8 ساعات يومياً ؟

ج : (ب) 0.30 (ج) 0.52 ، 0.008 .

٢ — ٣٤ (أ) ارم أربع عملات خمسين مرة وسجل فى جدول عدد الصور فى كل رمية (ب) كون توزيعاً تكرارياً يظهر به عدد الرميات التى ظهر بها 4 ,3 ,2 ,1 ,0 صورة . (ج) كون توزيعاً نسبياً يقابل (ب) . (د) قارن النسب التى حصلت عليها فى (ج) بالتوزيع النظرى 6.25% ,25% ,37.5% ,25% ,6.25% (بالتناسب مع (1, 4, 6, 4, 1) والتى يمكن الحصول عليها باستخدام قواعد الاحتمالات .

الفصل الثالث

الوسط والوسيط والمنوال
والمقاييس الأخرى للنزعة المركزية

رمز الدليل او الرقم الجانبى الأسفل

الرمز X_j (يقرأ "X دليل j") يمثل أى من القيم $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N$ التى يأخذها المتغير X وعددها N . الحرف j فى X_j التى يمكن أن يكون أى رقم $1, 2, 3, \ldots, N$ يسمى الدليل أو الرقم الجانبى الأسفل . ومن الواضح أن أى حرف آخر غير j مثل i, k, p, q, s يمكن أيضا استخدامه .

رقم التجميع

الرمز $\sum_{j=1}^{N} X_j$ يستخدم للدلالة على مجموع كل الـ X_j's ابتداء من $j = 1$ إلى $j = N$ بالتعريف .

$$\sum_{j=1}^{N} X_j = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_N$$

وإذا لم يكن هناك أى غموض محتمل فإننا نعبر عن هذا المجموع بشكل أبسط بالرمز $\Sigma X, \Sigma X_j$ or $\sum_j X_j$

الرمز Σ هو حرف التاج اليونانى سيجما ونعنى به هنا المجموع .

مثال ١ — $$\sum_{j=1}^{N} X_j Y_j = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3 + \ldots + X_N Y_N$$

مثال ٢ — $$\sum_{j=1}^{N} aX_j = aX_1 + aX_2 + \ldots + aX_N = a(X_1 + X_2 + \ldots + X_N) = a\sum_{j=1}^{N} X_j$$

حيث a ثابت – وبشكل أبسط $\Sigma aX = a\Sigma X$.

مثال ٣ — إذا كانت a, b, c ثوابت $\Sigma(aX + bY - cZ) = a\Sigma X + b\Sigma Y - c\Sigma Z$

أنظر المسألة ٣ – ٣

المتوسطات ومقاييس النزعة المركزية

المتوسط هو القيمة النموذجية أو الممثلة لمجموعة من البيانات – وحيث أن مثل هذه القيمة النموذجية تميل إلى الوقوع في المركز داخل مجموعة بيانات مرتبة حسب قيمها ، فإن المتوسطات تسمى أيضا بمقاييس النزعة المركزية . ويمكن أن نعرف صورا عديدة للمتوسطات وإن كان الأكثر شيوعاً الوسط الحسابي أو باختصار الوسط ، الوسيط ، المنوال ، الوسط الهندسي والوسط التوافقي – وكل منهما له مميزاته وعيوبه وهذا يعتمد على البيانات والهدف من استخدامه .

الوسط الحسابي

الوسط الحسابي أو الوسط للمجموعة N من الأرقام $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N$ ويرمز له بالرمز $\bar{X}$ (ويقرأ "X bar") ويعرف كالآتي

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_N}{N} = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_j}{N} = \frac{\Sigma X}{N} \qquad (1)$$

مثال : الوسط الحسابي للأرقام 8, 3, 5, 12, 10 هو

$$\bar{X} = \frac{8 + 3 + 5 + 12 + 10}{5} = \frac{38}{5} = 7{\cdot}6$$

إذا كانت الأرقام $X_1, X_2, \ldots, X_K$ تحدث $f_1, f_2, \ldots, f_K$ مرة على الترتيب (بمعنى أنها تحدث بتكرارات $f_1, f_2, \ldots, f_K$) فإن الوسط الحسابي سيكون

$$\bar{X} = \frac{f_1X_1 + f_2X_2 + \ldots + f_KX_K}{f_1 + f_2 + \ldots + f_K} = \frac{\sum_{j=1}^{K} f_jX_j}{\sum_{j=1}^{K} f_j} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fX}{N} \qquad (2)$$

حيث $N = \Sigma f$ هو مجموع التكرارات أى مجموع عدد الحالات .

مثال : إذا كانت 5, 8, 6, 2 تحدث بتكرارات 3, 2, 4, 1 على الترتيب فإن الوسط الحسابى سيكون

$$\bar{X} = \frac{(3)(5) + (2)(8) + (4)(6) + (1)(2)}{3 + 2 + 4 + 1} = \frac{15 + 16 + 24 + 2}{10} = 5{\cdot}7$$

الوسط الحسابى المرجح

فى بعض الأحيان نقرن بعض الأرقام $X_1, X_2, \ldots, X_K$ بمعاملات ترجيح أو أوزان $w_1, w_2, \ldots, w_K$ وهذه تعتمد على الدلالة أو الأهمية المرتبطة بهذا الأرقام . فى هذه المسألة .

$$\bar{X} = \frac{w_1X_1 + w_2X_2 + \ldots + w_KX_K}{w_1 + w_2 + \ldots + w_K} = \frac{\Sigma wX}{\Sigma w} \qquad (3)$$

يسمى بالوسط الحسابى المرجح . لاحظ أوجه الشبه بالمعادلة (٢) التى يمكن اعتبارها وسطا حسابيا مرجحا بأوزان $f_1, f_2, \ldots, f_K$.

مثال إذا كان الامتحان النهائى فى مقرر أعطى وزنا ثلاثة أمثال الامتحانات الشفهية وإذا حصل طالب فى الامتحان النهائى على 85 وفى الامتحانات الشفهية على 70,90 فإن متوسط تقديره هـو

$$\bar{X} = \frac{(1)(70) + (1)(90) + (3)(85)}{1+1+3} = \frac{415}{5} = 83$$

خصائص الوسط الحسابى

(ا) المجموع الجبرى لانحرافات القيم عن وسطها الحسابى يساوى صفرا .

مثال :

انحرافات الأرقام 10 ,12 ,5 ,3 ,8 عن وسطها الحسابى 7.6 هو 7.6 — 8 ,7.6 — 3 ,7.6 — 5 ,7.6 — 12 ,7.6 — 10 or 4.0, — 4.6, — 2.6, 4.4, 2.4 ومجموعه الجبرى 0.4 — 4.6 — 2.6 + 4.4 + 2.4 = 0 .

(ب) مجموع مربعات انحرافات مجموعة من الأرقام X_j عن أى رقم a يكون أصغر ما يمكن فى حالة واحدة فقط إذا كانت $a = \bar{X}$. أنظر المسألة ٤ – ٢٧ الفصل الرابع

(جـ) إذا كان متوسط f_1 من الأرقام هـو m_1, f_2 من الأرقام هو m_2, ... و f_K من الأرقام متوسطها m_K فإن متوسط جميع الأرقام هـو

$$\bar{X} = \frac{f_1m_1 + f_2m_2 + \ldots + f_Km_K}{f_1 + f_2 + \ldots + f_K} \qquad (٤)$$

أى الوسط الحسابى المرجح لجميع الأوساط . أنظر المسألة ٣–١٢ .

(د) إذا كانت A أى وسط حسابى افتراضى أو تخمين (والذى يمكن أن يكون أى رقم) وإذا كان $d_j = X_j - A$ هو انحرافات X_j عن A فإن المعادلات (١) ، (٢) سيصبحان على الترتيب .

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{j=1}^{N} d_j}{N} = A + \frac{\Sigma d}{N} \qquad (٥)$$

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{j=1}^{K} f_j d_j}{\sum_{j=1}^{K} f_j} = A + \frac{\Sigma fd}{N} \qquad (٦)$$

حيث $N = \sum_{j=1}^{K} f_j = \Sigma f$ لاحظ أن (٥) و (٦) يمكن تلخيصهما بالمعادلة $\bar{X} = A + \bar{d}$ (أنظر المسألة ٣-١٨) .

الوسط الحسابى محسوبا من بيانات مجمعة

عندما تعرض البيانات فى توزيع تكرارى ، فإن جميع القيم التى تقع داخل فئة معينة تعتبر أنها مطابقة لمركز الفئة أو منتصف مدى الفئة . الصيغ (٢) ، (٦) يمكن استخدامها للبيانات المجمعة إذا اعتبرنا X_j مركز الفئة و f_j التكرار المقابل لها ، A أى مركز فئة إفتراضى أو تخمين A انحرافات $d_j = X_j - A$ عن A .

الحساب باستخدام الصيغ (٢) ، (٦) يسميان أحيـانا بالطريقة المطولة والطريقة المختصرة على الترتيب . (أنظر المسائل ٣-١٥ و ٣-٢٠) . إذا كانت أطوال الفئات متساوية وتساوى C ، والانحرافات $d_j = X_j - A$ يمكن التعبير عنها بالصورة cu_j حيث u_j يمكن أن يكون عددا صحيحا موجبا أو سالبا أو صفرا ، أى $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$، وبهذا فان الصيغة (٦) تصبح

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\sum_{j=1}^{K} f_j u_j}{N}\right)c = A + \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)c \qquad (٧)$$

والتى تكافئ المعادلة $\bar{X} = A + c\bar{u}$. (أنظر المسألة ٣-٢١) . وهذه تسمى بطريقة الترميز عند حساب الوسط الحسابى . وهذه الطريقة مختصرة جداً ويجب استخدامها دائما للبيانات المجمعة عندما تكون أطوال الفئات متساوية . (أنظر المسائل ٣-٢٢ و ٣-٢٣) . لاحظ أنه فى طريقة الترميز فإن قيم المتغير X تحول إلى قيم المتغير u بالعلاقة $X = A + cu$.

الوسيط

الوسيط لمجموعة من الأرقام مرتبة حسب قيمها (فى منظومة) هى القيمة التى فى المنتصف أو الوسط الحسابى للقيمتين بالمنتصف .

مثال ١ — مجموعة الأرقام 3, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 8, 10 وسيطها هــو 6.

مثال ٢ — مجموعة الأرقام 5, 5, 7, 9, 11, 12, 15, 18 وسيطها هو $\frac{1}{2}(9 + 11) = 10$.

وفى البيانات المجمعة فإن الوسيط نحصل عليه بالاستكمال ويحسب كالآتى :

$$\text{الوسيط} = L_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - (\Sigma f)_1}{f_{median}}\right)c \qquad (٨)$$

حيث

L_1 = الحد الأدنى للفئة الوسيطية (أى الفئة التى يقع فيها الوسيط) .

N = عدد العناصر فى البيانات (مجموع التكرارات) .

$(\Sigma f)_1$ = مجموع التكرارات لجميع الفئات قبل الفئة الوسيطية .

f_{median} = تكرار الفئة الوسيطية .

c = طول الفئة الوسيطية .

ويمكن التعبير هندسيا عن الوسيط بأنه القيمة X على الاحداثى السينى التى إذا رسم عندها عمود رأسى فإنه يقسم المدرج التكرارى إلى جزءين متساويين . يعبر عن هذه القيمة لـ X أحيانا بـ $\tilde{X}$.

المنوال

المنوال لمجموعة من القيم هى القيمة التى تتكرر أكثر من غيرها أو القيمة الأكثر شيوعا . وقد لايكون للقيم منوال ، وقد يوجد للقيم منوال ولكنه غير وحيد .

مثال ١ — المجموعة 2, 2, 5, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 18 لها منوال 9

مثال ٢ — المجموعة 3, 5, 8, 10, 12, 15, 16 ليس لها منوال .

مثال ٣ — المجموعة 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 7, 7, 9 لها منوالان هما 7،4 وتسمى مجموعة ذات منوالين .

التوزيع الذى له منوال واحد يسمى وحيد المنوال

فى حالة البيانات المجمعة حيث يعبر عن البيانات بمنحنى تكرارى فإن المنوال هو قيمة (أو قيم) X المقابلة لنقطة (او نقط) النهاية العظمى للمنحنى . ويعبر أحيانا عن هذه القيمة لـ X بالرمز $\hat{X}$

ونحصل على المنوال من التوزيع التكرارى أو المدرج التكرارى بالصيغة :

$$\text{المنوال} = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right) c \qquad (٩)$$

حيث

L_1 = الحد الأدنى للفئة المنوالية (أى الفئة التى يقع فيها المنوال) .

Δ_1 = زيادة تكرار الفئة المنوالية عن تكرار الفئة قبل المنوالية .

Δ_2 = زيادة تكرار الفئة المنوالية عن تكرار الفئة بعـــد المنوالية .

c = طول الفئة المنوالية .

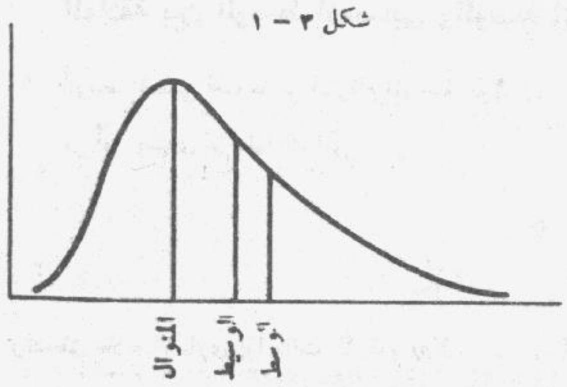
علاقة اعتبارية بين الوسط والوسيط والمنوال

المنحنيات التكرارية وحيدة المنوال والبسيطة الالتواء (غير متماثلة) تحقق العلاقة الاعتبارية .

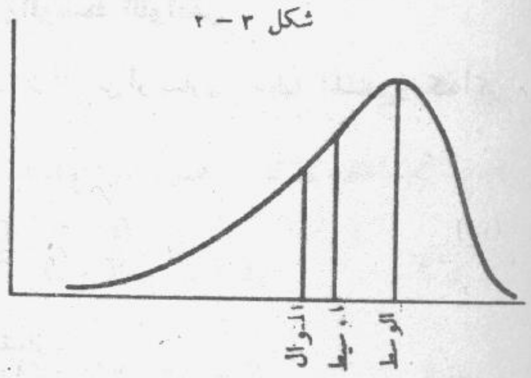
$$\text{المتوسط} - \text{المنوال} = ٣ \; (\text{المتوسط} - \text{الوسيط}) \qquad (١٠)$$

فى الأشكال ٣ – ١ و ٣ – ٢ أدناه يوضح الموضع النسبى للوسط والوسيط والمنوال للمنحنيات التكرارية الملتوية إلى اليمين والمنحنيات الملتوية إلى اليسار على الترتيب . فى المنحنيات المتماثلة يتطابق الوسط والوسيط والمنوال .

شكل ٣ – ١



شكل ٣ – ٢



الوسط الهندسى

الوسط الهندسى G لمجموعة من N رقم $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N$ هـــو الجذر النونى لحاصل ضرب هذه الأرقام .

$$G = \sqrt[N]{X_1 \, X_2 \, X_3 \ldots X_N} \qquad (١١)$$

مثال : الوسط الهندسى للأرقام 2, 4, 8 هـــو $G = \sqrt[3]{(2)(4)(8)} = \sqrt[3]{64} = 4$.

ومن الناحية العملية فإن الوسط الهندسى G يحسب باستخدام اللوغاريتمات (أنظر المسألة ٣ - ٣٥) . لحساب الوسط الهندسى للبيانات المجمعة أنظر المسائل ٣ – ٣٦ ، ٣ – ٩١ .

الوسط التوافقى H :

الوسط التوافقى H لمجموعة من N رقم . $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N$ هو مقلوب الوسط الحسابى لمقلوبات هذه القيم .

$$H = \frac{1}{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{X_j}} = \frac{N}{\Sigma\frac{1}{X}} \qquad (١٢)$$

ومن الناحية العملية فقد يكون من الأسهل أن نتذكر أن

$$\frac{1}{H} = \frac{\Sigma\frac{1}{X}}{N} = \frac{1}{N}\Sigma\frac{1}{X} \qquad (١٣)$$

مثال : الوسط التوافقى للأرقام 2, 4, 8 هو $H = \frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = \frac{3}{\frac{7}{8}} = 3.43$

لحساب الوسط التوافقى للبيانات المجمعة ، أنظر المسائل ٣-٩٩ ، ٣ - ١٠٠ .

العلاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى والوسط التوافقى :

الوسط الهندسى لمجموعة من الأرقام الموجبة $X_1, X_2, \ldots, X_N$ أقل من أو يساوى وسطها الحسابى ولكنه أكبر من أو يساوى وسطها التوافقى .

$$H \leqq G \leqq \bar{X} \qquad (١٤)$$

وتتحقق علامة التساوى إذا كانت الأرقام $X_1, X_2, \ldots, X_N$ متساويه

مثال : المجموعة 2, 4, 8 وسطها الحسابى 4.67 ووسطها الهندسى 4 ووسطها التوافقى 3.43

جذر متوسط المربعات : (R.M.S)

جذر متوسطات المربعات (R.M.S) أو الوسط التربيعى لمجموعة من الأرقام $X_1, X_2, \ldots, X_N$ يرمز له أحيانا بالرمز $\sqrt{\bar{X^2}}$ ويعرف كالآتى :

$$\text{R.M.S.} = \sqrt{\bar{X^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N}X_j^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}} \qquad (١٥)$$

هذا النوع من المتوسط يستخدم بكثرة فى التطبيقات الطبيعية .

مثال : جذر متوسط المربعات للأرقام 1, 3, 4, 5, 7 هو

$$\sqrt{\frac{1^2+3^2+4^2+5^2-7^2}{5}} = \sqrt{20} = 4.47$$

(جـ) $\sum_{j=1}^{20} f_j X_j^3$ $\qquad f_1X_1^3 + f_2X_2^3 + \ldots + f_{20}X_{20}^3$

(د) $\sum_{j=1}^{N} a_j b_j$ $\qquad a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_Nb_N$

(هـ) $\sum_{j=1}^{4} f_j X_j Y_j$ $\qquad f_1X_1Y_1 + f_2X_2Y_2 + f_3X_3Y_3 + f_4X_4Y_4$

٣-٣ أثبت أن $\sum_{j=1}^{N} (aX_j + bY_j - cZ_j) = a\sum_{j=1}^{N} X_j + b\sum_{j=1}^{N} Y_j - c\sum_{j=1}^{N} Z_j$ حيث a, b and C أى ثوابت .

الحـــل :

$$\sum_{j=1}^{N} (aX_j + bY_j - cZ_j) = (aX_1 + bY_1 - cZ_1) + (aX_2 + bY_2 - cZ_2) + \ldots + (aX_N + bY_N - cZ_N)$$

$$= (aX_1 + aX_2 + \ldots + aX_N) + (bY_1 + bY_2 + \ldots + bY_N) - (cZ_1 + cZ_2 + \ldots + cZ_N)$$

$$= a(X_1 + X_2 + \ldots + X_N) + b(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N) - c(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_N)$$

$$= a\sum_{j=1}^{N} X_j + b\sum_{j=1}^{N} Y_j - c\sum_{j=1}^{N} Z_j$$

أو باختصار $\qquad \Sigma(aX + bY - cZ) = a\Sigma X + b\Sigma Y - c\Sigma Z$

٣-٤ المتغيران X ، Y يأخذان القيم

$X_1 = 2, X_2 = -5, X_3 = 4, X_4 = -8$ and $Y_1 = -3, Y_2 = -8, \quad Y_3 = 10, Y_4 = 6$

على الترتيب . أحسب

(ا) ΣX (ب) ΣY (جـ) ΣXY (د) ΣX^2 (هـ) ΣY^2 (و) $(\Sigma X)(\Sigma Y)$ (ز) ΣXY^2

(ح) $\Sigma(X + Y)(X - Y)$

الحـــل :

لاحظ أنه فى كل حالة قد حذف الدليل j فى X و Y ومن المفهوم أن Σ تعنى $\sum_{j=1}^{4}$

فمثلا ΣX هى اختصار لـ $\sum_{j=1}^{4} X_j$

(ا) $\Sigma X = (2) + (-5) + (4) + (-8) = 2 - 5 + 4 - 8 = -7$

(ب) $\Sigma Y = (-3) + (-8) + (10) + (6) = -3 - 8 + 10 + 6 = 5$

(جـ) $\Sigma XY = (2)(-3) + (-5)(-8) + (4)(10) + (-8)(6) = -6 + 40 + 40 - 48 = 26$

(د) $\Sigma X^2 = (2)^2 + (-5)^2 + (4)^2 + (-8)^2 = 4 + 25 + 16 + 64 = 109$

(هـ) $\Sigma Y^2 = (-3)^2 + (-8)^2 + 10^2 + (6)^2 = 9 + 64 + 100 + 36 = 209$

(و) $(\Sigma X)(\Sigma Y) = (-7)(5) = -35,$ باستخدام (ا) ، (ب) . لاحظ أن $(\Sigma X)(\Sigma Y) \neq \Sigma XY$

(ز) $\Sigma XY^2 = (2)(-3)^2 + (-5)(-8)^2 + (4)(10)^2 + (-8)(6)^2 = -190$

(ح) باستخدام (جـ) ، (هـ) $\Sigma(X+Y)(X-Y) = \Sigma(X^2 - Y^2) = \Sigma X^2 - \Sigma Y^2 = 109 - 209 = -100$

٣-٥ إذا كانت $\sum_{j=1}^{6} X_j = -4$ ، $\sum_{j=1}^{6} X_j^2 = 10$ احسب (ا) $\sum_{j=1}^{6}(2X_j+8)$ (ب) $\sum_{j=1}^{6} X_j(X_j-1)$

(جـ) $\sum_{j=1}^{6}(X_j-5)^2$

الحـل :

(ا) $\sum_{j=1}^{6}(2X_j+8) = \sum_{j=1}^{6} 2X_j + \sum_{j=1}^{6} 8 = 2\sum_{j=1}^{6} X_j + (6)(3) = 2(-4) + 18 = 10$

(ب) $\sum_{j=1}^{6} X_j(X_j-1) = \sum_{j=1}^{6}(X_j^2-X_j) = \sum_{j=1}^{6} X_j^2 - \sum_{j=1}^{6} X_j = 10 - (-4) = 14$

(جـ) $\sum_{j=1}^{6}(X_j-5)^2 = \sum_{j=1}^{6}(X_j^2-10X_j+25) = \sum_{j=1}^{6} X_j^2 - 10\sum_{j=1}^{6} X_j + 25(6) = 10 - 10(-4) + 25(6) = 200$

ومن الممكن حذف الدليل j إذا رغبنا فى ذلك واستخدام Σ بدلا من $\sum_{j=1}^{6}$ مادام هذا الاختصار مفهوما .

الوسط الحسابى :

٣-٦ درجات طالب فى ستة امتحانات هى 84, 91, 72, 68, 87 and 78 . أوجد الوسط الحسابى لهذه الدرجات

الحـل : $\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{84 + 91 + 72 + 68 + 87 + 78}{6} = \frac{480}{6} = 80$

فى كثير من الأحيان يستخدم الاصطلاح المتوسط كرادف للوسط الحسابى . ومن حيث الدقة فهذا الاستخدام غير سليم حيث أن هناك متوسطات أخرى غير الوسط الحسابى .

٣-٧ سجل أحد العلماء العشرة قياسات التالية لأقطار أسطوانة فكانت : 38.8, 40.9, 39.2, 39.7, 40.2, 39.5, 40.3, 39.2, 39.8 and 40.6 millimetres أوجد الوسط الحسابى للقياسات .

الحـل :

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{38{\cdot}8 + 40{\cdot}9 + 39{\cdot}2 + 39{\cdot}7 + 40{\cdot}2 + 39{\cdot}5 + 40{\cdot}3 + 39{\cdot}2 + 39{\cdot}8 + 40{\cdot}6}{10} = \frac{398{\cdot}2}{10} = 39{\cdot}8 \text{ mm}$$

٣–٨ الأجر السنوى لأربعة رجال هو $5000, $6000, $6500 and $30 000. (ا) أوجد الوسط الحسابى للأجور

(ب) هل يمكن القول بأن هذا الوسط ممثل لهذه الأجور ؟

الحـل :

(ا)
$$\bar{X} = \frac{\$5000 + \$6000 + \$6500 + \$30\,000}{4} = \frac{\$45\,500}{4} = \$11\,875$$

(بافتراض أن جميع الأرقام فى الأجور المعطاة معنوية) .

(ب) المتوسط 875 $11 ليس ممثلا للأجور بالتأكيد واعتبار هذا الرقم كوسط بدون تعليق أكثر عليه يؤدى إلى كثير من الخطأ . فأحد العيوب الكبيرة فى المتوسط هو شدة تأثره بالقيم المتطرفة .

٣–٩ أوجد الوسط الحسابى للأرقام 5, 3, 6, 5, 4, 5, 2, 8, 6, 5, 4, 8, 3, 4, 5, 4, 8, 2, 5, 4

الطريقة ١ :

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{5+3+6+5+4+5+2+8+6+5+4+8+3+4+5+4+8+2+5+4}{20} = \frac{96}{20} = 4{\cdot}8$$

الطريقة ٢ :

هناك ست خمسات وثلاثتان وستتان وخمس أربعات واثنتان وثلاثة ثمانيات . إذن

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{(6)(5) + (2)(3) + (2)(6) + (5)(4) + (2)(2) + (3)(8)}{6+2+2+5+2+3} = \frac{96}{20} = 4{\cdot}8$$

٣–١٠ من مائة رقم 20 أربعة ، 40 خمسة ، 30 ستة والباقى كانوا سبعات . أوجد الوسط الحسابى لهذه الأرقام .

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{(20)(4) + (40)(5) + (30)(6) + (10)(7)}{100} = \frac{530}{100} = 5{\cdot}30$$

٣–١١ إذا كانت درجات طالب فى الرياضة والطبيعة واللغة الانجليزية والصحة العامة هى على الترتيب 82 , 86 , 90 , 70 . إذا كانت معاملات الترجيح (عدد ساعات المحاضرات الأسبوعية) لهذه المقررات هى 3 ,5 ,3 ,1 أوجد متوسط الدرجات بالتقريب .

الحـل :

تستخدم الوسط الحسابى المرجح والأوزان المستخدمة لكل درجة هى معاملات الترجيح لكل مادة . إذن

$$\bar{X} = \frac{\Sigma wX}{\Sigma w} = \frac{(3)(82) + (5)(86) + (3)(90) + (1)(70)}{3+5+3+1} = 85$$

٣-١٢ فى شركة بها 80 عاملا ، 60 يحصلون على $3.0 فى الساعة ، 20 يحصلون على $2.00 فى الساعة .
(أ) أوجد متوسط دخولهم فى الساعة (ب) هل الاجابة على (أ) لن تتغير إذا كان الـ 60 عاملا متوسط دخلهم فى الساعة هــو $3.00 والـ 20 عاملا متوسط دخلهم فى الساعة هــو $2.00 ؟ حقق اجابتك ؟
(جـ) هل تعتقد أن متوسط أجر الساعة يمثل للأجور ؟

الحـل :

(أ)
$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{(60)(\$3{\cdot}00) + (20)(\$2{\cdot}00)}{60 + 20} = \frac{\$220{\cdot}00}{80} = \$2{\cdot}75$$

(ب) نعم ، النتيجة واحدة . لإثبات ذلك افرض أن f_1 رقم لها وسط m_1 و f_2 رقم لها وسط m_2. يجب أن نثبت أن وسط جميع الأرقام هــو

$$\bar{X} = \frac{f_1m_1 + f_2m_2}{f_1 + f_2}$$

إذا كان مجموع الـ f_1 رقم هو M_1 والـ f_2 رقم هو M_2 . فإنه من تعريف الوسط الحسابى .

$$m_1 = \frac{M_1}{f_1} \qquad m_2 = \frac{M_2}{f_2}$$

أو $M_1 = f_1m_1,\ M_2 = f_2m_2$ وبما أن مجموع الـ $(f_1 + f_2)$ رقم هو $(M_1 + M_2)$ فإن الوسط الحسابى لجميع الأرقام هــو

$$\bar{X} = \frac{M_1 + M_2}{f_1 + f_2} = \frac{f_1m_1 + f_2m_2}{f_1 + f_2}$$

وهو المطلوب . ومن السهل تعميم النتيجة .

(جـ) من الممكن أن نقول أن $2.75 « يمثل » لأجر الساعة بمعنى أن أغلب العاملين يحصلون على $3.00 فى الساعة والتى لا يبعد كثيرا عن $2.75 ويجب أن نذكر أنه عند تلخيص البيانات الرقية فى رقم واحد (كما هو الحال فى الوسط) فإننا معرضين للوقوع فى بعض الخطأ ومن المؤكد أن النتيجة ليست مضللة كما فى المسألة ٣ - ٨

والواقع وحتى نكون فى جانب الحرص فإن بعض التقدير « التشتت » أو « التغير » فى البيانات حول الوسط (أو الأوساط الأخرى) يجب أن يعطى . وهذا يسمى بالتشتت فى البيانات . وسوف يعطى فى الفصل الرابع مقاييس مختلفة له .

٣-١٣ أربع مجموعات من الطلبة مكونة من 15, 20, 10, 18 شخصا وكان متوسط أطوالهم 1.62, 1.48, 1.53, 1.40 metres على الترتيب أوجد متوسط الطول لكل الطلبة .

الحـل :

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{(15)(1{\cdot}62) + (20)(1{\cdot}48) + (10)(1{\cdot}53) + (18)(1{\cdot}40)}{15 + 20 + 10 + 18} = 1{\cdot}50 \text{ m}$$

٣-١٤ إذا كان متوسط الدخل السنوى للعمال الزراعيين والعمال غير الزراعيين فى الولايات المتحدة هـو $4500 ,$3500 على الترتيب ، فهل متوسط الدخل السنوى للمجموعتين معا يمكن أن يكون $4000 ؟

الحـل :

من الممكن أن يكون $4000 فى حالة ما إذا كان عدد العمال الزراعيين والعمال غير الزراعيين متساويا . لتحديد متوسط الدخل السنوى الحقيقى فيجب أن نعرف عدد العمال فى كل مجموعة . فإذا كان ، على سبيل المثال مقابل كل عامل زراعى ١١ عاملا غير زراعى فإن المتوسط يصبح :

$$\bar{X} = \frac{(1)(\$3500) + (11)(\$4500)}{1 + 11} = \$4400$$

إلى أقرب $100 . وهذا هو الوسط الحسابى المرجح .

٣-١٥ استخدم التوزيع التكرارى للأوزان الموضح بالجدول فى صفحة ٤٥ لإيجاد متوسط أوزان الـ 100 طالب فى جامعة XYZ

الحـل :

الحـل موضح بالجدول ٣-١ . لاحظ أن كل الطلبة الذين أوزانهم 60—62 kg, 63—65 kg, etc. اعتبروا أن أوزانهم 61و64 kg, etc. وبهذا فإن المشكلة اختصرت لتصبح الحصول على متوسط وزن 100 طالب إذا كان 5 طلبة أوزانهم 61 kg ، 18 أوزانهم 64 kg وهكذا .

جدول ٣ - ١

الأوزان (kg)	مراكز الفئات (X)	التكرار (f)	(fX)
60 - 62	61	5	305
63 - 65	64	18	1152
66 - 68	67	42	2814
69 - 71	70	27	1890
72 - 74	73	8	584
		$N = \Sigma f = 100$	$\Sigma fX = 6745$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{6745}{100} = 67{\cdot}45 \text{ kg}$$

والعمليات الحسابية المطلوبة لحل قد تصبح مملة وخاصة إذا كانت الأرقام كبيرة والفئات كثيرة . وتوجد أساليب للتقليل من العمل المطلوب فى مثل هذه الحالات . أنظر المسائل ٣-٢٠ و ٣-٢١ كأمثلة .

خصائص الوسط الحسابى :

٣-١٦ أثبت أن مجموع انحرافات $X_1, X_2, \ldots, X_N$ عن وسطها $\bar{X}$ يساوى صفرا .

الحـــل :

إذا كان $d_1 = X_1 - \bar{X}, d_2 = X_2 - \bar{X}, \ldots, d_N = X_N - \bar{X}$ انحرافات $X_1, X_2, \ldots, X_N$ عن وسطها $\bar{X}$ فإن

$$\text{مجموع الانحرافات} \therefore \Sigma d_j = \Sigma(X_j - \bar{X}) = \Sigma X_j - N\bar{X}$$

$$= \Sigma X_j - N\left(\frac{\Sigma X_j}{N}\right) = \Sigma X_j - \Sigma X_j = 0$$

حيث استخدمنا Σ بدلا من $\sum_{j=1}^{N}$ ومن الممكن إذا أردنا حذف الدليل j فى X_j على شرط أن يكون ذلك مفهوما .

٣-١٧ إذا كان $Z_1 = X_1 + Y_1, Z_2 = X_2 + Y_2, \ldots, Z_N = X_N + Y_N$ أثبت أن $\bar{Z} = \bar{X} + \bar{Y}$

الحـــل :

بالتعريف $\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N}, \bar{Y} = \frac{\Sigma Y}{N}, \bar{Z} = \frac{\Sigma Z}{N}$ إذن

$$\bar{Z} = \frac{\Sigma Z}{N} = \frac{\Sigma(X + Y)}{N} = \frac{\Sigma X + \Sigma Y}{N} = \frac{\Sigma X}{N} + \frac{\Sigma Y}{N} = \bar{X} + \bar{Y}$$

حيث حذفنا الدليل j فى X, Y, Z و Σ تعنى $\sum_{j=1}^{N}$

٣-١٨ (أ) إذا كان N من الأعداد $X_1, X_2, \ldots X_N$ لها انحرافات عن أى رقم A معطاة على الترتيب كالآتى :

$$d_1 = X_1 - A, d_2 = X_2 - A, \ldots, d_N = X_N - A$$

أثبت أن

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{j=1}^{N} d_j}{N} = A + \frac{\Sigma d}{N}$$

(ب) إذا كانت تكرارات $X_1, X_2, \ldots, X_K$ هى على الترتيب $f_1, f_2, \ldots, f_K$ وكانت $d_1 = X_1 - A, \ldots, d_K = X_K - A,$ أثبت أن النتيجة فى (أ) يحل بدلا منها

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{j=1}^{K} f_j d_j}{\sum_{j=1}^{K} f_j} = A + \frac{\Sigma fd}{N} \quad \text{حيث} \quad \sum_{j=1}^{K} f_j = \Sigma f = N$$

الطريقة ١ :

بما أن $d_j = X_j - A$ ، $X_j = A + d_j$ فإن

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X_j}{N} = \frac{\Sigma(A + d_j)}{N} = \frac{\Sigma A + \Sigma d_j}{N} = \frac{NA + \Sigma d_j}{N} = A + \frac{\Sigma d_j}{N}$$

حيث استخدمنا Σ بدلا من $\sum_{j=1}^{N}$ للاختصار

الطريقة ٢ :

بما أن $d = X - A$ أو $X = A + d$, حيث حذفنا الدليل فى الـ d والـ X. وبهذا ، باستخدام المسألة ٣-١٧ .

$$\bar{X} = \bar{A} + \bar{d} = A + \frac{\Sigma d}{N}$$

حيث أن متوسط عدد من الثوابت كلها تساوى A هـو A.

(ب)

$$\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^{K} f_j X_j}{\sum_{j=1}^{K} f_j} = \frac{\Sigma f_j X_j}{N} = \frac{\Sigma f_j(A + d_j)}{N} = \frac{\Sigma A f_j + \Sigma f_j d_j}{N} = \frac{A\Sigma f_j + \Sigma f_j d_j}{N}$$

$$= \frac{AN + \Sigma f_j d_j}{N} = A + \frac{\Sigma f_j d_j}{N} = A + \frac{\Sigma fd}{N}$$

لاحظ أن النتيجة حصلنا عليها أساسا من (ا) باحلال $f_j d_j$ بدلا من d_j والتجميع من $j = 1$ إلى K بدلا من $j = 1$ إلى N . النتيجة مكافأة لـ $\bar{X} = A + \bar{d}$ حيث $\bar{d} = (\Sigma fd)/N$.

حساب الوسط الحسابى من بيانات مجمعة :

٣-١٩ استخدم طريقة المسألة ٣-١٨ (ا) لإيجاد الوسط الحسابى للأرقام 5, 8, 11, 9, 12, 6, 14, 10 مستخدما «وسط» تخمينى A قيمته (ا) 9 (ب) 20 .

الحـــل :

(ا) انحرافات الأرقام المعطاة عن 9 هى 1 و 5 و 3 — 3, 0, 2, و 1 — و 4 — ومجموع الانحرافات هـــو $\Sigma d = -4 - 1 + 2 + 0 + 3 + 3 + 5 + 1 = 3$. إذن

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma d}{N} = 9 + \frac{3}{8} = 9{\cdot}375$$

(ب) انحرافات الأرقام المعطاة عن 20 هى 10 —, 6 —, 14 —, 8 —, 11 —, 9 —, 12 —, 15 — و $\Sigma d = -85$. إذن

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma d}{N} = 20 + \frac{(-85)}{8} = 9{\cdot}375$$

٣ - ٢٠ استخدم طريقة المسألة ٣ - ١٨ (أ) لإيجاد الوسط الحسابي لأوزان الـ 100 طالب فى جامعة XYZ (أنظر المسألة ٣ - ١٥).

الحــل :

يمكن أن ينظم الحل كما فى الجدول ٣ - ٢ . أخذنا كوسط تخميني A مركز الفئة 67 (المقابل لأكبر تكرار) ، على الرغم من أن أى مركز فئة يمكن استخدامه كوسط تخميني . لاحظ أن الحسابات أسهل مما فى المسألة ٣ - ١٥ . ولاختصار العمل فن الممكن أن نسير كما فى المسألة ٣ - ١٢ حيث استفدنا من أن الانحرافات (العمود الثانى فى الجدول) هى أرقام صحيحة مضاعفة لطول الفئة

جدول ٣ - ٢

مركز الفئة X	انحرافات $d = X - A$	تكرارات f	fd
61	−6	5	−30
64	−3	18	−54
$A \rightarrow$ 67	0	42	0
70	3	27	81
73	6	8	48
		$N = \Sigma f = 100$	$\Sigma fd = 45$

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd}{N} = 67 + \frac{45}{100} = 67{\cdot}45 \text{ kg}$$

٣ - ٢١ إذا كانت $d_j = X_j - A$ هى انحرافات مركز أى فئة X_j فى توزيع تكرارى عن مركز فئة ما A . أثبت أنه إذا كانت كل الفئات لها نفس الطول c فإن (أ) الانحرافات مضاعفات لـ c بمعنى $d_j = cu_j$ حيث $u_j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (ب) الوسط الحسابي يمكن حسابه من الصيغة

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)c$$

الحــل :

يمكن تمثيل النتيجة بجدول المسألة ٣ - ٢٠ حيث نلاحظ أن الانحرافات فى العمود الثانى كلها مضاعفات لطول الفئة $c = 3$ kg.

ولنثبت أن النتيجة صحيحة على وجه العموم ، لاحظ أنه إذا كانت $X_1, X_2, X_3, \ldots$ مراكز فئات متتالية فإن الفرق المشترك فى هذه الحالة يساوى c . بحيث $X_2 = X_1 + c, X_3 = X_1 + 2c$ وبشكل عام $X_j - X_1 = (j - 1)c$. وبهذا فالفرق بين مركزى فئتين X_p ، X_q على سبيل المثال هو

$$X_p - X_q = [X_1 + (p-1)c] - [X_1 + (q-1)c] = (p-q)c$$

وهو مضاعف الرقم c .

(ب) باستخدام النتيجة فى (أ) فإن انحرافات كل مراكز الفئات عن مركز فئة ما هى مضاعفات c بمعنى $d_j = cu_j$ وباستخدام المسألة ٣ – ١٨ (أ) فإن

$$\bar{X} = A + \frac{\sum f_j d_j}{N} = A + \frac{\sum f_j (cu_j)}{N} = A + c\frac{\sum f_j u_j}{N} = A + \left(\frac{\sum fu}{N}\right)c$$

لاحظ أن هذا يكافىء النتيجة $\bar{X} = A + c\bar{u}$ والتى يمكن الحصول عليها من $\bar{X} = A + \bar{d}$ بوضع $d = cu$ وملاحظة أن $\bar{d} = c\bar{u}$ (أنظر المسألة ٣ – ١٨) .

٣ – ٢٢ استخدم نتائج المسألة ٣ – ٢١ (ب) لإيجاد متوسط أوزان الـ 100 طالب فى جامعة XYZ (أنظر المسألة ٣ – ٢٠) .

الحـــل :

يمكن ترتيب الحل كما فى الجدول ٣ – ٣ هذه الطريقة تسمى « طريقة الترميز » ويجب استخدامها كلما كان ذلك ممكناً

جدول ٣ – ٣

X	u	f	fu
61	−2	5	−10
64	−1	18	−18
$A \rightarrow$ 67	0	42	0
70	1	27	27
73	2	8	16
		$N = 100$	$\sum fu = 15$

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\sum fu}{N}\right)c = 67 + \left(\frac{15}{100}\right)(3) = 67.45 \text{ kg}$$

٣ – ٢٣ احسب متوسط الأجر الشهرى للخمسة وستين عاملا فى شركة P and R من التوزيع التكرارى فى صفحة ٥٤ باستخدام (أ) الطريقة المطولة (ب) طريقة الترميز .

الحـــل :

(أ) جدول ٣ – ٤

X	f	fX
£55·00	8	£440·00
65·00	10	650·00
75·00	16	1200·00
85·00	14	1190·00
95·00	10	950·00
105·00	5	525·00
115·00	2	230·00
	$N = 65$	$\sum fX = £5185·00$

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{N} = \frac{£5185·00}{65} = £79·77$$

(ب) جدول ٣ – ٥

X	u	f	fu
£55·00	−2	8	−16
65·00	−1	10	−10
$A \rightarrow$ 75·00	0	16	0
85·00	1	14	14
95·00	2	10	20
105·00	3	5	15
115·00	4	2	8
		$N = 65$	$\sum fu = 31$

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\sum fu}{N}\right)c = £75·00 + \left(\frac{31}{65}\right)(£10·00) = £79·77$$

قد يكون من الممكن افتراض أن هناك خطأ أدخل فى الجداول السابقة حيث أن مراكز الفئات الفعلية هى £54.995, £64.995, بدلا من £55.00, £65.00, وإذا استخدمنا فى الجدول ٣ – ٤ مراكز الفئات الحقيقية فإن $\bar{X}$ سيصير £ 79.76 بدلا من £79.77 والفرق يمكن إهماله .

٣ – ٢٤ أوجد متوسط أجور الـ 70 عاملا فى شركة P and R باستخدام الجدول (ث) فى صفحة ٦١ .

الحـــل :

فى هذه الحالة أطوال الفئات غير متساوية وعليه يجب أن نستخدم الطريقة المطولة كما هو موضح بالجدول ٣ – ٦

الجدول ٣ – ٦

X	f	fX
£55·00	8	£440·00
65·00	10	650·00
75·00	16	1200·00
85·00	15	1275·00
95·00	10	950·00
110·00	8	880·00
150·00	3	450·00
	$N = 70$	$\Sigma fX = £5845{\cdot}00$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{£5845{\cdot}00}{70} = £83{\cdot}50$$

الوســـيط :

٣ – ٢٥ درجات طالب فى ستة امتحانات كانت 78 ,87 ,68 ,72 ,91 ,84 . أوجد وسيط هذه الدرجات .

الحـــل :

بترتيب الدرجات فى منظومة تصبح 91 ,87 ,84 ,78 ,72 ,68 .

وبما أن عدد الدرجات زوجى فإن هناك قيمتين فى المنتصف 78 ,84 وسطهما الحسابى 81 = $\frac{1}{2}(78 + 84)$ هو الوسيط المطلوب . قارن بالمسألة ٣ – ٦ حيث الوسط الحسابى = 80

٣ – ٢٦ الأجر بالساعه لخمسه عاملين فى مكتب هو $3.75, $9.20, $3.28, $3.96, $2.52 أوجد .

(أ) وسيط أجر الساعة (ب) متوسط أجر الساعة .

الحـــل :

(أ) بترتيب الأجور فى منظومة تصبح $9.20, $3.96, $3.75, $3.28, $2.52 وبما أن هناك عدداً فردياً من القيم فإن هناك قيمة واحدة فى المنتصف وهى $3.75 وهى الوسيط المطلوب .

(ب) الوسط الحسابى هو $\frac{2{\cdot}52 + \$3{\cdot}96 + \$3{\cdot}28 + \$9{\cdot}20 + \$3{\cdot}75}{5} = \$4{\cdot}54.$

لاحظ أن الوسيط لم يتأثر بالقيمة المتطرفة $9.20 بينما تأثر الوسط بها . وفى هذه الحالة فإن الوسيط يعطى دلالة أفضل على معدل أجر الساعة عن الوسط .

٣ – ٢٧ إذا رتب (أ) 85 ، (ب) 150 رقماً فى منظومة ، كيف يمكن الحصول على وسيط هذه الأرقام ؟

الحـــل :

(أ) بما أن هناك 85 عنصراً ، وهو رقم فردى ، فإن هناك قيمة وسطى وحيدة حيث يوجد قبلها 42 رقم وبعدها 42 رقم . وبهذا فإن الوسيط هو الرقم الذى ترتيبه الثالث والأربعين فى المنظومة .

(ب) بما أن هناك 150 عنصراً ، وهو رقم زوجى ، فإن هناك قيمتين فى الوسط حيث يوجد قبلهما 74 رقم وبعدهما 74 رقماً . وهاتان القيمتان ترتيبهما الخامس والسبعون والسادس والسبعون فى المنظومة ووسطهما الحسابى هو الوسيط المطلوب .

٣ - ٢٨ أوجد وسيط أطوال 40 من أوراق نبات الغار (أنظر المسألة ٢ - ٨ ، صفحة ٥٧) باستخدام (أ) التوزيع الثانى للمسألة ٢ - ٨ والذى أعدنا كتابته هنا (ب) البيانات الأصلية

الحـــل :

(أ) الطريقة الأولى ، باستخدام الاستكمال :

الأطوال فى الجدول التكرارى المبين على اليمين يفترض فيها أنها تتوزع توزيعاً متصلا . فى هذه الحالة فإن الوسيط هو هذا الطول الذى يقع نصف التكرار الكلى أعلاه ($40/2 = 20$) والنصف الآخر بعده .

جدول ٣ - ٧

الطول (mm)	التكرار
118–126	3
127–135	5
136–144	9
145–153	12
154–162	5
163–171	4
172–180	2
	المجموع 40

وحيث أن مجموع تكرارات الفئات الثلاث الأولى هو $17 = 9 + 5 + 3$ وحتى نحصل على الرقم المطلوب 20 فإننا نريد 3 أرقام من الـ 12 حالة الموجودة فى الفئة الرابعة .

وبما أن الفئة الرابعة 153 — 145 هى فى الحقيقة تقابل الأطوال 144.5 to 153.5 فإن الوسيط يقع فى $^3/_{12}$ المسافة بين 144.5 ,153.5, أى أن الوسيط هو

$$144{\cdot}5 + \frac{3}{12}(153{\cdot}5 - 144{\cdot}5) = 144{\cdot}5 \quad \frac{3}{12}(9) = 146{\cdot}8 \text{ mm}$$

الطريقة ٢ ، باستخدام القانون :

بما أن مجموع التكرارات المقابلة للفئات الثلاث الأولى والفئات الأربع الأولى هى على الترتيب $3+5+9 = 17$ ، $3 + 5 + 9 + 12 = 29$ فإن الوسيط يقع فى الفئة الرابعة والتى هى بالتالى الفئة الوسيطية . وبهذا :

L_1 = الحد الأدنى الحقيقى للفئة الوسيطية = 144.5

N = عدد العناصر فى البيانات = 40

$(\Sigma f)_1$ = مجموع التكرارات لجميع الفئات قبل الفئة الوسيطية = $3 + 5 + 9 = 17$

f_{median} = تكرار الفئة الوسيطية = 12

c = طول الفئة الوسيطية = 9

وبهذا فإن

$$\text{الوسيط} = L_1 + \left(\frac{N/2 - (\Sigma f)_1}{f_{median}}\right)c = 144{\cdot}5 + \left(\frac{40/2 - 17}{12}\right)(9) = 146{\cdot}8 \text{ mm}$$

(ب) بترتيب الأطوال الأصلية فى منظومة تصبح

119, 125, 126, 128, 132, 135, 135, 135, 136, 138, 138, 140, 140, 142, 142, 144, 144, 145, 145, 146, 146, 147, 147, 148, 149, 150, 150, 152, 153, 154, 156, 157, 158, 161, 163, 164, 165, 168, 173, 176

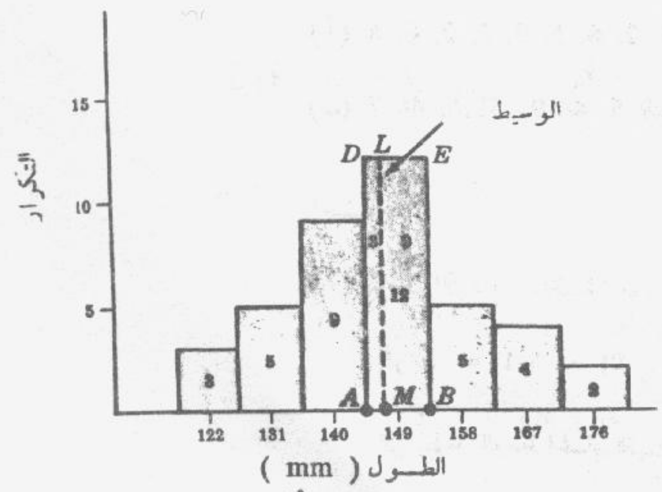
الوسيط هو الوسط الحسابى للطول العشرين والواحد والعشرين فى المنظومة ويساوى 146 mm .

٣ - ٢٩ وضح كيف يمكن الحصول على وسيط الطول فى المسألة السابقة باستخدام
(أ) المدرج التكرارى (ب) المنحنى التكرارى المتجمع النسبى .

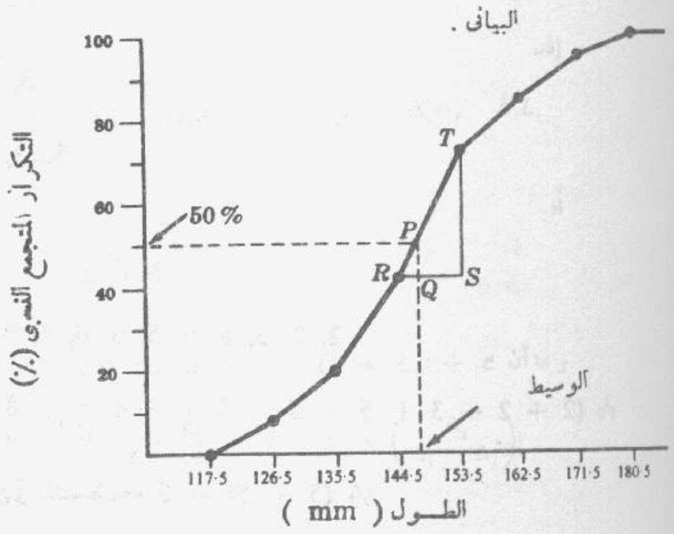
الحـــل :

(أ) فى الشكل ٣ - ٣ (أ) يوضح المدرج التكرارى المقابل للأطوال فى المسألة السابقة . والوسيط هو الأحداثى السينى لخط LM الذى يقسم المدرج التكرارى إلى مساحتين متساويتين وحيث أن المساحة تقابل التكرار فى المدرج التكرارى ، فإن الخط LM يقسم المساحة الكلية بحيث يكون التكرارت على يمينه والتكرارات على يساره مساوية لنصف التكرار الكلى أو 20 . مثلا المساحة $AMLD$ تناظر التكرار 3 والمساحة $MBEL$ تناظر التكرار 9 .

وبهذا فإن $AM = \frac{3}{12}AB = \frac{3}{12}(9) = 2{\cdot}25$ ، وقيمة الوسيط هى 144.5+2.25 =146.75 أو 146.8 mm إلى أقرب نسبة من عشرة من المليمتر . ويمكن قراءة القيمة بشكل تقريبى مباشرة من الرسم البيانى .



شكل ٣ - ٣ (أ)



شكل ٣ - ٣ (ب)

(ب) الشكل ٣ – ٣ (ب) يوضح المضلع التكرارى المتجمع النسبى المقابل للأوزان فى المسألة السابقة . والوسيط هو الأحداثى السينى للنقطة P على المنحنى التكرارى المتجمع والتى أحداثها الصادى 50% . وللحصول على قيمتها فإننا نلاحظ من المثلثات المماثلة PQR و RST أن

$$\frac{RQ}{RS} = \frac{PQ}{ST} \text{ or } \frac{RQ}{9} = \frac{50\% - 42{\cdot}5\%}{72{\cdot}5\% - 42{\cdot}5\%} = \frac{1}{4} \text{ so that } RQ = \frac{9}{4} = 2{\cdot}25$$

وبهذا فإن

$$\text{الوسيط} = 144{\cdot}5 + RQ = 144{\cdot}5 + 2{\cdot}25 = 146{\cdot}75 \text{ mm}$$

أو 146.8 mm إلى أقرب عشر المليمتر . وهذه القيمة يمكن قراءتها بالتقريب من الرسم البيانى .

٣ – ٣٠ أوجد وسيط أجور الـ 65 عاملا فى شركة P and R (أنظر الفصل الثانى والمسألة ٢ – ٣ صفحة ٥٣)

الحـــل :

هنا $N = 65, N/2 = 32.5$. وبما أن مجموع الفئتين الأولى والثانية هما $8 + 10 = 18$ ومجموع الفئات الثلاث الأولى هو $8 + 10 + 16 = 34$ فإن الفئة الوسيطية هى الفئة الثالثة . باستخدام الصيغة .

$$\text{الوسيط} = L_1 + \left(\frac{N/2 - (\Sigma f)_1}{f_{\text{median}}}\right)c = £69{\cdot}995 + \left(\frac{32{\cdot}5 - 18}{16}\right)(£10{\cdot}00) = £79{\cdot}06$$

المنــوال :

٣ – ٣١ أوجد الوسط والوسيط والمنوال لمجموعة الأرقام :

(أ) 3, 5, 2, 6, 5, 9, 5, 2, 8, 6

(ب) 50.3, 49.5, 48.9, 51.6, 48.7

الحـــل :

(أ) بترتيب الأرقام فى منظومة لتصير 2, 2, 3, 5, 5, 5, 6, 6, 8, 9

$$\text{الوسط} = \tfrac{1}{10}(2 + 2 + 3 + 5 + 5 + 5 + 6 + 6 + 8 + 9) = 5.1$$

الوسيط = الوسط الحسابى للقيمتين فى المنتصف = $\tfrac{1}{2}(5 + 5) = 5$

المنوال = الرقم الأكثر شيوعاً = 5.

(ب) بترتيب الأرقام فى منظومة لتصبح 48.7, 48.9, 49.5, 50.3, 51.6

الوسط = $(48.7 + 48.9 + 49.5 + 50.3 + 51.6) = 49.8$

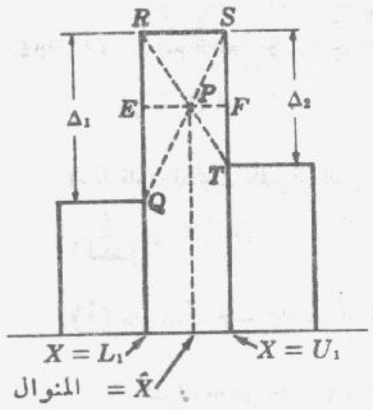
الوسيط = الرقم فى الوسط = 49.5

المنوال = الرقم الأكثر شيوعاً ، ولا يوجد فى هذه الحالة

٣ – ٣٢ أوجد صيغة لتحديد المنوال من بيانات معبر عنها فى توزيع تكرارى .

الحــل :

افترض أن الشكل ٣–٤ يمثل ثلاثة مستطيلات من المدرج التكرارى لهذا التوزيع التكرارى ويمثل المستطيل الأوسط الفئة المنوالية . افترض أيضاً أن طول الفئات متساو .



شكل ٣ – ٤

ويعرف المنوال بأنه النقطة $\hat{X}$ على المحور السينى المقابلة للنقطة P وهى نقطة تقاطع الخطين RT, QS إذا كانت $X = U_1, X = L_1$ تمثل الحدود الدنيا والعليا للفئة المنوالية Δ_1, Δ_2 يمثلان على الترتيب الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئــة التى على يسارها والفئة التى على يمينها فإنه من المثلثات المتشابهة PST و PQR نجد

$$\frac{EP}{RQ} = \frac{PF}{ST} \qquad , \qquad \frac{\hat{X} - L_1}{\Delta_1} = \frac{U_1 - \hat{X}}{\Delta_2}.$$

إذن

$$\Delta_2(\hat{X} - L_1) = \Delta_1(U_1 - \hat{X}),\ \Delta_2\hat{X} - \Delta_2 L_1 = \Delta_1 U_1 + \Delta_1\hat{X},\ (\Delta_1 + \Delta_2)\hat{X} = \Delta_1 U_1 + \Delta_2 L_1$$

أو

$$\hat{X} = \frac{\Delta_1 U_1 + \Delta_2 L_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

وبما أن $U = L_1 + c$ حيث c هو طول الفئة ، فإننا نجد أن

$$\hat{X} = \frac{\Delta_1(L_1 + c) + \Delta_2 L_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)L_1 + \Delta_1 c}{\Delta_1 + \Delta_2} = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right)c$$

وهذه النتيجة لها تفسير ذو أهمية فإذا رسمنا قطعاً مكافئاً بحيث يمر بمنتصف قمة المستطيلات فى الشكل فإن النقطة على المحور الرأسى المقابلة لنقطة النهاية العظمى لهذا القطع المكافىء هى المنوال كما حصلنا عليه أعلاه .

٣ – ٣٣ أوجد منوال أجور الـ 65 عاملا فى شركة P and R (أنظر المسألة المسألة ٣ – ٢٣) باستخدام الصيغة التى حصلنا عليها فى المسألة ٣ – ٣٢ .

الحــل :

هنا $L_1 = £69{\cdot}995,\ \Delta_1 = 16 - 10 = 6,\ \Delta_2 = 16 - 14 = 2,\ c = £10{\cdot}00$ وبهذا فإن

$$\text{المنوال} = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right)c = £69{\cdot}995 + \left(\frac{6}{2+6}\right)(£10{\cdot}00) = £77{\cdot}50$$

علاقة اعتبارية بين الوسط والوسيط والمنوال :

٣ – ٣٤ (أ) استخدم العلاقة الاعتبارية : الوسط – المنوال = ٣ (الوسط – الوسيط) لإيجاد منوال أجور الـ 65 عاملا فى شركة P and R .

(ب) قارن نتائجك بالمنوال الذى حصلت عليه فى المسألة ٣ – ٣٣ .

الحــل :

(أ) من المسألة ٣ – ٣٣ نجد أن الوسط = £79 77 والوسيط = £79.06 إذن

المنوال = الوسط – ٣ (الوسط – الوسيط)

$$= £79{\cdot}77 - 3(£79{\cdot}77 - £79{\cdot}06) = £77{\cdot}64$$

(ب) من المسألة ٣ – ٣٣ منوال الأجور £77.50 بحيث يتفق بشكل جيد مع العلاقة الاعتبارية فى هذه الحالة .

الوسط الهندسى :

٣ – ٣٥ أوجد (أ) الوسط الهندسى (ب) الوسط الحسابى للأرقام 3, 5, 6, 6, 7, 10, 12 مفترضاً أن هذه الأرقام دقيقة .

(أ) الوسط الهندسى = $G = \sqrt[7]{(3)(5)(6)(6)(7)(10)(12)} = \sqrt[7]{453\,600}$. باستخدام اللوغاريتمات المعتادة

$\log G = \frac{1}{7}\log 453\,600 = \frac{1}{7}(5{\cdot}6567) = 0{\cdot}8081$ and $G = 6{\cdot}43$ (إلى أقرب جزء من المائة)

طريقة أخرى :
$$\begin{aligned}\log G &= \tfrac{1}{7}(\log 3 + \log 5 + \log 6 + \log 6 + \log 7 + \log 10 + \log 12)\\ &= \tfrac{1}{7}(0{\cdot}4771 + 0{\cdot}6990 + 0{\cdot}7782 + 0{\cdot}7782 + 0{\cdot}8451 + 1{\cdot}0000 + 1{\cdot}0792)\\ &= 0{\cdot}8081, \quad G = 6{\cdot}43\end{aligned}$$

(ب) الوسط الحسابي = $\bar{X} = \frac{1}{7}(3 + 5 + 6 + 6 + 7 + 10 + 12) = 7$

وهذا يوضح الحقيقة أن الوسط الهندسي لمجموعة من أرقام موجبة غير متساوية أقل من وسطها الحسابي .

٣ - ٣٦ الأرقام $X_1, X_2, \ldots, X_K$ تحدث بتكرارات $f_1, f_2, \ldots, f_K$ حيث $f_1 + f_2 + \ldots + f_K = N$ هو التكرار الكلي .

(أ) أوجد الوسط الهندسي G للأرقام

(ب) استنتج صيغة لـ $\log G$

(ج) كيف يمكن استخدام النتائج لحصول على الوسط الهندسي لبيانات مجمعة في توزيع تكراري ؟

الحـــل

(أ)
$$G = \sqrt[N]{\underbrace{X_1X_1\ldots X_1}_{f_1\ times}\ \underbrace{X_2X_2\ldots X_2}_{f_2\ times}\ \ldots\ \underbrace{X_KX_K\ldots X_K}_{f_K\ times}} = \sqrt[N]{X_1^{f_1}X_2^{f_2}\ldots X_K^{f_K}}$$

حيث $N = \Sigma f$ ، وهو يسمى حيناً بالوسط الهندسي المرجح .

(ب)
$$\log G = \frac{1}{N}\log\left(X_1^{f_1}X_2^{f_2}\ldots X_K^{f_K}\right) = \frac{1}{N}(f_1\log X_1 + f_2\log X_2 + \ldots + f_K\log X_K)$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{K} f_j\log X_j = \frac{\Sigma f\log X}{N}$$

حيث افترضنا أن جميع الأرقام موجبة ، عدا ذلك فإن اللوغاريتم غير معرف .

لاحظ أن لوغاريتم الوسط الهندسي لمجموعة من الأرقام الموجبة هو الوسط الحسابي للوغاريتمات هذه الأرقام .

(ج) يمكن استخدام النتيجة لإيجاد الوسط الهندسي للبيانات المجمعة بأخذ $X_1, X_2, \ldots, X_K$ كمراكز الفئات و $f_1, f_2, \ldots, f_K$ كالتكرارات المقابلة لها .

٣ - ٣٧ في خلال أحد السنين كانت نسبة سعر لتر اللبن إلى سعر رغيف الخبز هو 3.00 ، بينما خلال العام التالي كانت النسبة 2.00 .

(أ) أوجد الوسط الحسابي لهذه النسب لفترة العامين .

(ب) أوجد الوسط الحسابي لنسب أسعار الخبز إلى أسعار اللبن لفترة العامين .

(ج) ناقش التوصية باستخدام الوسط الحسابي للحصول على متوسط النسب .

(د) ناقش ملاءمة الوسط الهندسي للحصول على متوسط النسب .

الحـــل :

(أ) متوسط نسبة سعر اللبن إلى سعر الخبز $= 2.50 = (3.00 + 2.00)½$

(ب) بما أن نسبة سعر اللبن إلى سعر الخبز فى السنة الأولى هى 3.00 فإن نسبة سعر الخبز إلى سعر اللبن هو $0.333 = 1/3.00$ كذلك فإن نسبة سعر الخبز إلى سعر اللبن فى السنة الثانية هى $0.500 = 1/2.00$ وبهذا فإن

متوسط نسبة سعر الخبز إلى سعر اللبن $0.417 = (0.500 + 0.333)½$

(جـ) من الملائم أن نتوقع أن متوسط نسبة سعر اللبن إلى سعر الخبز هو مقلوب متوسط نسبة سعر الخبز إلى سعر اللبن وذلك إذا كان المتوسط متوسطاً ملائماً . ولكن $2.50 \neq 2.40 = 1/0.417$.

وهنا يظهر ان الوسط الحسابى يعد متوسطاً غير جيد عند استخدام النسب .

(د) الوسط الهندسى لنسب سعر اللبن إلى سعر الخبز = $\sqrt{(3.00)(2.00)} = \sqrt{6.00}$

الوسط الهندسى لنسب سعر الخبز إلى سعر اللبن = $\sqrt{(0.333)(0.500)} = \sqrt{0.0167} = 1/\sqrt{6.00}$

وبما أن هذه المتوسطات كل منها مقلوب الآخر ، فإننا نستنتج ان الوسط الهندسى أكثر ملاءمة من الوسط الحسابى للحصول على وسط النسب فى مثل هذا النوع من المسائل .

٣ – ٣٨ عدد البكتريا فى مزرعة معينة تزايدت من 1000 إلى 4000 خلال ثلاثة أيام . ما هو متوسط الزيادة النسبية فى اليوم ؟

الحـــل :

بما أن الزيادة من 1000 إلى 4000 هى 300% ، فإن هذا قد يؤدى إلى استنتاج أن متوسط نسبة الزيادة اليومية يجب أن يكون $100\% = 300\%/3$ وهذا يتضمن أنه فى خلال اليوم الأول فإن العدد ارتفع من 1000 إلى 2000 وفى خلال اليوم الثانى ارتفع من 2000 إلى 4000 . وفى خلال اليوم الثالث من 4000 إلى 8000 وهذا يناقض الحقيقة .

ولتحديد متوسط الزيادة النسبية ، ونرمز لها بالرمز r . فإن

مجموع عدد البكتريا بعد يوم = $1000 + 1000r = 1000(1 + r)$

مجموع عدد البكتريا بعد يومين = $1000(1 + r) + 1000(1 + r)r = 1000(1 + r)^2$

مجموع عدد البكتريا بعد ثلاثة أيام = $1000(1 + r)^2 + 1000(1 + r)^2r = 1000(1 + r)^3$

والتعبير الأخير يجب أن يساوى 4000 بحيث

$$1000(1 + r)^3 = 4000, \quad (1 + r)^3 = 4, \quad 1 + r = \sqrt[3]{4} \text{ and } r = \sqrt[3]{4} - 1$$

باستخدام اللوغاريتمات نجد أن $\sqrt[3]{4} = 1.587$ بحيث أن $r = 0.587 = 58.7\%$.

وبشكل عام إذا بدأنا بكية P وزدناها بمعدل ثابت r لكل وحدة زمن فإننا سوف نحصل بعد n وحدة زمن على الكمية :

$$A = P(1 + r)^n$$

وهذه تسمى بصيغة الفائدة المركبة . أنظر المسائل ٣ – ٩٤ و ٣ – ٩٥

الوسط التوافقى :

٣ – ٣٩ أوجد الوسط التوافقى H للأرقام 3, 5, 6, 6, 7, 10, 12 .

الحـل :

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{N}\Sigma\frac{1}{X} = \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{7}\left(\frac{140 + 84 + 70 + 70 + 60 + 42 + 35}{420}\right)$$

$$= \frac{501}{2940} \quad \text{and} \quad H = \frac{2940}{501} = 5{\cdot}87$$

وغالباً ما يكون من الأسهل التعبير عن الكسور فى الصورة العشرية أولا

$$\frac{1}{H} = \tfrac{1}{7}(0{\cdot}3333 + 0{\cdot}2000 + 0{\cdot}1667 + 0{\cdot}1667 + 0{\cdot}1429 + 0{\cdot}1000 + 0{\cdot}0833)$$

$$= \tfrac{1}{7}(1{\cdot}1929) \text{ and } H = 7/1{\cdot}1929 = 5{\cdot}87$$

بالمقارنة بالمسألة ٣ – ٣٥ تتضح حقيقة أن الوسط التوافقى لمجموعة من الأرقام الموجبة والتى لاتتساوى كلها فى القيمة أقل من الوسط الهندسى والذى بدوره أقل من الوسط الحسابى .

٣ – ٤٠ فى خلال أربع سنوات متتالية اشترى صاحب منزل بترول لتدفئة المنزل بتكلفة 1.6, 1.8, 2.1, 2.5 للتر ، على الترتيب . فماهو متوسط تكلفة البترول فى خلال مدة السنوات الأربع ؟

الحـل :

الحالة ١ :

إذا افترضنا أن صاحب المنزل اشترى نفس الكمية فى كل عام وليكن 1000 لتر .

إذن .

$$\text{متوسط التكلفة} = \frac{\text{التكلفة الكلية}}{\text{الكمية الكلية المشتراه}} = \frac{£16 + £18 + £21 + £25}{4000 \text{ litres}} = 2{\cdot}00\text{p/l}$$

وهذا يساوى الوسط الحسابى لتكلفة اللتر ، بمعنى ، $\tfrac{1}{4}(16 + 18 + 18 + 21 + 25) = 2.0\text{ p/1}$

ولن تختلف النتيجة حتى ولو كان x من اللترات استخدم فى كل سنة .

الحالة ٢ :

إذا افترضنا أن صاحب المنزل انفق نفس المبلغ كل سنة ، وليكن 200 £

إذن :

$$\text{متوسط التكلفة} = \frac{\text{التكلفة الكلية}}{\text{الكمية الكلية المشتراه}} = \frac{£800}{12\,500 + 11\,111 + 9524 + 8000 \text{ litres}} = 1{\cdot}94\text{p/h}$$

وهذا يساوى الوسط التوافق لتكلفة اللتر ، بمعنى ، $\frac{4}{\frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \frac{1}{21} + \frac{1}{25}} = 1{\cdot}94\text{p/h}$

ولن تختلف النتيجة ولو كان $£y$ قد انفق فى كل سنة .

وعملية الحصول على المتوسط فى الحالتين سليمة ، وقد حسب كل متوسط تحت شروط من الشائع استخدامها . ويجب ملاحظة أنه فى حالة ما إذا اختلف عد اللترات المستخدمة من سنة إلى أخرى بدلامن بقائها ثابتة ، يستبدل الوسط الحسابى العادى فى الحالة ١ بالوسط الحسابى المرجح . كذلك فإنه إذا تغيرت القيمة الكلية المنفقة من سنة إلى أخرى ، يستبدل الوسط التوافق العادى فى الحالة ٢ بالوسط التوافق المرجح .

٣ – ٤١ إذا انتقل شخص من A إلى B بمتوسط سرعة 30 km/h وعاد من B إلى A مستخدماً نفس الطريق بمتوسط سرعة 60 km/h . أوجد متوسط السرعة للمرحلة كلها .

الحل :

افترض أن المسافة من A إلى B هى 60 km (على الرغم من أنه يمكن فرض أى مسافة أخرى) . وبهذا

$$\text{وقت الذهاب من } A \text{ إلى } B = \frac{60 \text{ km}}{30 \text{ km/h}} = 2 \text{ h},$$

$$\text{الوقت من } B \text{ إلى } A = \frac{60 \text{ km}}{60 \text{ km/h}} = 1 \text{ h}$$

$$\text{متوسط السرعة لرحلة ذهاب وإياب} = \frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الوقت الكلى}} = \frac{120 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 40 \text{ km/h}.$$

والوسط السابق هو الوسط التوافق للرقين 30 ,60 . بمعنى $\frac{2}{1/30 + 1/60}$ 40 km/h. إذا كانت المسافات المقطوعةليست كلها متساوية . فإنه يمكن استخدام الوسط التوافق المرجح لسرعات حيث الاوزان هى المسافات .

(أنظر المسألة ٣ – ١٠٢) لاحظ أن استخدام الوسط الحسابى للرقين 30 و 60 km/h وهو 45 km/h, خطأ .

الوسط التربيعى او جذر متوسط المربعات :

٣ - ٤٢ أوجد الوسط التربيعى للأرقام 3, 5, 6, 6, 7, 10, 12 .

الحـــل :

$$\text{الجذر التربيعى} = \text{R.M.S.} = \sqrt{\frac{3^2+5^2+6^2+6^2+7^2+10^2+12^2}{7}} = \sqrt{57} = 7{\cdot}55$$

٣ - ٤٣ أثبت أن الوسط التربيعى لرقمين موجبين غير متساويين b, a أكبر من وسطهما الهندسى .

الحـــل :

المطلوب إثبات أن $\sqrt{ab}$. $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$. إذا كان ذلك صحيحاً فإنه بتربيع الطرفين $\frac{1}{2}(a^2+b^2) > ab$ بحيث أن $a^2+b^2 > 2ab, a^2-2ab+b^2 > 0, \text{ or } (a-b)^2 > 0$ ولكن المتباينة الأخيرة سليمة بما أن مربع أى مقدار حقيقى لايســـاوى الصفر يجب أن يكون موجباً . يتضمن الإثبات إثبـــات عكس الخطوات السابقة . نبدأ بـ $(a-b)^2 > 0$ وهذه من المعروف أنها صحيحة ومنها $a^2+b^2 > 2ab, \frac{1}{2}(a^2+b^2) > ab$ وفى النهاية $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)} > \sqrt{ab}.$ وهو المطلوب .

لاحظ أن $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)} = \sqrt{ab}$ فى حالة وحيدة إذا كانت $a = b$

الربيعات والعشيرات والمئينات :

٣ - ٤٤ أوجد (أ) الربيعات Q_1, Q_2, Q_3 و (ب) العشيرات $D_1, D_2, \ldots, D_9$ لأجور الـ 65 عاملا فى شركة Pand R (أنظر المسألة ٢ - ٣ والفصل الثانى) .

الحـــل :

(أ) الربيع الأول Q_1 هو هذا الأجر الذى يمكن الحصول عليه بعملية حصر $N/4 = 65/4 = 16.25$ من الحالات بادئين بالفئة الأولى (أو الدنيا) بما أن الفئة الأولى تحتوى على 8 حالات فإنه يجب أن نأخذ $(16.25 - 8) = 8.25$ من الـ 10 حالات بالفئة الثانية . باستخدام طريقة الاستكمال الخطى ، نجد :

$$Q_1 = £59{\cdot}995 + \frac{8{\cdot}25}{10}(£10{\cdot}00) = £68{\cdot}25$$

الربيع الثانى Q_2 نحصل عليه بحصر الـ $2N/4 = N/2 = 65/2 = 32.5$ الأولى من الحالات . بما أن الفئتين الأولى والثانية تحتوى على 18 حالة ، فإننا يجب أن نأخذ $32.5 - 18 = 14.5$ من الـ 16 حالة بالفئة الثالثة إذن :

$$Q_2 = £69{\cdot}995 + \frac{14{\cdot}5}{16}(£10{\cdot}00) = £79{\cdot}06$$

لاحظ أن Q_2 هو الوسيط

الربيع الثالث Q_3 نحصل عليه بحصر ال $3N/4 = \frac{3}{4}(65) = 48.75$ الأولى من الحالات . بما أن الفئات الأولى تحتوى على 48 حالة ، فإننا يجب أن نأخذ $0.75 = 48.75 - 48$ من ال 10 حالات بالفئة الخامسة إذن .

$$Q_3 = £89{\cdot}995 + \frac{0{\cdot}75}{10}(£10{\cdot}00) = £90{\cdot}75$$

ومن ثم فإن 25% من العاملين يحصلون على دخل £68.25 أو أقل ، 50% يحصلون على دخل £79.06 أو أقل و 75% يحصلون على دخل £90.75 أو أقل .

(ب) العشير الأولى والثانى . . . والتاسع نحصل عليه بحصر $N/10, 2N/10, \ldots, 9N/10$ من الحالات بادئين بالفئة الأولى (الدنيا) . وبهذا فإن

$$D_1 = £49{\cdot}995 + \frac{6{\cdot}5}{8}(£10{\cdot}00) = £58{\cdot}12$$

$$D_2 = £59{\cdot}995 + \frac{5}{10}(£10{\cdot}00) = £65{\cdot}00$$

$$D_3 = £69{\cdot}995 + \frac{1{\cdot}5}{16}(£10{\cdot}00) = £70{\cdot}94$$

$$D_4 = £69{\cdot}995 + \frac{8}{16}(£10{\cdot}00) = £75{\cdot}00$$

$$D_5 = £69{\cdot}995 + \frac{14{\cdot}5}{16}(£10{\cdot}00) = £79{\cdot}06$$

$$D_6 = £79{\cdot}995 + \frac{5}{14}(£10{\cdot}00) = £83{\cdot}57$$

$$D_7 = £79{\cdot}995 + \frac{11{\cdot}5}{14}(£10{\cdot}00) = £88{\cdot}21$$

$$D_8 = £89{\cdot}995 + \frac{4}{10}(£10{\cdot}00) = £94{\cdot}00$$

$$D_9 = £99{\cdot}995 + \frac{0{\cdot}5}{5}(£10{\cdot}00) = £101{\cdot}00$$

ومن ثم فإن 10% من العاملين دخلهم £58.12 أو أقل ، 20% دخلهم £65.00 أو أقل .... 90% دخلهم £101.00 أو أقل .

لاحظ أن العشير الخامس هو الوسيط والعشير الثانى والرابع والسادس والثامن والذين يقسمون التوزيع إلى خمسة أجزاء متساوية تسمى بالخميسات والتى تستخدم فى بعض الأحيان من الناحية العملية .

٣ – ٤٥ حدد (أ) المئين ال 35 (ب) المئين ال 60 . للتوزيع بالمسألة السابقة .

الحــل :

(أ) المئين ال 35 ويرمز له بالرمز P_{35} نحصل عليه بحصر ال $35N/100 = 35(65)/100 = 22.75$ الأولى من الحالات اعتباراً من الفئة الأولى (الدنيا) . إذن ، كما فى المسألة ٣ – ٤٤ ، $P_{35} = £69{\cdot}995 + \frac{4{\cdot}75}{16}(£10{\cdot}00) = £72{\cdot}97.$ وهذا يعنى أن 35% من العاملين يحصلون على دخل £72.97 أو أقل .

(ب) المئين ال 60 وهو $P_{60} = £79{\cdot}995 + \frac{5}{14}(£10{\cdot}00) = £83{\cdot}57.$ لاحظ أنه يساوى العشير السادس أو الخميس الثالث .

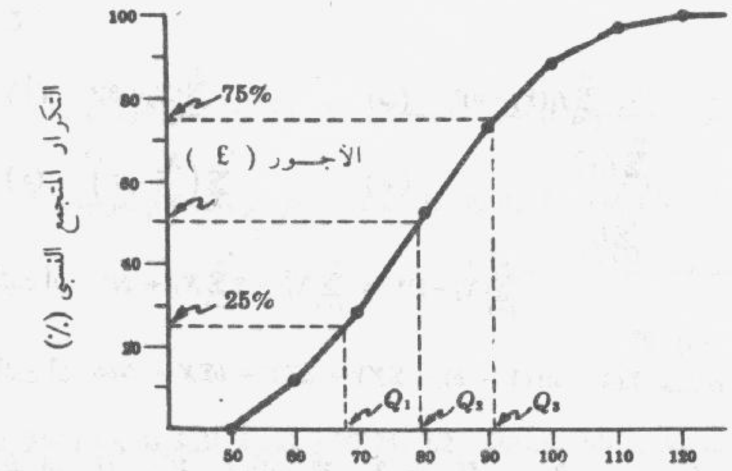
٣ – ٤٦ وضح كيف يمكن الحصول على نتائج المسائل ٣ – ٤٤ ، ٣ – ٤٥ من المنحنى التكرارى المتجمع النسبى .

الحـــل :

المنحنى التكرارى المتجمع النسبى لبيانات المسائل ٣ – ٤٤ ، ٣ – ٤٥ معطى أدناه .

الربيع الأول هو الاحداثى السينى للنقطة على المنحنى التى أحداثها الصادى هو 25% . كذلك فإن الربيع الثانى والثالث هو الاحداثى السينى للنقط على المنحنى والتى أحداثها الصادى هو 50% و 75% على الترتيب .

العشيرات والمئينات يمكن الحصول عليها بطريقة مماثلة . وعلى سبيل المثال فالعشير السابع والمئين الخامس والثلاثين هما الاحداثى السينى للنقط على المنحنى والتى أحداثها الصادى هو 70% و 35% على الترتيب .



شكل ٣ – ٥

مسائل اضافية

رمز التجميع :

٣ – ٤٧ اكتب الحدود لكل من رموز التجميع التالية

(أ) $\sum_{j=1}^{4}(X_j+2)$ (ب) $\sum_{j=1}^{4} f_j X_j^2$ (جـ) $\sum_{j=1}^{4} U_j(U_j+6)$

(د) $\sum_{k=1}^{N}(Y_k^2-4)$ (هـ) $\sum_{j=1}^{4} 4X_jY_j$

ج :

(أ) $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 8$

(ب) $f_1X_1^2 + f_2X_2^2 + f_3X_3^2 + f_4X_4^2 + f_5X_5^2$ (جـ) $U_1(U_1 + 6) + U_2(U_2 + 6) + U_3(U_3 + 6)$

(د) $Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_N^2 - 4N$ (هـ) $4X_1Y_1 + 4X_2Y_2 + 4X_3Y_3 + 4X_4Y_4$

٣ – ٤٨ عبر عمايلي باستخدام رموز التجميع :

(أ) $(X_1 + 3)^3 + (X_2 + 3)^3 + (X_3 + 3)^3$ (ب) $f_1(Y_1 - a)^2 + f_2(Y_2 - a)^2 + \ldots + f_{15}(Y_{15} - a)^2$

(جـ) $(\angle X_1 - 3Y_1) + (2X_2 - 3Y_2) + \ldots + (2X_N - 3Y_N)$

(د) $(X_1/Y_1 - 1)^2 + (X_2/Y_2 - 1)^2 + \ldots + (X_N/Y_N - 1)^2$ (هـ) $\dfrac{f_1a_1^2 + f_2a_2^2 + \ldots \quad f_{12}a_{12}^2}{f_1 - f_2 - \ldots - f_{12}}$

ج :

(أ) $\sum_{j=1}^{3}(X_j+3)^3$ (ب) $\sum_{j=1}^{15} f_j(Y_j-a)^2$ (جـ) $\sum_{j=1}^{N}(2X_j-3Y_j)$

(د) $\sum_{j=1}^{N}\left(\dfrac{X_j}{Y_j}-1\right)^2$ (هـ) $\dfrac{\sum_{j=1}^{12} f_ja_j^2}{\sum_{j=1}^{12} f_j}$

٣ – ٤٩ أثبت أن $\sum_{j=1}^{N}(X_j-1)^2 = \sum_{j=1}^{N}X_j^2 - 2\sum_{j=1}^{N}X_j + N$

٣ – ٥٠ أثبت أن $\Sigma(X + a)(Y + b) = \Sigma XY + a\Sigma Y + b\Sigma X + Nab$ حيث a ، b ثوابت . ماهو رمز الدليل المتضمن هنا؟

٣ – ٥١ متغيران U ، V يأخذان القيم $U_1 = 3$ ، $U_2 = -2$ ، $U_3 = 5$ ، $V_1 = -4$
$V_2 = -1$, $V_3 = 6$ على الترتيب . احسب (أ) ΣUV (ب) $\Sigma(U + 3)(V - 4)$
(جـ) ΣV^2 (د) $(\Sigma U)(\Sigma V)^2$ (هـ) ΣUV^2 (و) $\Sigma(U_2 - 2V^2 - 2)$.
(ز) $\Sigma(U/V)$.

ج :

(أ) 20 (ب) − 37 (جـ) 53 (د) 6 (هـ) 226 (و) − 62

(ز) 25/12

٣ – ٥٢ إذا كان $\sum_{j=1}^{4} X_jY_j = 5$, and $\sum_{j=1}^{4} = -3$ $\sum_{j=1}^{4} X_j = 7$, أوجد
(أ) $\sum_{j=1}^{4}(2X_j + 5Y_j)$ و(ب) $\sum_{j=1}^{4}(X_j - 3)(2Y_j + 1)$

ج :

(أ) −1 (ب) 23

الوسط الحسابى :

٣ – ٥٣ حصل طالب على الدرجات 96 ,82 ,93 ,76 ,85 فى خمس مواد أوجد الوسط الحسابى للدرجات .

ج : 86

٣ – ٥٤ زمن رد الفعل لشخص ما لمثير خارجى قيس بواسطة محلل نفسى وكان 0.52 ,0.49 , 0.50 ,0.46 ,0.53 and 0.55 ,0.44 ,0.53 ثانية على الترتيب . أوجد متوسط زمن رد فعل الشخص للمثير الخارجى .

ج : 0.50 s

٣ – ٥٥ مجموعة من الأرقام مكونة من ست ستات وسبع سبعات وثمانى ثمانيات وتسع تسعات وعشر عشرات . ما هو الوسط الحسابى للأرقام ؟

ج : 8.25

٣ – ٥٦ درجات طالب فى المعمل ، المحاضرات والشفوى فى مقرر الطبيعة هى 89 ,78 ,71 على الترتيب .

(أ) إذا كانت الأوزان المقررة لهذه الأجزاء هى 5 ,4 ,2 على الترتيب ماهو الوسط الملائم للدرجات ؟

(ب) ما هو وسط الدرجات إذا استخدمنا أوزاناً متساوية ؟

ج : (أ) 82 . (ب) 79

٣ – ٥٧ ثلاثة من مدرسى الاقتصاد أعطوا متوسط درجات امتحاناتهم 82 ,79,74 فى فصولهم المكونة من 17 ,25 ,32 طالباً على الترتيب . أوجد متوسط الدرجات فى جميع الفصول .

ج : 78

٣ – ٥٨ متوسط الأجر السنوى لجميع العاملين فى شركة هو £1500 . وكان متوسط الأجر السنوى الممنوح للذكور والإناث العاملين فى الشركة هو £1260 و £1560 على الترتيب . أوجد نسبة الذكور إلى الإناث العاملين بالشركة .

ج : 80%, 20%

٣ – ٥٩ الجدول ٣ – ٨ يبين توزيع الحمل الأعظم بالكيلو المنقول خلال كابلات من إنتاج شركة . أوجد متوسط الحمل الأعظم باستخدام

(أ) الطريقة المطولة

(ب) طريقة الترميز

ج : 110.9 kN

٣ – ٦٠ أوجد $\overline{X}$ للبيانات بالجدول ٣ – ٩ باستخدام

(أ) الطريقة المطولة

(ب) طريقة الترميز .

ج : 501.0

جدول ٣ – ٨

الحمل الأعظم (kN)	عدد الكابلات
93 - 97	2
98 - 102	5
103 - 107	12
108 - 112	17
113 - 117	14
118 - 122	6
123 - 127	3
128 - 132	1
المجموع	60

جدول ٣ – ٩

X	462	480	498	516	534	552	570	588	606	624
f	98	75	56	42	30	21	15	11	6	2

٣ – ٦١ الجدول ٣ – ١٠ أدناه يظهر توزيع أقطار رؤوس مسامير برشام منتجة بواسطة شركة . إحسب متوسط القطر .

ج : 7.2642 mm

جدول ٣ – ١٠

القطر (mm)	التكرارات
10 – under 15	3
15 – under 20	7
20 – under 25	16
25 – under 30	12
30 – under 35	9
35 – under 40	5
40 – under 45	2
المجموع	54

جدول ٣ – ١١

الفئات	التكرارات
7·247 – 7·249	2
7·250 – 7·252	6
7·253 – 7·255	8
7·256 – 7·258	15
7·259 – 7·261	42
7·262 – 7·264	68
7·265 – 7·267	49
7·268 – 7·270	25
7·271 – 7·273	18
7·274 – 7·276	12
7·277 – 7·279	4
7·280 – 7·282	1
المجموع	250

٣ – ٦٢ احسب المتوسط من بيانات الجدول ٣ – ١١ أعلاه

ج : 26.2

٣ – ٦٣ احسب متوسط العمر الانتاجي للأنابيب المنتجة بواسطة شركة L and M للأنابيب بالمسألة ٢ – ٢٠ الفصل الثانى .

ج : 715 ساعة

٣ - ٦٤ (أ) استخدام التوزيع التكرارى الذى حصلت عليه فى المسألة ٢ - ٢٧ ، الفصل الثانى ، لحساب متوسط قطر رولمان البلى
(ب) احسب المتوسط مباشرة من البيانات الأصلية وقارن بـ (أ) ، فسر أى اختلاف يمكن حدوثه .

ج : 7.349 mm

الوسيط :

٣ - ٦٥ : أوجد الوسط والوسيط لمجموعة الأرقام :
(أ) 5, 4, 8, 3, 7, 2, 9 (ب) 18.3, 20.6, 19.3, 22.4, 20.2, 18.8, 19.7, 20.0

ج : (أ) الوسط = 5.4 ، الوسيط = 5.
(ب) الوسط = 19.19 ، الوسيط = 19.85

٣ - ٦٦ أوجد وسيط الدرجات للمسألة ٣ - ٥٣

ج : 85 .

٣ - ٦٧ أوجد وسيط زمن رد الفعل بالمسألة ٣ - ٥٤

ج : 0.51 ثانية

٣ - ٦٨ أوجد وسيط الأرقام فى المسألة ٣ - ٥٥ .

ج : 8

٣ - ٦٩ أوجد وسيط الحمل الأعظم للكابلات فى المسألة ٣ - ٥٩

ج : 110.7 kN

٣ - ٧٠ أوجد الوسيط $\widetilde{X}$ للتوزيع فى المسألة ٣ - ٦٠

ج : 490.6

٣ - ٧١ أوجد وسيط أقطار مسامير البرشام فى المسألة ٣ - ٦١

ج : 7.2638 mm

٣ - ٧٢ أوجد وسيط التوزيع فى المسألة ٣ - ٦٢

ج : 25.4

٣ - ٧٣ الجدول ٣ - ١٢ يمثل توزيع أعمار أرباب العائلات فى الولايات المتحدة خلال السنة 1957

(أ) أوجد وسيط العمر

(ب) لماذا يعد الوسيط أكثر ملاءمة من الوسط كمقياس للنزعة المركزية فى هذه الحالة ؟

ج : 45.1

٣ – ٧٤ أوجد وسيط الدخل للبيانات بالمسألة ٢ – ٣١ ، الفصل الثانى

ج : $3608

جدول ٣ – ١٢

سن رب العائلة (بالسنين)	العدد (بالمليون)
Under 25	2·22
25–29	4·05
30–34	5·08
35–44	10·45
45–54	9·47
55–64	6·63
65–74	4·16
75 and over	1·66
	المجموع 43·72

المصدر : مكتب التعدادات

٣ – ٧٥ أوجد وسيط العمر الانتاجى للأنابيب فى المسألة ٢ – ٢٠ ، الفصل الثانى

ج : 708.3 ساعة

المنـــوال :

٣ – ٧٦ أوجد الوسط والوسيط والمنوال لمجموعة الأرقام :

(أ) 7, 4, 10, 9, 15, 12, 7, 9, 7

(ب) 8, 11, 4, 3, 2, 5, 10, 6, 4, 1, 10, 8, 12, 6, 5, 7

ج : (أ) الوسط = 8.9 ، الوسيط = 9 والمنوال = 7

(ب) الوسط = 6.4 ، الوسيط = 6 . وبما أن كلا من الأرقام 10 ,8 ,6 ,5 ,4 يتكرر مرتين فن الممكن اعتبار أن هناك خمسة مناويل . وقد يكون من الأصوب الانتهاء فى مثل هذه الحالة إلى القول بعدم وجود منوال .

٣ – ٧٧ أوجد منوال الدرجات فى المسألة ٣ – ٥٣

ج : لايوجد .

٣ – ٧٨ أوجد منوال وقت رد الفعل فى المسألة ٣ – ٥٤

ج : 0.53

٣ – ٧٩ أوجد منوال مجموعة الأرقام فى المسألة ٣ – ٥٥

ج : 10

٣ – ٨٠ أوجد منوال الحمل الأعظم للكابلات فى المسألة ٣ – ٥٩

ج : 110.6 kN

٣ - ٨١ أوجد المنوال $\hat{X}$ للتوزيع فى المسألة ٣ - ٦٠

ج : 462

٣ - ٨٢ أوجد منوال أقطار مسامير البرشام فى المسألة ٣ - ٦١

ج : 7.2632 mm

٣ - ٨٣ أوجد منوال التوزيع بالمسألة ٣ - ٦٢

ج 23.5

٣ - ٨٤ أوجد منوال العمر الانتاجى للأنابيب فى المسألة ٢ - ٢٠ ، الفصل الثانى

ج 7 668 ساعة

٣-٨٥ هل من الممكن تحديد المنوال للتوزيعات فى :

(ا) المسألة ٣-٧٣ فى هذا الفصل .

(ب) المسألة ٢-٣١ فى الفصل الثانى ؟ أذكر الأسباب فى إجابتك .

٣-٨٦ استخدم العلاقة الاعتبارية ، الوسط - المنوال = ٣ (الوسط - الوسيط) لحساب المنوال لتوزيعات (ا) المسألة ٣-٥٩ (ب) المسألة ٣-٦٠ (ج) المسألة ٣-٦١ (د) المسألة ٣-٦٢ (ه) المسألة ٢-٢٠ فى الفصل الثانى .

قارن النتائج بتلك التى تحصل عليها من الصيغة (٩) ، صفحة ٧٦ ، فسر أى اتفاق أو عدم اتفاق .

٣-٨٧ أثبت التعبير الذى أعطى فى نهاية المسألة ٣-٣٢ .

الوسطى الهندسى :

٣-٨٨ أوجد الوسط الهندسى للأرقام (ا) 4.2, 16.8 (ب) 6.00 ، 3.00

ج (ا) 8.4 (ب) 4.23

٣-٨٩ أوجد (ا) الوسط الهندسى G (ب) الوسط الحسابى $\bar{X}$ للأرقام 2, 4, 8, 16, 32

ج (أ) $G = 8$ (ب) $\bar{X} = 12.4$

٣-٩٠ أوجد الوسط الهندسى للأرقام (ا) 3, 5, 8, 3, 7, 2 (ب) 28.5, 73.6, 47.2, 31.5, 64.8

ج (ا) 4.14 (ب) 45.8

٣-٩١ أوجد الوسط الهندسى للتوزيعات فى (ا) المسألة ٥٩ و (ب) المسألة ٦٠ . أثبت أن الوسط الهندسى أقل من أو يساوى الوسط الحسابى فى هذه الحالات .

ج : (ا) 110.7 kN (ب) 499.5

٣–٩٢ إذا كانت أسعار سلعة تتضاعف فى فترة 4 سنوات ، ما هو متوسط نسبة الزيادة فى السنة .

ج : 18.9 %

٣–٩٣ فى سنة 1950, 1960 كان عدد سكان الولايات المتحدة (متضمنة الاسكا وهاواى) 151.3, 179.3 مليون على الترتيب .

(ا) ما هو متوسط نسبة الزيادة فى السنة ؟

(ب) قدر عدد السكان فى 1954

(ج) إذا كان متوسط نسبة الزيادة من سنة 1960 إلى 1970 كما فى (ا) ماذا يكون عليه عدد السكان 1970 ؟

ج : (ا) 1.71% (ب) 161.9 مليون (ج) 212.5 مليون .

٣–٩٤ رأسمال قدره £1000 استثمر بمعدل فائدة 4% سنويا . ما هو المبلغ الإجمالى بعد 6 سنوات إذا لم يسحب رأس المال الأصلى ؟

ج : £1265.30

٣–٩٥ فى المسألة السابقة إذا كانت الفائدة تضاف إلى رأس المال كل ربع سنة (بمعنى أن هناك 1% زيادة فى المبلغ كل ٣ شهور) ، ما هو المبلغ الإجمالى بعد 6 سنوات

ج : £1269.70

٣–٩٦ أوجد رقمين وسطهما الحسابى 9.0 ووسطهما الهندسى 7.2

ج : 3.6, 14.4

الوسط التوافقى :

٣–٩٧ أوجد الوسط التوافقى للأرقام (ا) 2, 3, 6 (ب) 3.2, 5.2, 4.8, 6.1, 4.2

ج : (ا) 3.0 (ب) 4.48

٣–٩٨ أوجد (ا) الوسط الحسابى (ب) الوسط الهندسى . (ج) الوسط التوافقى للأرقام 6 ,4 ,0 ,0

ج : (ا) 3 ، (ب) 0 ، (ج) 0

٣-٩٩ إذاكانت $X_1, X_2, X_3, \ldots$ تمثل مراكز الفئات فى توزيع تكرارى ويقابلها التكرارات $f_1, f_2, f_3, \ldots$ على الترتيب ، أثبت أن الوسط التوافقى H للتوزيع يعطى من العلاقة .

$$\frac{1}{H}=\frac{1}{N}\left(\frac{f_1}{X_1}+\frac{f_2}{X_2}+\frac{f_3}{X_3}+\ldots\right)=\frac{1}{N}\sum\frac{f}{X}$$

حيث

$$N=f_1+f_2+\ldots=\sum f$$

٣-١٠٠ باستخدام المسألة السابقة أوجد الوسط التوافقى للتوزيعات فى (أ) المسألة ٣-٥٩ (ب) المسألة ٣-٦٠ . قارن بالمسألة ٣-٩١

ح (أ) 110.4 (ب) 498.2

٣-١٠١ المدن A, B, C متساوية فى بعدها عن بعضها . سافر راكب دراجة من A إلى B بسرعة 30 km/h ومن B إلى C بسرعة 40 km/h ومن C إلى A بسرعة 50 km/h . حدد متوسط سرعته فى الرحلة كلها .

ح 38.3 km/h

٣-١٠٢ (أ) طائرة تسافر المسافات d_1, d_2, d_3 km بسرعات v_1, v_2, v_3 km/h على الترتيب . أثبت أن متوسط السرعة يعطى بـ V حيث $\frac{d_1+d_2+d_3}{V}=\frac{d_1}{v_1}+\frac{d_2}{v_2}+\frac{d_3}{v_3}$ ، هذا هو الوسط التوافقى المرجح .

(ب) أوجد V إذا كانت $d_1=2500, d_2=1200, d_3=500, v_1=500, v_2=400, v_3=250$

ح (ب) 420 km/h

٣-١٠٣ أثبت أن الوسط الهندسى للرقمين الموجبين a, b هى :

(أ) أقل من أو يساوى الوسط الحسابى .

(ب) أكبر من أو يساوى الوسط التوافقى لهذه الأرقام

هل يمكن تعميم الإثبات ليشمل أكثر من رقمين ؟

الوسط التربيعى أو وسط جذر المربعات :

٤-١٠٤ أوجد الوسط التربيعى أو وسط جذر المربعات للأرقام .

(أ) 11, 23, 35 (ب) 2.7, 3.8, 3.2, 4.3

ح (أ) 25 (ب) 3.55

٣-١٠٥ أثبت أن جذر متوسط المربعات لرقمين موجبين a, b هو

(أ) أكبر من أو يساوى الوسط الحسابى .

(ب) أكبر من أو يساوى الوسط التوافقى .

هل يمكن تعميم الاثبات لأكثر من رقمين ؟

٣-١٠٦ أستنتج صيغة يمكن إستخدامها للحصول على الوسط التربيعى للبيانات المجمعة . طبق هـذه الصيغة على أحد التوزيعات التكرارية التى سبق دراستها .

الربيعات والعشيرات والمئينات :

٣-١٠٧ جدول ٣-١٣ يوضح التوزيع التكرارى للدرجات التى حصل عليها الطلبة فى امتحان الكلية النهائى فى الجبر .

الدرجـة	عدد الطلبة
90-100	9
80-89	32
70-79	43
60-69	21
50-59	11
40-49	3
30-39	1
المجموع	120

جدول ٣-١٣

(أ) أوجـد ربيعات التوزيع .

(ب) فسر بوضوح دلالة كل منها .

ج : (أ) الربيع الأدنى $= Q_1 = 67$

الربيع الأوسط $= Q_2 =$ الوسيط $= 75$

الربيع الأعلى $= Q_3 = 83$

(ب) 25% سجلوا 67 أو أقل (أو 75% سجلوا 67 أو أكبر)

50% سجلوا 75 أو أقل (أو 50% سجلوا 75 أو أكبر)

75% سجلوا 83 أو أقل (أو 25% سجلوا 83 أو أكبر)

٣-١٠٨ أوجد الربيعات Q_1, Q_2, Q_3 للتوزيعات فى (أ) المسألة ٣-٥٩ (ب) مسألة ٣-٦٠ (ج) المسألة ٢-٣١ فى الفصل الثانى .

فسر بوضوح دلالة كل منها .

ج : (أ) $Q_1 = 105.5,\ Q_2 = 110.7,\ Q_3 = 115.7$ kN

(ب) $Q_1 = 469.3,\ Q_2 = 490.6,\ Q_3 = 523.3$

(ج) $Q_1 = \$1667,\ Q_2 = \$3608,\ Q_3 = \$5268$

٣-١٠٩ أوجد (أ) العشير الثانى (ب) العشير الرابع (ج) المئين التسعين (د) المئين الثامن والستون ، لبيانات المسألة ٣-٣٧ ، فسر بوضوح دلالة كل منها .

ج : (أ) 32.4 (ب) 40.9 (ج) 68.5 (د) 53.4

٣-١١٠ أوجد (أ) P_{10} (ب) P_{90} (ج) P_{25} (د) P_{75} لبيانات المسألة ٣-٥٩ . فسر بوضوح دلالة كل منها .

(أ) 10.15 (ب) 11.78 (ج) 10.55 (د) 11.57 kN

٣-١١١ (ا) هل يمكن التعبير عن الربيعات والعشيرات بدلالة المئينات ؟

(ب) هل يمكن التعبير عن جميع قيم التقسيمات الجزئية بدلالة المئينات ؟ وضح .

٣-١١٢ لبيانات المسألة ٣-١٠٧ أوجد (ا) أصغر درجة سجلت بواسطة الـ 25% الأول فى الفصل (ب) أعلى درجة سجلت بواسطة الـ 20% الأقل درجات فى الفصل . فسر إجابتك باستخدام المئينات .

ج : (ا) 83 (ب) 64

٣-١١٣ عبر عن نتائج المسألة ٣-١٠٧ بالرسم البيانى باستخدام .

(ا) المدرج التكرارى النسبى .

(ب) المضلع التكرارى النسبى .

(ج) المنحنى التكرارى المتجمع النسبى .

٣-١١٤ أجب على السؤال ٣-١١٣ باستخدام نتائج المسألة ٣-١٠٨ .

٣-١١٥ (ا) أوجد صيغة مشابهة لتلك المعرفة بالمعادلة (٨) صفحة ٧٥ ، لحساب المئينات لأى توزيع تكرارى .

(ب) وضح استخدام الصيغة بتطبيقها للحصول على نتائج المسألة ٣-١٠٠ .

الفصل الرابع

الانحراف المعيارى
والمقاييس الأخرى للتشتت

التشتت او التغير :

الدرجة التى تتجه بها البيانات الرقية للانتشار حول قيمة وسطى تسمى تشتت أو تغير البيانات . وهناك عديد من مقاييس التشتت أو التغير يمكن استخدامها وإن كان الأكثر شيوعاً هو المدى ، الانحراف المتوسط ، نصف المدى الربيعى ، مدى المئينات والانحراف المعيارى .

المدى :

مدى مجموعة من الأرقام هو الفرق بين أكبر رقم وأقل رقم فى المجموعة .

مثـــال : مدى المجموعة $2, 3, 3, 5, 5, 5, 8, 10, 12$ هو . $12 - 2 = 10$ فى بعض الأحيان يعطى المدى بذكر أقل واكبر رقم . فى المثال السابق على سبيل المثال يمكن تحديد المدى من 2 إلى 12 أو $12 - 2$.

الانحراف المتوسط او متوسط الانحرافات :

الانحراف المتوسط أو متوسط الانحرافات لمجموعة N من الأرقام $X_1, X_2, \ldots, X_N$ يعرف بما يلى

$$\text{الانحراف المتوسط} = \text{M.D.} = \frac{\sum_{j=1}^{N} |X_j - \bar{X}|}{N} = \frac{\Sigma |X - \bar{X}|}{N} = \overline{|X - \bar{X}|} \qquad (١)$$

حيث $\bar{X}$ هو الوسط الحسابى للأرقام و $|X_j - \bar{X}|$ هو القيمة المطلقة لانحراف القيمة X_j عن $\bar{X}$ (القيمة المطلقة لرقم هو الرقم بدون الإشارة المرافقة له ويعبر عن ذلك بخطين رأسيين يوضعان حول الرقم) وعلى هذا فان

$$|-4| = 4, |+3| = 3, |6| = 6, |-0{\cdot}84| = 0{\cdot}84.)$$

مثال : أوجد متوسط الانحرافات لمجموعة الأرقام $2, 3, 6, 8, 11$.

$$\text{الوسط الحسابى} = \bar{X} = \frac{2+3+6+8+11}{5} = 6$$

$$\text{الانحراف المتوسط} = \text{M.D.} = \frac{|2-6| + |3-6| + |6-6| + |8-6| + |11-6|}{5}$$

$$= \frac{|-4| + |-3| + |0| + |2| + |5|}{5} = \frac{4+3+0+2+5}{5} = 2{\cdot}8$$

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_K$ تحدث بتكرارات $f_1, f_2, \ldots, f_K$ على الترتيب ، فان الانحراف المتوسط يمكن كتابته على صورة

$$\text{الانحراف المتوسط} = \text{M.D.} = \frac{\sum_{j=1}^{K} f_j |X_j - \bar{X}|}{N} = \frac{\Sigma f |X - \bar{X}|}{N} = \overline{|X - \bar{X}|} \qquad (٢)$$

حيث $N = \sum_{j=1}^{K} f_j = \Sigma f$. وهذه الصيغة مفيدة للبيانات المجمعة حيث X_j's تمثل مراكز الفئات و f_j's يمثل التكرارات المقابلة لها .

فى بعض الأحيان يعرف الانحراف المتوسط بدلالة القيمة المطلقة للانحرافات عن الوسيط أو غيره من المتوسطات بدلا من الوسط . خاصية هامة للمجموع $\sum_{j=1}^{N} |X_j - a|$ أنه يكون أقل ما يمكن عندما تكون a هى الوسيط ، بمعنى أن متوسط انحرافات القيم عن الوسيط يكون أقل ما يمكن .

لاحظ أنه قد يكون من الأنسب استخدام التعبير ، متوسط القيم المطلقة للانحرافات عن التعبير الانحراف المتوسط .

نصف المدى الربيعى او الانحراف الربيعى : لمجموعة من البيانات يعرف كالآتى :

$$\text{نصف المدى الربيعى} = Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \qquad (٣)$$

حيث Q_1 هو الربيع الأول و Q_3 هو الربيع الثالث للبيانات . أنظر المسائل ٤ – ٦ ، ٤ – ٧ . ويستخدم المدى الربيعى $Q_3 - Q_1$ فى بعض الأحيان بدلا من نصف المدى الربيعى كمقياس شائع للتشتت .

مدى المئينات 90 — 10 لمجموعة من البيانات يعرف كالآتى :

$$\text{مدى المئينات } 90 - 10 = P_{90} - P_{10} \qquad (٤)$$

حيث P_{10} و P_{90} المئين العاشر والمئين التسعين للبيانات (أنظر المسألة ٤ – ٨) . نصف المدى المئينى 90-10 ، $\frac{1}{2}(P_{90} - P_{10})$ يمكن أيضاً استخدامه ولكنه ليس شائع الاستخدام .

الانحراف المعيارى : لمجموعة من N رقم $X_1, X_2, \ldots, X_N$ ويعبر عنها بالرمز s تعرف بما يلى

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N} (X_j - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma (X - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}} = \sqrt{\overline{(X - \bar{X})^2}} \qquad (٥)$$

حيث x تمثل انحرافات كل رقم X_j عن المتوسط $\bar{X}$.

وعلى هذا فإن s هى جذر متوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها ، ويسمى أحياناً جذر متوسط مربع الانحراف (أنظر صفحة ٧٧)

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_K$ تحدث بتكرارات $f_1, f_2, \ldots, f_K$ على الترتيب فإن الانحراف المعيارى يمكن كتابته على صورة :

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{K} f_j (X_j - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma f(X - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma f x^2}{N}} = \sqrt{\overline{(X - \bar{X})^2}} \qquad (٦)$$

حيث $N = \sum_{j=1}^{K} f_j = \Sigma f$. وهذه الصيغة مفيدة فى حالة البيانات المجمعة .

فى بعض الأحيان يعرف الانحراف المعيارى لبيانات من عينة بالقسمة على $(N - 1)$ بدلا من N فى الصيغ (٥) ، (٦) لأن هذا يؤدى للحصول على تقدير أحسن للانحراف المعيارى للمجتمع الذى سحبت منه العينة . ولقيم N الكبيرة (بالتأكيد $N > 30$) فإنه من الناحية العملية لا يوجد فرق حقيقى بين التعريفين . وكذلك فى حالة ما إذا كنا فى حاجة إلى التقدير الأحسن فإنه يمكن الحصول علية بضرب الانحراف المعيارى المحسوب بالتعريف الأول فى $\sqrt{N/(N-1)}$. وبهذا فإننا سنثبت على استخدام التعريف المعطى أعلاه .

التباين :

تباين مجموعة من البيانات يعرف بأنه مربع الانحراف المعيارى . وبهذا يعرف بـ s^2 فى (٥) ، (٦) .

وعندما يكون ضرورياً التميز بين الانحراف المعيارى للمجتمع والانحراف المعيارى لعينة مسحوبة من هذا المجتمع ، فإننا نستخدم دائماً الرمز s للأخير والرمز σ للأول . وبهذا فإن s^2 ، σ^2 يمثلان تباين العينة وتباين المجتمع على الترتيب .

طريقة مختصرة لحساب الانحراف المعيارى :

المعادلات (٥) ، (٦) يمكن كتابتها على الترتيب فى الصيغ المكافئة .

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N} X_j^2}{N} - \left(\frac{\sum_{j=1}^{N} X_j}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2} = \sqrt{\overline{X^2} - \bar{X}^2} \qquad (٧)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{K} f_j X_j^2}{N} - \left(\frac{\sum_{j=1}^{K} f_j X_j}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{\Sigma f X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f X}{N}\right)^2} = \sqrt{\overline{X^2} - \bar{X}^2} \qquad (٨)$$

حيث $\overline{X^2}$ تمثل متوسط مربعات قيم X المختلفة ، بينما $\bar{X}^2$ يمثل مربع متوسط قيم X المختلفة . أنظر المسائل ٤ – ١٢ إلى ٤ – ١٤ .

إذا كانت $d_j = X_j - A$ هى انحرافات X_j عن ثابت اختيارى A ، فالنتائج (٧) ، (٨) تصبح على الترتيب .

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N} d_j^2}{N} - \left(\frac{\sum_{j=1}^{N} d_j}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d}{N}\right)^2} = \sqrt{\overline{d^2} - \bar{d}^2} \qquad (٩)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{K} f_j d_j^2}{N} - \left(\frac{\sum_{j=1}^{K} f_j d_j}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{\Sigma f d^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f d}{N}\right)^2} = \sqrt{\overline{d^2} - \bar{d}^2} \qquad (١٠)$$

أنظر المسائل ٤ – ١٥ ، ٤ – ١٧ .

وعندما تجمع البيانات فى توزيع تكرارى طول فئاته متساوية وتساوى c ، فإن $d_j = cu_j$ or $X_j = A + cu_j$ و (١٠) تصبح

$$s = c\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{K} f_j u_j^2}{N} - \left(\frac{\sum_{j=1}^{K} f_j u_j}{N}\right)^2} = c\sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2} = c\sqrt{\overline{u^2} - \bar{u}^2} \qquad (١١)$$

والصيغة الأخيرة تعطى طريقة مختصرة جداً لحساب الانحراف المعيارى ويجب استخدامها للبيانات المجمعة إذا كانت أطوال الفئات متساوية . وهذه تسمى بطريقة الترميز وهى مماثلة بالضبط للطريقة المستخدمة فى حساب الوسط الحسابى من البيانات المجمعة فى الفصل الثالث . أنظر المسائل ٤ – ١٦ إلى ٤ – ١٩ .

خصائص الانحراف المعيارى :

١ – الانحراف المعيارى يمكن تعريفه كالآتى

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N}(X_j - a)^2}{N}}$$

حيث a أى وسط بالإضافة إلى الوسط الحسابى . ومن كل هذه الانحرافات المعيارية ، نجد أن أصغرها يمكن الحصول عليه عندما نأخذ $a = \bar{X}$ هذا نظراً للخاصية (ب) ، الفصل الثالث صفحة ٧٤ . هذه الخاصية تمدنا بالسبب المهم لتعريف الانحراف المعيارى كما سبق . لإثبات هذه الخاصية أنظر المسألة ٤ – ٢٧ .

٢ – فى التوزيع الطبيعى (أنظر الفصل السابع) نجد أن :

(أ) 68.27% من الحالات تقع بين $\bar{X} - s$ ، $\bar{X} + s$

(بمعنى ، انحراف معيارى واحد على كل جانب من الوسط)

(ب) 95.45 % من الحالات تقع بين $\bar{X} - 2s$ ، $\bar{X} + 2s$

(بمعنى انحرافين معياريين على كل جانب من الوسط) .

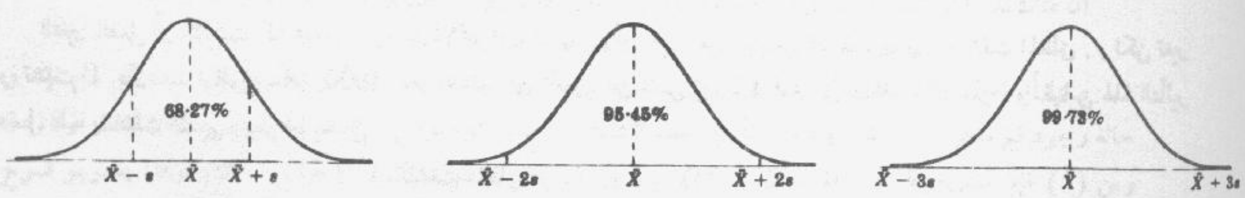
(ج) 99.73% من الحالات تقع بين $\bar{X} - 3s$ ، $\bar{X} + 3s$

(بمعنى ثلاثة انحرافات معيارية على كل جانب من الوسط) .

كما هو موضح بالشكل ٤ – ١

وللتوزيعات متوسطة الالتواء فالنسب السابقة تتحقق بشكل تقريبى .

(أنظر المسألة ٢ – ٢٤) .



شكل ٤ – ١

٣ - إذا افترضنا أن مجموعتين مكونتان من N_1 ، N_2 رقم (أو توزيعان تكراريان ومجموع تكراراتهما هى N_1 ، N_2) وتباينهما معطى بـ s_1^2 ، s_2^2 على الترتيب ولها نفس الوسط $\bar{X}$. فان التباين المشترك أو المجمع للمجموعتين (أو للتوزيعين التكرارين) هو

$$s^2 = \frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2} \tag{١٢}$$

لاحظ أن هذا هو الوسط الحسابى المرجح للتباينات . وهذه النتيجة يمكن تعميمها لحالة ثلاثة أو أكثر من التباينات .

طريقة شارلير للمراجعة :

طريقة شارلير لمراجعة حساب الوسط والانحراف المعيارى باستخدام طريقة الترميز تستخدم المتطابقات :

$$\Sigma f(u+1) = \Sigma fu + \Sigma f = \Sigma fu + N$$

$$\Sigma f(u+1)^2 = \Sigma f(u^2+2u+1) = \Sigma fu^2 + 2\Sigma fu + \Sigma f = \Sigma fu^2 + 2\Sigma fu + N$$

أنظر المسألة ٤ - ٢٠ .

معامل شبرد لتصحيح التباين :

عند حساب الانحراف المعيارى فإنه يكون معرضاً لبعض الخطأ الناتج عن تجميع البيانات فى فئات (أخطاء التجميع) . ولتعديل هذا الخطأ فإننا نستخدم النتيجة .

التباين المعدل = التباين من البيانات المجمعة - $c^2/12$ (١٣)

حيث c هو طول الفئة ومعامل التصحيح $c^2/12$ المطروح يسمى تصحيح شبرد ويستخدم فى توزيعات المتغيرات المتصلة حيث « الأطراف » تؤول تدريجياً إلى الصفر فى كلا الاتجاهين .

ويختلف الإحصائيون فى متى وما إذا كان تصحيح شبرد يجب تطبيقه .

وبالتأكيد فإنه يجب عدم استخدامه إلا بعد فحص دقيق للوضع . وهذا إلى أنه كثيراً ما يؤدى إلى مبالغة فى التصحيح وهذا يؤدى إلى استبدال الخطأ القديم بخطأ جديد .

علاقة اعتبارية بين مقاييس التشتت :

للتوزيعات متوسطة الالتواء فإننا نحصل على هذه العلاقة الاعتبارية

الانحراف المتوسط = $\frac{٤}{٥}$ (الانحراف المعيارى)

نصف المدى الربيعى = $\frac{٢}{٣}$ (الانحراف المعيارى)

وهذا ناتج من الحقيقة أنه بالنسبة للتوزيع الطبيعى فإن الانحراف المتوسط ونصف المدى الربيعى يساويان على الترتيب 0.7979 ، 0.6745 مضروباً فى الانحراف المعيارى .

التشتت المطلق والنسبى . معامل الاختلاف :

التغير الفعلى أو التشتت كما نحصل عليه من الانحراف المعيارى أو غيره من مقاييس التشتت يسمى بالتشتت المطلق . ولكن تغير أو تشتت 1 متر عند قياس مسافة 1000 متر يختلف فى تأثيره عن نفس تغير 1 متر فى مسافة 20 متر . ومقياس لهذا التأثير نحصل عليه بالتشتت النسبى ويعرف بما يلى .

$$\text{التشتت النسبى} = \frac{\text{التشتت المطلق}}{\text{المتوسط}} \tag{١٤}$$

إذا كان التشتت المطلق هو الانحراف المعيارى s والمتوسط هو الوسط $\bar{X}$ فـإن التشتت النسبى يسمى بمعامل الاختلاف أو معامل التشتت ويعرف كالآتى :

$$\text{معامل الاختلاف} = V = \frac{s}{\bar{X}} \qquad (١٥)$$

وبشكل عام يعبر عنه كنسبة . وهناك طرق ممكنة أخرى (أنظر المسألة ٤ — ٣) لاحظ أن معامل الاختلاف مستقل عن الوحدات المستخدمة . ولهذا السبب فإنه يفيد عند مقارنة توزيعات ذات وحدات مختلفة . أحد عيوب معامل الاختلاف هو أنه يصبح عديم الفائدة عندما تكون $\bar{X}$ قريبة من الصفر .

المتغير المعيارى والدرجات المعيارية :

المتغير

$$z = \frac{X - \bar{X}}{s} \qquad (١٦)$$

والذى يقيس الانحرافات عن الوسط بوحدات من الانحراف المعيارى يسمى بالمتغير المعيارى وهو كمية لا حجم لها (بمعنى أنها مستقلة عن الوحدات المستخدمة) .

إذا كانت الانحرافات عن الوسط معطاة بوحدات من الانحراف المعيارى ، فإنه يقال أنه معبر عنها بوحدات معيارية أو درجات معيارية . وهذه لها قيمة كبيرة عند المقارنة بين التوزيعات (أنظر المسألة ٤ — ٣١) .

مسائل محلولة

المــدى :

٤ — ١ أوجد مدى كل من مجموعات الأرقام :

(أ) 12, 6, 7, 3, 15, 10, 18, 5 (ب) 9, 3, 8, 8, 9, 8, 9, 18 .

الحــل :

فى كلتا الحالتين ، المدى = الرقم الأكبر — الرقم الأصغر = 15 = 3 — 18 .

ولـكن ، كما هو واضح من منظومة (أ) ، (ب)

(أ) 3, 5, 6, 7, 10, 12, 15, 18 (ب) 3, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 18

أن هناك تغيراً أو تشتتاً أكبر فى (أ) عنه فى (ب) . وفى الحقيقة (ب) تحتوى أساساً على 9's ، 8's

و بما أن المدى يظهر عدم وجود فروق بين المجموعتين فإنه لا يعد مقياساً جيداً فى هذه الحالة . وبشكل عام فإنه فى حالة وجود قيم متطرفة فإن المدى يعد مقياساً غير جيد للتشتت . ويمكن الوصول إلى تحسين له بإهمال الحالات المتطرفة 3،18 ومن (أ) فإن المدى سيكون (10 = 5 — 15) بينما فى (ب) فإن المدى سيكون 1=(8 — 9) وهذا يظهر بوضوح أن (أ) أكثر تشتتاً من (ب) ولكن ليست هذه هى الطريقة التى يعرف بها المدى . ويعمم نصف المدى الربيعى والمدى المئينى 90 — 10 لتحسين المدى بحذف الحالات المتطرفة .

٤ – ٢ أوجد مدى أوزان الطلبة فى جامعة XYZ كما هو موضح بالجدول ٢ – ١ صفحة ٤٥

الحـــل :

هناك طريقتان لتعريف المدى فى البيانات المجمعة .

الطريقة ١ :

المدى = مركز الفئة لأعلى فئة – مركز الفئة لأدنى فئة

$$73 - 61 = 12 \text{ kg}$$

الطريقة ٢ :

المدى = الحد الأعلى الحقيقى لأعلى فئة – الحد الأدنى الحقيقى لأدنى فئة .

$$74.5 - 59.5 = 15 \text{ kg}$$

الانحراف المتوسط :

٤ – ٣ أوجد الانحراف المتوسط لمجموعة الأرقام فى المسألة ٤ – ١ .

الحـــل :

(أ) الوسط الحسابى = $\bar{X} = \dfrac{12 + 6 + 7 + 3 + 15 + 10 + 18 + 5}{8} = \dfrac{76}{8} = 9{\cdot}5$

الانحراف المتوسط = $\text{M.D.} = \dfrac{\Sigma|X - \bar{X}|}{N}$

$$= \frac{|12 - 9{\cdot}5| + |6 - 9{\cdot}5| + |7 - 9{\cdot}5| + |3 - 9{\cdot}5| + |15 - 9{\cdot}5| + |10 - 9{\cdot}5| + |18 - 9{\cdot}5| + |5 - 9{\cdot}5|}{8}$$

$$= \frac{2{\cdot}5 + 3{\cdot}5 + 2{\cdot}5 + 6{\cdot}5 + 5{\cdot}5 + 0{\cdot}5 + 8{\cdot}5 + 4{\cdot}5}{8} \quad \frac{34}{8} \quad 4{\cdot}25$$

(ب) الوسط الحسابى = $\bar{X} = \dfrac{9 + 3 + 8 + 8 + 9 + 8 + 9 + 18}{8} = \dfrac{72}{8} = 9$

الانحراف المتوسط = $\text{M.D.} = \dfrac{\Sigma|X - \bar{X}|}{N}$

$$= \frac{|9 - 9| + |3 - 9| + |8 - 9| + |8 - 9| + |9 - 9| + |8 - 9| + |9 - 9| + |18 - 9|}{8}$$

$$= \frac{0 + 6 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 9}{8} = 2{\cdot}25$$

ويظهر الانحراف المتوسط أن المجموعة (ب) أقل تشتتاً من المجموعة (أ) ، كما هو بالفعل .

٤ – ٤ أوجد الانحراف المتوسط لأوزان الـ 100 طالب فى جامعة XYZ (أنظر الجدول ٣ – ٢ صفحة ٨٨) .

الحـــل :

من المسألة ٣ – ٢٠ الفصل الثالث ، الوسط الحسابى $= \bar{X} = 67.45$ kg ويمكن ترتيب الحل كما هو فى الجدول ٤ – ١

جدول ٤ – ١

الأوزان (kg)	مركز الفئات X	$\lvert X-\bar{X}\rvert = \lvert X - 67{\cdot}45\rvert$	التكرار	$f\lvert X-\bar{X}\rvert$
60–62	61	6·45	5	32·25
63–65	64	3·45	18	62·10
66–68	67	0·45	42	18·90
69–71	70	2·55	27	68·85
72–74	73	5·55	8	44·40
			$N = \Sigma f = 100$	$\Sigma f\lvert X - \bar{X}\rvert = 226{\cdot}50$

$$\text{الانحراف المتوسط} = \text{M.D.} = \frac{\Sigma f\lvert X-\bar{X}\rvert}{N} = \frac{226{\cdot}50}{100} = 2{\cdot}26 \text{ kg}$$

ومن الممكن الوصول إلى طريقة للترميز لحساب الانحراف المتوسط (أنظر المسألة ٤ – ٤٧) .

٤ – ٥ حدد نسبة الطلبة فى المسألة ٤–٤ والذى تقع أوزانهم فى المدى

(ا) $\bar{X} \pm \text{M.D}$ (ب) $\bar{X} \pm 2\,\text{MD}$ (ت) $\bar{X} \pm 3\,\text{M.D}$

الحـــل

(ا) $67{\cdot}45 \pm 2{\cdot}26$ $\bar{X} \pm \text{M.D.}$ هو المدى من 65.19 kg إلى 69.71 kg

هذا المدى يتضمن كل الأشخاص فى الفئة الثالثة + $^1/_3(65.5 - 65.19)$ من الطلبة فى الفئة الثانية + $^1/_3(69.71 - 68.5)$ من الطلبة فى الفئة الرابعة (نظرا لأن طول الفئة $= 3$ kg ، الحد الأعلى الحقيقى للفئة الثانية $= 65.5$ kg ، والحد الأدنى الحقيقى للفئة الرابعة $= 68.5$ kg) .

عدد الطلبة فى المدى $\bar{X} + \text{M.D}$ هـــو

$$42 + \frac{0{\cdot}31}{3}(18) + \frac{1{\cdot}21}{3}(27) = 42 + 1{\cdot}86 + 10{\cdot}89 = 54{\cdot}75, \text{ or } 55$$

ويكون 55 % من المجموع

(ب) $\bar{X} \pm 2\,\text{M.D.} = 67{\cdot}45 \pm 2(2{\cdot}26) = 67{\cdot}45 \pm 4{\cdot}52$ هو المدى من 62.93 kg إلى 71.97 kg

عدد الطلبة فى المدى $\bar{X} \pm 2\,\text{M.D.}$ هـــو

$$18 - \left(\frac{62{\cdot}93 - 62{\cdot}5}{3}\right)(18) + 42 + 27 + \left(\frac{71{\cdot}97 - 71{\cdot}5}{3}\right)(8) = 85{\cdot}67, \text{ or } 86$$

ويكون 86% من المجموع .

(جـ) $\bar{X} \pm 3\,\text{M.D.} = 67.45 \pm 3(2.26) = 67.45 \pm 6.78$ هو المدى من 60.67 kg إلى 74.23 kg .

عدد الطلبه فى المدى $X \pm 3\,\text{M.D}$ هو

$$5 - \left(\frac{60.67 - 59.5}{3}\right)(5) + 18 + 42 + 27 + \left(\frac{74.5 - 74.23}{3}\right)(8) = 97.33, \text{ or } 97$$

ويكون 97% من المجموع .

نصف المدى الربيعى او الانحراف الربيعى :

٤ – ٦ أوجد نصف المدى الربيعى لتوزيع أوزان الطلبة فى جامعة XYZ (أنظر الجدول ٤ – ١ فى المسألة ٤–٤) .

الحـــل :

قيم الربيعين الأدنى والأعلى هى $Q_1 = 65.5 + \frac{2}{42}(3) = 65.64\text{ kg}, Q_3 = 68.5 + \frac{10}{27}(3) = 69.61\text{ kg}$

نصف المدى الربيعى أو الانحراف الربيعى هـــو $Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2}(69.61 - 65.64) = 1.98\text{ kg}$

لاحظ أن 50% من الحالات تقع بين Q_1 و Q_3 بمعنى ان 50 طالبا أوزانهم بين 69.61 kg ، 65.64 kg

من الممكن أن نأخذ $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_3) = 67.63\text{ kg}$ كقياس للنزعة المركزية بمعنى ، متوسط الأوزان .
ومن ذلك نجد أن 50% من الأوزان تقع فى المدى (67.63 ± 1.98) kg .

٤ – ٧ أوجد نصف المدى الربيعى لأجور الـ 65 عاملا فى شركة P and R . أنظر المسألة ٢ – ٣ الفصل الثانى ، صفحة ٥٢

الحـــل :

من المسألة ٣–٤٤ ، الفصل الثالث $Q_1 = £68.25$ and $Q_3 = £90.75$

نصف المدى الربيعى $Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2}(£90.75 - £68.25) = £11.25$

وبما أن $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_3) = £79.50$ فإنه يمكن أن نستنتج أن 50% من العاملين يحصلون على دخل يقع فى المدى $£79.50 \pm £11.25$.

المدى المئينى 90 — 10 :

٤ – ٨ أوجد المدى المئينى 90 — 10 لأوزان الطلبة فى جامعة XYZ. ارجع للجدول ٢ – ١ ، صفحة ٤٥ .

الحـــل :

بما أن $P_{10} = 62.5 + \frac{5}{18}(3) = 63.33\text{ kg}$ and $P_{90} = 68.5 + \frac{25}{27}(3) = 71.27\text{ kg}$

إذن المدى المئينى 90 — 10 $= P_{90} - P_{10} = 71.27 - 63.33 = 7.94\text{ kg}$

وبما أن $\frac{1}{2}(P_{10} + P_{90}) = 67.30\text{ kg}$ and $\frac{1}{2}(P_{90} - P_{10}) = 3.97\text{ kg}$

فإنه يمكننا أن نستنتج أن 80% من الطلبة تقع أوزانهم فى المدى (67.30 ± 3.97) kg .

الانحراف المعيارى :

٤ – ٩ أوجد الانحراف المعيارى لمجموعات الأرقام فى المسألة ٤ – ١

الحل

(أ) $\text{الوسط الحسابى} = \bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{12+6+7+3+15+10+18+5}{8} = \frac{76}{8} = 9.5$

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{X})^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{(12-9.5)^2+(6-9.5)^2+(7-9.5)^2+(3-9.5)^2+(15-9.5)^2+(10-9.5)^2+(18-9.5)^2+(5-9.5)^2}{8}}$$

$$= \sqrt{23.75} = 4.87.$$

(ب) $\text{الوسط الحسابى} = \bar{X} = \frac{9+3+8+8+9+8+9+18}{8} = \frac{72}{8} = 9$

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{X})^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{(9-9)^2+(3-9)^2+(8-9)^2+(8-9)^2+(9-9)^2+(8-9)^2+(9-9)^2+(18-9)^2}{8}}$$

$$= \sqrt{15} = 3.87.$$

النتائج السابقة يمكن مقارنتها بنتائج المسألة ٤–٣ . فن الملاحظ أن الانحراف المعيارى يشير إلى أن المجموعة (ب) أقل تشتتا من المجموعة (أ) .

ولكن هذا الواقع غير ظاهر نظراً لأن القيم المتطرفة تؤثر فى الانحراف المعيارى بدرجة أكبر من الانحراف المتوسط وهذا متوقع نظرا لأننا نربع الانحرافات عند حساب الانحراف المعيارى .

٤–١٠ أوجد تباين مجموعات الأرقام فى المسألة ٤ – ١ .

الحل

التباين $= s^2$. وبهذا من نتائج المسألة ٤–٩ نجد : (أ) $s^2 = 23.75$ (ب) $s^2 = 15$.

٤–١١ أوجد الانحراف المعيارى لأوزان الـ 100 طالب فى جامعة XYZ أنظر الجدول ٢–١ صفحة ٤٥ .

الحل

من المسألة ٣ – ١٥ ، ٣ – ٢٠ بالفصل الثالث $\bar{X} = 67.45$ kg ويمكن ترتيب الحل كما فى الجدول ٤–٢ أدناه .

الجدول ٤ – ٢

الوزن (kg)	مراكز الفئات X	$X - \bar{X} = X - 67.45$	$(X-\bar{X})^2$	التكرار f	$f(X-\bar{X})^2$
60–62	61	−6.45	41.6025	5	208.0125
63–65	64	−3.45	11.9025	18	214.2450
66–68	67	−0.45	0.2025	42	8.5050
69–71	70	2.55	6.5025	27	175.5675
72–74	73	5.55	30.8025	8	246.4200
				$N = \Sigma f = 100$	$\Sigma f(X-\bar{X})^2 = 852.7500$

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f(X-\bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{852.7500}{100}} = \sqrt{8.5275} = 2.92 \text{ kilogrammes}$$

حساب الانحراف المعيارى من البيانات المجمعة :

٤-١٢ (أ) أثبت أن $s = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2} = \sqrt{\overline{X^2} - \bar{X}^2}$

(ب) استخدم الصيغة فى (أ) لإيجاد الانحراف المعيارى للأرقام 5 ,18 ,10 ,15 ,3 ,7 ,6 ,12 .

الحــل

(أ) بالتعريف

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma (X-\bar{X})^2}{N}}$$

إذن

$$s^2 = \frac{\Sigma (X-\bar{X})^2}{N} = \frac{\Sigma (X^2 - 2\bar{X}X + \bar{X}^2)}{N} = \frac{\Sigma X^2 - 2\bar{X}\Sigma X + N\bar{X}^2}{N}$$

$$= \frac{\Sigma X^2}{N} - 2\bar{X}\frac{\Sigma X}{N} + \bar{X}^2 = \frac{\Sigma X^2}{N} - 2\bar{X}^2 + \bar{X}^2 = \frac{\Sigma X^2}{N} - \bar{X}^2$$

$$= \overline{X^2} - \bar{X}^2 = \frac{\Sigma X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2$$

أو

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2} = \sqrt{\overline{X^2} - \bar{X}^2}$$

لاحظ أن رموز التجميع المستخدمة أعلاه استخدمت بالصورة المختصرة حيث استخدمنا X بدلا من X_j و Σ بدلا من $\sum_{j=1}^{N}$.

طريقة أخرى :

$$s^2 = \overline{(X-\bar{X})^2} = \overline{X^2 - 2X\bar{X} + \bar{X}^2} = \overline{X^2} - \overline{2X\bar{X}} + \overline{\bar{X}^2}$$

$$= \overline{X^2} - 2\bar{X}\bar{X} + \bar{X}^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2$$

(ب)

$$\overline{X^2} = \frac{\Sigma X^2}{N} = \frac{(12)^2 + (6)^2 + (7)^2 + (3)^2 + (15)^2 + (10)^2 + (18)^2 + (5)^2}{8} = \frac{912}{8} = 114$$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{12 + 6 + 7 + 3 + 15 + 10 + 18 + 5}{8} = \frac{76}{8} = 9{\cdot}5$$

إذن

$$s = \sqrt{\overline{X^2} - \bar{X}^2} = \sqrt{114 - 90{\cdot}25} = \sqrt{23{\cdot}75} = 4{\cdot}87$$

هذه الطريقة يجب مقارنتها بنتيجة المسألة ٤-٩ (أ)

٤-١٣ عدل الصيغة بالمسألة ٤-١٢ (أ) ليسمح بالتكرارات المقابلة للقيم المختلفة لـ X

الحــل :

التعديل الملائم هــو $s = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fX}{N}\right)^2} = \sqrt{\overline{X^2} - \bar{X}^2}$

وهذا يمكن إثباته كما فى المسألة ٤-١٢ (أ) حيث نبدأ بتعريف $s = \sqrt{\frac{\Sigma f (X-\bar{X})^2}{N}}$

إذن
$$s^2 = \frac{\Sigma f(X-\bar{X})^2}{N} = \frac{\Sigma f(X^2-2\bar{X}X+\bar{X}^2)}{N} = \frac{\Sigma fX^2 - 2\bar{X}\Sigma fX + \bar{X}^2\Sigma f}{N}$$
$$= \frac{\Sigma fX^2}{N} - 2\bar{X}\frac{\Sigma fX}{N} + \bar{X}^2 = \frac{\Sigma fX^2}{N} - 2\bar{X}^2 + \bar{X}^2 = \frac{\Sigma fX^2}{N} - \bar{X}^2$$
$$= \frac{\Sigma fX^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fX}{N}\right)^2 \quad \text{or} \quad s = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fX}{N}\right)^2}$$

لاحظ أننا فى رموز التجميع المستخدمة أعلاه استخدمنا الصيغة المختصرة حيث X, f استخدمت بدلا من X_j و f_j ، Σ استخدمت بدلا من $\sum_{j=1}^{K}$ ، $\sum_{j=1}^{K} f_j = N$

٤–١٤ باستخدام صيغة المسألة ٤–١٣ ، أوجد الانحراف المعيارى لبيانات المسألة ٤–١١ .

الحل :

يمكن ترتيب الحل كما فى الجدول ٤–٣

جدول ٤–٣

الأوزان (kg)	مراكز الفئات X	X^2	التكرار f	fX^2
60–62	61	3721	5	18 605
63–65	64	4096	18	73 728
66–68	67	4489	42	188 538
69–71	70	4900	27	132 300
72–74	73	5329	8	42 632
			$N = \Sigma f = 100$	$\Sigma fX^2 = 455\,803$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma fX^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fX}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{455\,803}{100} - (67{\cdot}45)^2} = \sqrt{8{\cdot}5275} = 2{\cdot}92 \text{ kg}$$

حيث $\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = 67{\cdot}45$ kg مطابق لما حصلنا عليه فى المسألة ٣–١٥ ، الفصل الثالث .

لاحظ أنه فى هذه المسألة كما فى المسألة ٤ – ١١ تجرى عمليات حسابية مطوله . فى المسألة ٤–١٧ سنوضح كيف أن طريقة الترميز تبسط الحسابات بشكل كبير جدا .

٤–١٥ إذاكانت $d = X - A$ انحرافات X عن ثابت اختيارى A ، أثبت أن

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$$

الحل :

بما أن $d = X - A,\ X = A + d$ و $X = A + \bar{d}$ كما فى المسألة ٣–١٨ ، الفصل الثالث . إذن

$$X - \bar{X} = (A + d) - (A + \bar{d}) = d - \bar{d}$$

حيث
$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f(X-\bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma f(d-\bar{d})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$$

باستخدام نتائج المسألة ٤–١٣ حيث أبدلنا $\bar{X}$ و X بـ $\bar{d}$ و d على الترتيب

طريقة اخرى :

$$s^2 = \overline{(X-\bar{X})^2} = \overline{(d-\bar{d})^2} = \overline{d^2 - 2\bar{d}d + \bar{d}^2}$$
$$= \overline{d^2} - 2\bar{d}^2 + \bar{d}^2 = \overline{d^2} - \bar{d}^2 = \frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2$$

ونحصل على النتيجة بأخذ الجذر الموجب .

٤–١٦ بين أنه لو قنا بترميز كل مركز فئة X فى توزيع تكرارى طول فئاته متساوية وتساوى c بالقيمة u طبقا للعلاقة $X = A + cu$ حيث A أحد مراكز الفئات فإن الانحراف المعيارى يمكن كتابته على الصورة .

$$s = c\sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2} = c\sqrt{\overline{u^2} - \bar{u}^2}$$

الحـــل :

نحصل على ذلك مباشرة من المسألة السابقة . بما أن $d = X - A = cu$ وبما أن c ثابت

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f(cu)^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f(cu)}{N}\right)^2} = \sqrt{c^2\frac{\Sigma fu^2}{N} - c^2\left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2} = c\sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2}$$

طريقة اخرى :

من الممكن اثبات النتيجة مباشرة بدون استخدام المسألة ٤–١٥ .

بما أن $X = A + cu,\ \bar{X} = A + c\bar{u}$ and $X - \bar{X} = c(u - \bar{u})$. إذن

$$s^2 = \overline{(X-\bar{X})^2} = c^2\overline{(u-\bar{u})^2} = c^2\overline{(u^2 - 2\bar{u}u + \bar{u}^2)} = c^2(\overline{u^2} - 2\bar{u}^2 + \bar{u}^2) = c^2(\overline{u^2} - \bar{u}^2)$$

و

$$s = c\sqrt{\overline{u^2} - \bar{u}^2} = c\sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2}$$

٤–١٧ أوجد الانحراف المعيارى لأوزان الطلبة فى جامعة XYZ باستخدام (أ) الصيغة المستنتجة فى المسألة ٤–١٥ (ب) طريقة الترميز المستخدمة فى المسألة ٤–١٦ .

الحـــل :

فى الجداول ٤–٤ ، ٤–٥ ، فإننا أخذنا بشكل اختيارى A تساوى مركز الفئة 67 . لاحظ أنه فى الجدول ٤–٤ الانحرافات $d = X - A$ مضاعفات لطول الفئة c . هذا العامل حذف فى الجدول ٤–٥ . وهذا أدى إلى تبسيط الحسابات بشكل كبير فى الجدول ٤–٥ . ويجب مقارنة هذه الجداول بتلك فى المسائل ٤–١١ ، ٤–١٤ . ولهذه الأسباب فإن طريقة الترميز يجب استخدامها كلما كان ذلك ممكنا .

(أ) الجدول ٤–٤

مراكز الفئات X	$d = X - A$	التكرارات f	fd
61	−6	5	−30
64	−3	18	−54
$A \longrightarrow$ 67	0	42	0
70	3	27	81
73	6	8	48
		$N = \Sigma f = 100$	$\Sigma fd = 45$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{873}{100} - \left(\frac{45}{100}\right)^2} = \sqrt{8{\cdot}5275} = 2{\cdot}92\ \text{kg}$$

(ب) جدول ٤–٥

fu^2	fu	التكرارات X	$u = \dfrac{X-A}{c}$	مراكز الفئات f
20	−10	61	−2	5
18	−18	64	−1	18
0	0	$A \longrightarrow$ 67	0	42
27	27	70	1	27
32	16	73	2	8
$\Sigma fu^2 = 97$	$\Sigma fu = 15$			$N = \Sigma f = 100$

$$s = c\sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2} = 3\sqrt{\frac{97}{100} - \left(\frac{15}{100}\right)^2} = \sqrt{0{\cdot}9475} = 2{\cdot}92 \text{ kg}$$

٤–١٨ أوجد (ا) الوسط الحسابى (ب) الانحراف المعيارى ، لتوزيع أجور الـ 65 عاملا فى شركة P and R باستخدام طريقة الترميز (أنظر المسألة ٢–٣ ، الفصل الثانى) .

الحـــل :

يمكن ترتيب الحل كما هو موضح بالجدول ٤–٦

جدول ٤–٦

	X	u	f	fu	fu^2
	£55·00	−2	8	−16	32
	65·00	−1	10	−10	10
$A \longrightarrow$	75·00	0	16	0	0
	85·00	1	14	14	14
	95·00	2	10	20	40
	105·00	3	5	15	45
	115·00	4	2	8	32
			$N = \Sigma f = 65$	$\Sigma fu = 31$	$\Sigma fu^2 = 173$

(ا)
$$\bar{X} = A + c\bar{u} = A + c\frac{\Sigma fu}{N} = £75{\cdot}00 + (£10{\cdot}00)\left(\frac{31}{65}\right) \quad £79{\cdot}99$$

(ب)
$$s = c\sqrt{\overline{u^2} - \bar{u}^2} = c\sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2} = (£10{\cdot}00)\sqrt{\frac{173}{65} - \left(\frac{31}{65}\right)^2} = (£10{\cdot}00)\sqrt{2{\cdot}4341} = £15{\cdot}60$$

٤–١٩ الجدول ٤–٧ يبين نسبة الذكاء I.Q لـ 480 تلميذ فى مدرسة ابتدائية . أوجد (ا) الوسط الحسابى (ب)الانحراف المعيارى باستخدام طريقة الترميز .

جدول ٤–٧

Class mark X	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	110	114	118	122	126
Frequency f	4	9	16	28	45	66	85	72	54	38	27	18	11	5	2

الحـل

نسبة الذكاء $(I.Q.) = \dfrac{\text{العمر العقلى}}{\text{العمر الزمنى}}$ ، معبر عنه كنسبة مئوية .

على سبيل المثال فإن طفلا عمره 8 سنوات والذى طبقا لأسلوب تعليمى معين له عقلية تكافىء طفلا عمره 10 سنوات له نسبة ذكاء $I.Q. = 10/8 = 1.25 = 125\%$ أو ببساطة 125 ويكون مفهوما أنها نسبة مئوية .

لحصول على المتوسط والانحراف المعيارى لنسب الذكاء فإن الحل يمكن أن يرتب كما فى الجدول ٤–٨ .

جدول ٤–٨

	X	u	f	fu	fu^2
	70	−6	4	−24	144
	74	−5	9	−45	225
	78	−4	16	−64	256
	82	−3	28	−84	252
	86	−2	45	−90	180
	90	−1	66	−66	66
$A \longrightarrow$	94	0	85	0	0
	98	1	72	72	72
	102	2	54	108	216
	106	3	38	114	342
	110	4	27	108	432
	114	5	18	90	450
	118	6	11	66	396
	122	7	5	35	245
	126	8	2	16	128
			$N = \Sigma f = 480$	$\Sigma fu = 236$	$\Sigma fu^2 = 3404$

(١) $$\bar{X} = A + c\bar{u} = A + c\frac{\Sigma fu}{N} = 94 + 4\left(\frac{236}{480}\right) = 95{\cdot}97$$

(ب) $$s = c\sqrt{\overline{u^2} - \bar{u}^2} = c\sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2} = 4\sqrt{\frac{3404}{480} - \left(\frac{236}{480}\right)^2} = 4\sqrt{6{\cdot}8499} = 10{\cdot}47.$$

طريقة شارلير للمراجعة :

٤–٢٠ استخدم طريقة شارلير للمراجعة لإثبات صحة حساب (ا) الوسط (ب) الانحراف المعيارى اللذين تم حسابهما فى المسألة ٤–١٩ .

ولحصول على المراجعة المطلوبة ، فإننا نضيف أعمدة الجدول ٤–٩ إلى أعمدة الجدول ٤–٨ فيما عدا العمود الثانى حيث كرر هنا للتسهيل .

الحـل :

(ا) من الجدول ٤–٩ أدناه $\Sigma f(u + 1) = 716$.

من الجدول ٤–٨ السابق $\Sigma fu + N = 236 + 480 = 716$.

وهذا يعطى المراجعة المطلوبة على الوسط .

(ب) من الجدول ٤–٩ أدناه $\Sigma f(u+1)^2 = 4356$.

من الجدول ٤–٨ السابق $\Sigma fu^2 + 2\Sigma fu + N = 3404 + 2(236) + 480 = 4356.$

وهذا يعطى المراجعة المطلوبة على الانحراف المعيارى .

جدول ٤–٩

$u+1$	f	$f(u+1)$	$f(u+1)^2$
−5	4	−20	100
−4	9	−36	144
−3	16	−48	144
−2	28	−56	112
−1	45	−45	45
0	66	0	0
1	85	85	85
2	72	144	288
3	54	162	486
4	38	152	608
5	27	135	675
6	18	108	648
7	11	77	539
8	5	40	320
9	2	18	162
	$N = \Sigma f = 480$	$\Sigma f(u+1) = 716$	$\Sigma f(u+1)^2 = 4356$

معامل تصحيح شبرد للتباين :

٤-٢١ طبق تصحيح شبرد لحصول على الانحراف المعيارى للبيانات فى (١) المسألة ٤ – ١٧ (ب) المسألة ٤ – ١٨ (حـ) المسألة ٤–١٩

الحل

(١) $s^2 = 8.5275$, $c = 3$. التباين المصحح $= s^2 - c^2/12 = 8.5275 - 3^2/12 = 7.7775$

الانحراف المعيارى المصحح = $\sqrt{\text{التباين المصحح}}$ = $\sqrt{7.7775} = 2.79$ kg

(ب) $s^2 = 243.41$, $c = 10$. التباين المصحح $= s^2 - c^2/12 = 243.41 - 10^2/12 = 235.08$

الانحراف المعيارى المصحح $= \sqrt{235.08} = £15.33$

(حـ) $s^2 = 109.60$, $c = 4$ التباين المصحح $= s^2 - c^2/12 = 109.60 - 4^2/12 = 108.27$

الانحراف المعيارى المصحح $\sqrt{108.27} = 10.41$.

٤-٢٢ للتوزيع التكرارى الثانى بالمسألة ٢–٨ ، الفصل الثانى ، صفحة ٥٧ . أوجد (١) الوسط (ب) الانحراف المعيارى (حـ) الانحراف المعيارى مستخدما تصحيح شبرد (د) الانحراف المعيارى الفعلى من البيانات الخام .

الحل

حل موضح بالجدول :

الجدول ٤–١٠

X	u	f	fu	fu^2
122	−3	3	−9	27
131	−2	5	−10	20
140	−1	9	−9	9
$A \rightarrow$ 149	0	12	0	0
158	1	5	5	5
167	2	4	8	16
176	3	2	6	18
		$N = \Sigma f = 40$	$\Sigma fu = -9$	$\Sigma fu^2 = 95$

(أ) $$\bar{X} = A + c\bar{u} = A + c\frac{\Sigma fu}{N} = 149 + 9\left(\frac{-9}{40}\right) = 147{\cdot}0 \text{ mm}$$

(ب) $$s = c\sqrt{\overline{u^2} - \bar{u}^2} = c\sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2} = 9\sqrt{\frac{95}{40} - \left(\frac{-9}{40}\right)^2} = 9\sqrt{2{\cdot}324\,375} = 13{\cdot}7 \text{ mm}$$

(ج) التباين المصحح $= s^2 - c^2/12 = 188.27 - 9^2/12 = 181.52$.

الانحراف المعيارى المصحح $= 13.5$ mm .

(د) لحساب الانحراف المعيارى من الأطوال الفعلية للأوراق المعطاة فى المسألة ، قد يكون من الأنسب طرح رقم مناسب ، وليكن $A = 150$ mm من كل الأطوال ثم نستخدم طريقة المسألة ٤ – ١٥ . الانحرافات $d = X - A = X - 150$ معطاة فى الجدول التالى .

−12	14	0	−18	−6	−25	−1	7
−4	8	−10	−3	−14	−2	2	−6
18	−24	−12	26	13	−31	4	15
−4	23	−8	−3	−15	3	−10	−15
11	−5	−15	−8	0	6	−5	−22

ومنها نجـد أن $\Sigma d^2 = 7052$ ، $\Sigma d = -128$. إذن

$$s = \sqrt{\overline{d^2} - \bar{d}^2} = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{7052}{40} - \left(\frac{-128}{40}\right)^2} = \sqrt{166{\cdot}06} = 12{\cdot}9 \text{ mm}$$

بهذا فإن تصحيح شبرد نتج عنه بعض التحسين فى هذه الحالة .

علاقة اعتباريه بين مقاييس التشتت :

٤–٢٣ ناقش مدى صلاحية العلاقات الاعتبارية

(أ) الانحراف المتوسط $= \frac{4}{5}$ (الانحراف المعيارى)

(ب) نصف المدى الربيعى $= \frac{2}{3}$ (الانحراف المعيارى)

وذلك فى توزيع أوزان الطلبة فى جامعة XYZ

الحــل :

(أ) من المسائل ٤–٤ ، ٤–١١ ، $\frac{\text{الانحراف المتوسط}}{\text{الانحراف المعيارى}} = \frac{2.26}{2.92} = 0.77$ وهو قريب من $\frac{4}{5}$

(ب) من المسائل ٤–٦ ، ٤–١١ ، $\frac{\text{نصف المدى الربيعى}}{\text{الانحراف المعيارى}} = \frac{1.98}{2.92} = 0.68$ وهو قريب من $\frac{2}{3}$.

وبهذا فإن العلاقة الاعتبارية صالحة فى هذه الحالة .

ملحوظة : لم نقم باستخدام تصحيح شبرد للانحراف المعيارى للبيانات المجمعة فى الحل أعلاه نظرا لعدم استخدام تصحيح مقابل للانحراف المتوسط أو نصف المدى الربيعى .

خصائص الانحراف المعيارى :

٤–٢٤ حدد النسبة المئوية لنسبة ذكاء « I.Q. » الطلبة فى المسألة ٤–١٩ والتى تقع داخل المدى :

(أ) $\bar{X} \pm s$ (ب) $\bar{X} \pm 2s$ (جـ) $\bar{X} \pm 3s$.

الحــل :

(أ) $\bar{X} \pm s = 95.97 \pm 10.47$ هو مدى نسبة الذكاء I.Q. من 85.5 إلى 106.4 .

عدد الطلبة الذين تقع نسبة ذكائهم .I.Q فى المدى $(\bar{X} \pm s)$

$$\left(\frac{88-85.5}{4}\right)(45)+66+85+72+54+\left(\frac{106.4-104}{4}\right)(38)=339$$

النسبة المئوية لنسبة الذكاء .I.Q فى المدى $\bar{X} \pm s = 339/480 = 70.6\%$.

(ب) $\bar{X} \pm 2s = 95.97 \pm 2(10.47)$ هو مدى نسبة الذكاء .I.Q من 75.0 إلى 116.9 .

عدد الطلبة الذين تقع نسبة ذكائهم .I.Q فى المدى $\bar{X} \pm 2s$ هو

$$\left(\frac{76-75.0}{4}\right)(9)+16+28+45+66+85+72+54+38+27+18+\left(\frac{116.9-116}{4}\right)(11)=451$$

النسبة المئوية لنسبة الذكاء .I.Q فى المدى $\bar{X} \pm 2s = 451/480 = 94.0\%$

(جـ) $\bar{X} \pm 3s = 95.97 \pm 3(10.47)$ هو مدى نسبة الذكاء .I.Q من 64.6 إلى 127.4

عدد الطلبة الذين تقع نسبة ذكائهم .I.Q فى المدى $\bar{X} \pm 3s$ هو

$$= 480 - \left(\frac{128-127.4}{4}\right)(2) = 479.7, \text{ or } 480$$

النسبة المئوية لنسبة الذكاء .I.Q فى المدى $\bar{X} \pm 3s$ هو : $479.7/480 = 99.9\%$ أو من الناحية "العملية 100% .

النسب المئوية فى (ا) ، (ب) ، (حـ) تتفق بشكل مناسب مع مايتوقع من التوزيع الطبيعى ، بمعنى 99.73% ، 95.45% ، 68.27% على الترتيب .

لاحظ أننا لم نستخدم تصحيح شبرد للانحراف المعيارى . ولو أستخدم فى هذه الحالة فإن النتائج ستكون أكثر قربا للنسب السابقة . لاحظ أيضا أن النتائج أعلاه يمكن الحصول عليها باستخدام جدول المسألة ٤–٣٢ .

٤–٢٥ أوجد لمجموعات الأرقام 14 ,8 ,2 و 14 ,11 ,8 ,5 ,2 مايلى :

(ا) الوسط لكل مجموعة (ب) التباين لكل مجموعة (جـ) وسط المجموعة المكونة من دمج المجموعتين .
(د) تباين المجموعة المكونة من دمج المجموعتين معا .

الحـــل :

(ا) وسط المجموعة الأولى $= \frac{1}{5}(2 + 5 + 8 + 11 + 14) = 8$ وسط المجموعة الثانية $= \frac{1}{3}(2 + 8 + 14) = 8$

(ب) تباين المجموعـــة الأولى $= s_1^2 = \frac{1}{5}[(2 - 8)^2 + (5 - 8)^2 + (8 - 8)^2 + (11 - 8)^2 + (14 - 8)^2] = 18$

تباين المجموعـة الثانية $= s_2^2 = \frac{1}{3}[(2 - 8)^2 + (8 - 8)^2 - (14 - 8)^2] = 24$

(جـ) وسط المجموعات المندمجة $= \dfrac{2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 2 + 8 + 14}{5 + 3} = 8$

(د) تباين المجموعات المندمجـة

$$s^2 = \frac{(2 - 8)^2 + (5 - 8)^2 + (8 - 8)^2 + (11 - 8)^2 + (14 - 8)^2 + (2 - 8)^2 + (8 - 8)^2 + (14 - 8)^2}{5 + 3} = 20{\cdot}25$$

طريقة أخرى ، بالصيغة

تباين المجموعات المندمجة $= s^2 = \dfrac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2} = \dfrac{(5)(18) + (3)(24)}{5 + 3} = 20{\cdot}25$

٤–٢٦ حل المسألة السابقة لمجموعات الأرقام 22 ,16 ,10 و 14 ,11 ,8 ,5 ,2 .

الحـــل

هنا وسط المجموعتين هو 8 و 16 على الترتيب ، بينما تباينهما هـــو نفسه تباين المجموعات فى المسألة السابقة أى $s_1^2 = 18$ و $s_2^2 = 24$.

وسط المجموعات المندمجـــة $= \dfrac{2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 10 + 16 + 22}{5 + 3} = 11$

تباين المجموعات المندمجـــة

$$\frac{(2 - 11)^2 + (5 - 11)^2 + (8 - 11)^2 + (11 - 11)^2 + (14 - 11)^2 + (10 - 11)^2 + (16 - 11)^2 + (22 - 11)^2}{5 + 3} = 35.25$$

لاحظ أن الصيغة $s^2 = \dfrac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2}$ والتى تعطى 20.25 غير صالحة للتطبيق فى هذه الحالة حيث أن الوسط الحسابى غير متساو فى المجموعتين .

٤-٢٧ (١) أثبت أن $w^2 + pw + q$ حيث q ، p ثوابت معطاة ، نهاية صغرى عندما وعندما فقط $w = -\frac{1}{2}p$

(ب) باستخدام (١) أثبت أن $\dfrac{\sum_{j=1}^{N}(X_j - a)^2}{N}$ أو باختصار $\dfrac{\Sigma(X-a)^2}{N}$ نهاية صغرى عندما وعندما فقط

الحـــل :

(١) المقـــدار $w^2 + pw + q = (w + \frac{1}{2}p)^2 + q - \frac{1}{4}p^2$. وبما أن $(q + \frac{1}{4}p^2)$ ثابت ، فإن المقدار يكون أصغر ما يمكن (بمعنى أنه نهاية صغرى) عندما وعندما فقط $w + \frac{1}{2}p = 0$ أى $w = -\frac{1}{2}p$.

(ب) $$\frac{\Sigma(X-a)^2}{N} = \frac{\Sigma(X^2 - 2aX + a^2)}{N} = \frac{\Sigma X^2 - 2a\Sigma X + Na^2}{N} = a^2 - 2a\frac{\Sigma X}{N} + \frac{\Sigma X^2}{N}$$

بمقارنة هذا المقدار بـ $w^2 + pw + q$ نجد أن $w = a, p = -2\frac{\Sigma X}{N}, q = \frac{\Sigma X^2}{N}$

وبهذا فإن المقدار نهاية صغرى عندما $a = -\frac{1}{2}p = (\Sigma X)/N = \bar{X}$ ، باستخدام النتيجه

التشتت المطلق والتشتت النسبى ، معامل الاختلاف :

٤-٢٨ مصنع لإنتاج لمبات التلفزيون ينتج نوعين منها A ، B والعمر الانتاجى لهما بالساعة هو $\bar{X}_B = 1875$ و $\bar{X}_A = 1495$. وانحرافهما المعيارى بالساعة $s_B = 310$ و $s_A = 280$. ما هو النوع الذى له أكبر

(١) تشتت مطلق (ب) تشتت نسبى

الحـــل :

(١) التشتت المطلق لـ $A = s_A = 280$ h. .

التشتت المطلق لـ $B = s_B = 310$ h. .

اللمبات B لها أكبر تشتت مطلق .

(ب) معامل اختلاف $A = \dfrac{s_A}{\bar{X}_A} = \dfrac{280}{1495} = 18{\cdot}7\%$ ، معامل اختلاف $B = \dfrac{s_B}{\bar{X}_B} = \dfrac{310}{1875} = 16{\cdot}5\%$

وبهذا فإن اللمبات A لها أكبر تغير أو تشتت نسبى .

٤-٢٩ أوجد معاملات الاختلاف V للبيانات فى (١) المسألة ٤ - ١٤ (ب) المسألة ٤ - ١٨ ، باستخدام الانحراف المعيارى المصحح وغير المصحح .

الحـــل :

$$V(\text{غير مصحح}) = \frac{s\,(\text{غير مصحح})}{\bar{X}} = \frac{2{\cdot}92}{67{\cdot}45} = 0{\cdot}0433 = 4{\cdot}3\% \quad (١)$$

من المسألة ٤-٢١ (١) $$V(\text{مصحح}) = \frac{s\,(\text{مصحح})}{\bar{X}} = \frac{2{\cdot}79}{67{\cdot}45} = 0{\cdot}0413 = 4{\cdot}1\%$$

$$(ب) \quad V\ (\text{غير مصحح}) = \frac{s\ (\text{غير مصحح})}{\bar{X}} = \frac{15{\cdot}60}{79{\cdot}77} = 0{\cdot}196 = 19{\cdot}6\%$$

من المسألة ٤-٢١ (ب)

$$V\ (\text{مصحح}) = \frac{s\ (\text{مصحح})}{\bar{X}} = \frac{15{\cdot}33}{79{\cdot}77} = 0{\cdot}192 = 19{\cdot}2\%.$$

٤-٣٠ (أ) عرف مقياسا للتشتت النسبي يمكن استخدامه لمجموعة من البيانات معلوم ربيعاتها .

(ب) بين الحسابات اللازمة لحصول على القياس المعرف فى (أ) باستخدام بيانات المسألة ٤-٦ .

الحـــل :

(أ) إذا كانت Q_3 و Q_1 معطاة لمجموعة من البيانات فإن $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_3)$ يعد مقياسا للنزعة المركزية أو متوسطات لهذه البيانات بينما $Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$ نصف المدى الربيعي يعد مقياسا للتشتت لهذه البيانات .

وبهذا يمكن تعريف مقياس التشتت النسبى كالآتى :

$$V_Q = \frac{\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)}{\frac{1}{2}(Q_1 + Q_3)} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

والذى يمكن تسميته بالمعامل الربيعى للاختلاف أو المعامل الربيعى للتشتت النسبى

$$(ب) \quad V_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{69{\cdot}61 - 65{\cdot}64}{69{\cdot}61 + 65{\cdot}64} = \frac{3{\cdot}97}{135{\cdot}25} = 0{\cdot}0293 = 2{\cdot}9\%$$

المتغيرات المعيارية والدرجات المعيارية :

٤-٣١ حصل طالب على الدرجة 84 فى الامتحان النهائى للرياضة حيث كان متوسط الدرجات 76 وانحرافها المعيارى 10 . فى الامتحان النهائى للطبيعة حيث كان متوسط الدرجات 82 وانحرافها المعيارى 16 ، حصل الطالب على الدرجة 90. فى أى الموضوعات كان درجة استيعابه أعلى ؟

الحـــل :

المتغير المعيارى $z = (X - \bar{X})/s$ يقيس انحرافات X عن الوسط $\bar{X}$ معبراً عنها بالانحراف المعيارى s .

فى الرياضة ، $z = (84 - 76)/10 = 0.8$. فى الطبيعة $z = (90 - 82)/16 = 0.5$.

وبهذا كانت رتبة الطالب 0.8 من الدرجة المعيارية أعلى من الوسط فى الرياضة بينما كانت 0.5 فقط من الدرجة المعيارية أعلى من الوسط فى الطبيعة . وبهذا فإن استيعابه النسبى كان أعلى فى الرياضة .

المتغير $z = (X - \bar{X})/s$ يستخدم غالباً فى الاختبارات التربوية حيث يعرف بالدرجات المعيارية .

٤-٣٢ (أ) حول نسب الذكاء .I.Q فى المسألة ٤ - ١٩ إلى درجات معيارية .

(ب) عبر بالرسم البيانى عن التكرار النسبى مقابل الدرجات المعيارية .

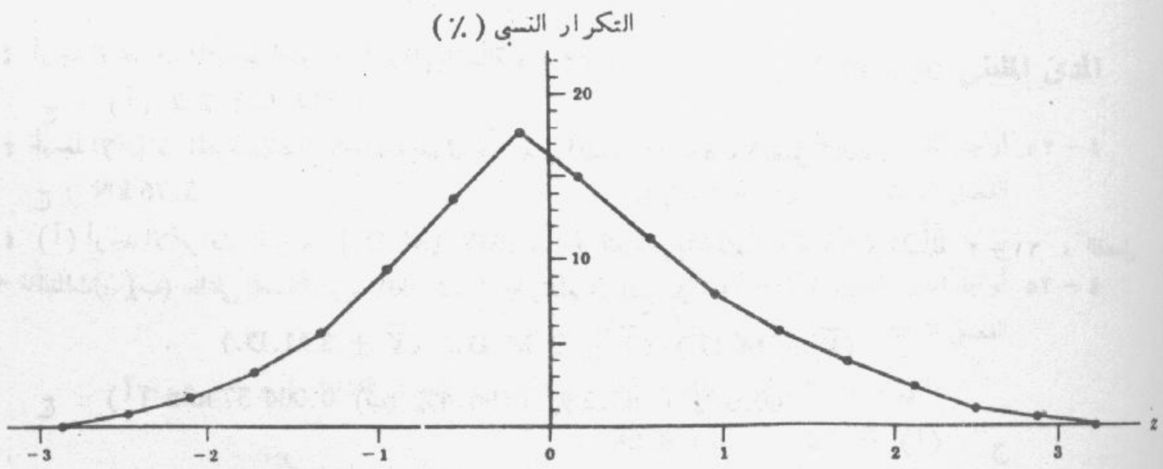
الحــل :

(أ) خطوات العمل فى التحويل إلى درجات معيارية يمكن ترتيبها كما فى الجدول ٤ – ١١. فى هذا الجدول أضفنا مركزى الفئة 66 و 130 واللذان تكراراتهما صفر وذلك لاستخدامها فى حل (ب) . كذلك لم يستخدم تصحيح شبرد للانحراف المعيارى . الدرجات المعدلة فى هذه الحالة من الناحية العملية هى نفسها المعطاة هنا إلى درجة الدقة الموضحة .

الجدول ٤ – ١١ $\bar{X} = 96.0$ ، $s = 10.5$

I.Q. (X)	$X - \bar{X}$	$z = \frac{X - \bar{X}}{s}$	التكرار f	التكرار النسبى $f/N(\%)$
66	−30·0	−2·86	0	0·0
70	−26·0	−2·48	4	0·8
74	−22·0	−2·10	9	1·9
78	−18·0	−1·71	16	3·3
82	−14·0	−1·33	28	5·8
86	−10·0	−0·95	45	9·4
90	−6·0	−0·57	66	13·8
94	−2·0	−0·19	85	17·7
98	2·0	0·19	72	15·0
102	6·0	0·57	54	11·2
106	10·0	0·95	38	7·9
110	14·0	1·33	27	5·6
114	18·0	1·71	18	3·8
118	22·0	2·10	11	2·3
122	26·0	2·48	5	1·0
126	30·0	2·86	2	0·4
130	34·0	3·24	0	0·0
			480	100%

(ب) الشكل البيـــانى للتكرار النسبى مقابل الدرجات المعيارية z (المضلع التكرارى النسبى) المحور الأفقى مقاس بدلالة الانحراف المعيارى s كوحدة . لاحظ أن التوزيع معتدل فى عدم تماثله وهو ملتو التواءاً بسيطاً إلى اليمين .



شكل ٤ – ٣

مسائل اضافية

المـدى :

٤ – ٣٣ أوجد مدى كل من مجموعات الأرقام :

(أ) 5, 3, 8, 4, 7, 6, 12, 4, 3 (ب) 8.772, 6.453, 10.624, 8.628, 9.434, 6.351 .

ج : (أ) 9 (ب) 4.273

٤ – ٣٤ أوجد مدى الحمل الأعظم المعطى بالجدول ٣ – ٨ فى المسألة ٣ – ٢٩ ، الفصل الثالث . ج : 40 kN

٤ – ٣٥ أوجد مدى أقطار مسامير البرشام بالجدول ٣ – ١٠ فى المسألة ٣ – ٦١ الفصل الثالث . ج : 0.036 mm

٤ – ٣٦ أكبر قيمة فى 50 قياساً هو 8.34 kg . إذا كان المدى 0.46 kg أوجد أقل قيمة فى القياسات .

ج : 7.88 kg

٤ – ٣٧ أوجد مدى البيانات فى (أ) المسألة ٣ – ٦٢ ، الفصل الثالث . (ب) المسألة ٣ – ٧٣ ، الفصل الثالث (جـ) المسألة ٢ – ٢٠ ، الفصل الثانى . ج : (أ) 35 (ب) غير محدد (ت) 900 hr

الانحراف المتوسط :

٤ – ٣٨ أوجد القيم المطلقة لـ (أ) -18.2 (ب) $+3.58$ (جـ) 6.21 (د) 0 (هـ) $-\sqrt{2}$ (و) $4.00 - 2.36 - 3.52$

ج : (أ) 18.2 (ب) 3.58 (جـ) 6.21 (د) 0 (هـ) بالتقريب $\sqrt{2} = 1.414$ (و) 1.88

٤ – ٣٩ أوجد الانحراف المتوسط لمجموعات الأرقام : (أ) 3, 7, 9, 5 (ب) 2.4, 1.6, 3.8, 4.1, 3.4 .

ج : (أ) 2 (ب) 0.85

٤ – ٤٠ أوجد الانحراف المتوسط لمجموعات الأرقام بالمسألة ٤ – ٣٣ .

ج : (أ) 2.2 (ب) 1.317

٤ – ٤١ أوجد الانحراف المتوسط لحمل الأعظم بالجدول ٣ – ٨ فى المسألة ٣ – ٥٩ ، الفصل الثالث .

ج : 5.76 kN

٤ – ٤٢ (أ) أوجد الانحراف المتوسط (M.D.) لأقطار مسامير البرشام بالجدول ٣ – ١٠ فى المسألة ٣ – ٦١ ، الفصل الثالث . (ب) ما هى النسبة المئوية لأقطار مسامير البرشام التى تقع بين

$$(\bar{X} \pm \text{M.D.}),\ (\bar{X} \pm 2\ \text{M.D.}),\ (\bar{X} \pm 3\,\text{M.D.})$$

ج : (أ) 0.004 37 mm (ب) 96.4% ، 85.2% ، 60.0%

٤ – ٤٣ أوجد الانحراف المتوسط (أ) عن الوسط (ب) عن الوسيط لمجموعة الأرقام 8, 10, 9, 12, 4, 8, 2 . حقق أن الانحراف المتوسط عن الوسيط ليس أكبر من الانحراف المتوسط عن الوسط .

ج : (أ) 3.0 (ب) 2.8

٤ - ٤٤ أوجد الانحراف المتوسط (أ) حول المتوسط (ب) حول الوسيط ، للتوزيع بالمسألة ٣ - ٦٠ ، الفصل ثالث . استخدم نتيجة هذه المسألة و كذلك المسألة ٣ - ٧٠ ، الفصل الثالث.

ج : (أ) 31.2 (ب) 30.6

٤ - ٤٥ أوجد الانحراف المتوسط (أ) حول المتوسط (ب) حول الوسيط ، للتوزيع بالمسألة ٣ - ٦٢ ، الفصل الثالث. استخدم نتيجة هذه المسألة و كذلك المسألة ٣ - ٧٢ ، الفصل الثالث .

ج : (أ) 6.0 (ب) 6.0

٤ - ٤٦ وضح لماذا يكون الانحراف المتوسط مقياساً ملائماً أو غير ملائم للتباين لتوزيع المسألة ٣ - ٧٣ ، الفصل الثالث .

٤ - ٤٧ أوجد صيغة للترميز لحساب الانحراف المتوسط (أ) حول الوسط (ب) حول الوسيط ، من توزيع تكرارى . طبق هذه الصيغة للتحقق من النتائج فى المسائل ٤ - ٤٤ ، ٤ - ٤٥ .

نصف المدى الربيعى أو الانحراف الربيعى :

٤ - ٤٨ أوجد نصف المدى الربيعى للتوزيعات فى (أ) المسألة ٤ - ٥٩ ، الفصل الثالث . (ب) المسألة ٣ - ١٠٧ ، الفصل الثالث . فسر بوضوح النتائج فى كل حالة .

ج : (أ) 5.1 kN (ب) 27.0 (جـ) 12

٤ - ٤٩ أوجد نصف المدى الربيعى للتوزيعات فى (أ) المسألة ٢ - ٣١ ، الفصل الثانى (ب) المسألة ٣ - ٧٣ ، الفصل الثالث ، فسر بوضوح النتائج فى كل حالة . وضح مزايا نصف المدى الربيعى لمثل هذا النوع من التوزيعات على غيره من مقاييس التشتت .

ج : (أ) $1801 (ب) 10.8 سنة

٤ - ٥٠ وضح أنه بالنسبة لأى توزيع تكرارى فإن إجمالى نسبة الحالات التى تقع فى الفترة $\frac{1}{2}(Q_1+Q_3) \pm \frac{1}{2}(Q_3-Q_1)$. هى 50% . هل هذا أيضاً صحيح للفترة $(Q_2 \pm \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1))$ ؟ إشرح إجابتك .

٤ - ٥١ (أ) وضح كيف يمكن التعبير بيانياً عن نصف المدى الربيعى المقابل لتوزيع تكرارى معين ؟

(ب) ماهى العلاقة بين نصف المدى الربيعى والتكرار المتجمع النسبى للتوزيع ؟

المدى المئينى 90 — 10 :

٤ - ٥٢ أوجد المدى المئينى 90 — 10 لتوزيعات (أ) المسألة ٣ - ٥٩ . الفصل الثالث . (ب) المسألة ٣ - ١٠٧ ، الفصل الثالث . فسر بوضوح النتائج فى كل حالة

ج : (أ) 16.3 kN (ب) 33.6 or 34

٤ - ٥٢ أوجد المدى المئينى 90 — 10 لتوزيعات (أ) المسألة ٢ - ٣١ ، الفصل الثانى ، (ب) المسألة ٣ - ٧٣ ، الفصل الثالث . فسر بوضوح النتائج فى كل حالة .

ماهى مزايا المدى المئينى 90 — 10 على المقاييس الأخرى للتشتت ؟ وما هى عيوبه ؟

ج : (أ) $7402 (ب) 40.8

٤ - ٥٤ ماهى المزايا أو العيوب التى يمكن أن تكون للمدى المئينى 80 — 20 بالمقارنة بالمدى المئينى 90 — 10 ؟

٤ – ٦٥ ماهى التعديلات التى تحدث بالمسألة ٤ – ٦٣ عندما نطبق تصحيح شبر د ؟

ج : (أ) 0.00569 mm (ب) 71.6%, 93.0%, 99.68%

٤ – ٦٦ (أ) أوجد الوسط والانحراف المعيارى لبيانات المسألة ٢ – ٨ ، الفصل الثانى .

(ب) كون توزيعاً تكرارياً للبيانات وأوجد الانحراف المعيارى .

(جـ) قارن النتائج فى (ب) بتلك التى فى (أ) . حدد ما إذا كان تطبيق تصحيح شبر د يؤدى إلى نتائج أحسن .

ج : (أ) 12.9 mm ، 146.8 mm

٤ – ٦٧ حل المسألة ٤ – ٦٦ باستخدام بيانات المسألة ٣ – ٢٧ ، الفصل الثانى .

ج : (أ) 0.0495 mm ، 7.349 mm

٤ – ٦٨ (أ) من مجموع N رقم ، الكسر p أرقام واحد والكسر $q = 1 - p$ أصفار . أثبت أن الانحراف المعيارى لمجموعة الأرقام هو $\sqrt{pq}$. . (ب) طبق نتيجة (أ) على المسألة ٤ – ٥٦ (جـ) .

٤ – ٦٩ (أ) أثبت أن تباين مجموعة مكونة من n رقم $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n-1)d$ (متوالية عددية حدها الأول a والفرق المشترك d) معطى بالصيغة $\frac{1}{12}(n^2 - 1)d^2$ (ب) استخدم (أ) فى المسألة ٤ – ٥٨

ملحوظة : استخدم

$$1 + 2 + 3 \ldots + (n-1) = \tfrac{1}{2}n(n-1),\ 1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + (n-1)^2 = \tfrac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$$

٤ – ٧٠ عمم واثبت الخاصية ٣ بالصفحة ١١٦

علاقة اعتبارية بين مقاييس التشتت :

٤ – ٧١ بمقارنة الانحراف المعيارى الذى حصلت عليه فى المسألة ٤ – ٥٩ بالانحراف المتوسط فى المسائل ٤ – ٤١ ، ٤ – ٤٢ ، ٤ – ٤٤ ، حدد مدى تحقق العلاقة الاعتبارية :

الانحراف المتوسط = $\frac{4}{5}$ (الانحراف المعيارى) . ناقش أية اختلافات يمكن حدوثها .

٤ – ٧٢ بمقارنة الانحراف المعيارى الذى حصلت عليه فى المسألة ٤ – ٥٩ بنصف المدى الربيعى فى المسألة ٤ – ٤٨ ، حدد مدى تحقق العلاقة الاعتبارية :

نصف المدى الربيعى = $\frac{2}{3}$ (الانحراف المعيارى) . ناقش أية اختلافات يمكن حدوثها .

٤ – ٧٣ ماهى العلاقة الاعتبارية والتى يمكنك توقع وجودها بين نصف المدى الربيعى والانحراف المتوسط للتوزيع ذى الشكل الناقوسى المعتدل الالتواء ؟

ج : نصف المدى الربيعى = $\frac{5}{6}$ (الانحراف المتوسط)

٤ – ٧٤ فى توزيع تكرارى يمكن تقريبه بالتوزيع الطبيعى كان نصف المدى الربيعى 10 ماهى القيمة التى تتوقعها لـ (أ) الانحراف المعيارى (ب) الانحراف المتوسط

ج : (أ) 15 (ب) 12

التشتت المطلق والتشتت النسبى ، معامل الاختلاف :

٤ – ٧٥ فى الامتحان النهائى فى الاحصاء كان متوسط الدرجات لمجموعة من 150 طالباً هو 78 وانحرافها المعيارى 8.0 وفى الجبر كان متوسط الدرجات للمجموعة هو 73 وانحرافها المعيارى 7.6 . فى أى الموضوعات كان هناك أكبر .
(أ) تشتت مطلق (ب) تشتت نسبى ج : (أ) الاحصاء (ب) الجبر

٤ – ٧٦ أوجد معامل الاختلاف لبيانات (أ) المسألة ٣ – ٥٩ ، الفصل الثالث (ب) المسألة ٣ – ١٠٧ ، الفصل الثالث .
ج : (أ) 6.6% (ب) 19.0%

٤ – ٧٧ (أ) ما السبب فى عدم امكانية حساب معامل الاختلاف لتوزيع المسألة ٢ – ٣١ ، الفصل الثانى ؟
(ب) احسب المعامل الربيعى للتشتت النسبى لهذا التوزيع (أنظر المسألة ٣ – ١٠٨ (جـ) بالفصل الثالث وكذلك المسألة ٤ – ٣٠) .
ج : 51.9%

٤ – ٧٨ (أ) أوجد مقياس التشتت النسبى الذى يستخدم نصف المدى الربيعى .
(ب) وضح كيفية حساب هذا المقياس باستخدام بيانات المسألة ٣ – ٧٣ ، الفصل الثالث .

المتغيرات المعيارية والدرجات المعيارية :

٤ – ٧٩ فى الامتحانات المشار إليها فى المسألة ٤ – ٧٥ ، حصل طالب على الدرجة 75 فى الاحصاء و 71 فى الجبر فى أى امتحان يعد مستوى استيعابه أعلى ؟
ج : الجبر

٤ – ٨٠ حول مجموعة الأرقام 5 ,7 ,8 ,2 ,6 إلى درجات معيارية .
ج : $0.19, -1.75, 1.17, 0.68, -0.29$

٤ – ٨١ أثبت أن متوسط مجموعة من الدرجات المعيارية هو صفر وانحرافها المعيارى هو واحد . وضح ذلك باستخدام المسألة ٤ – ٨٠ .

٤ – ٨٢ (أ) حول الدرجات فى المسألة ٣ – ١٠٧ ، الفصل الثالث إلى درجات معيارية .
(ب) كون شكلا بيانياً للتكرار النسبى مقابل الدرجات المعيارية .

الفصل الخامس

العزوم ، الالتواء ، والتفرطح

العـــزوم :

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_N$ تمثل N قيمة يمكن أن يأخذها المتغير X ، فإننا نعرف الكمية

$$\overline{X^r} = \frac{X_1^r + X_2^r + \ldots + X_N^r}{N} = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_j^r}{N} = \frac{\Sigma X^r}{N} \qquad (١)$$

وتسمى بالعزم الرائى . العزم الأول حيث $r = 1$ هو الوسط الحسابى $\bar{X}$

العزم الأول حول الوسط الحسابى $\bar{X}$ يعرف كالآتى :

$$m_r = \frac{\sum_{j=1}^{N} (X_j - \bar{X})^r}{N} = \frac{\Sigma (X - \bar{X})^r}{N} = \overline{(X - \bar{X})^r} \qquad (٢)$$

إذا كانت $r = 1$ فإن $m_1 = 0$ (انظر المسألة ٣ – ١٦ ، الفصل الثالث) .

إذا كانت $r = 2$ فإن $m_2 = s^2$ التباين .

العزم الرائى حول أية نقطة أصل A يعرف كالآتى :

$$m_r' = \frac{\sum_{j=1}^{N} (X_j - A)^r}{N} = \frac{\Sigma (X - A)^r}{N} = \frac{\Sigma d^r}{N} = \overline{(X - A)^r} \qquad (٣)$$

حيث $d = X - A$ هى انحرافات X عن A . إذا كانت $A = 0$ فإن (٣) تؤول إلى (١) . ولهذا تسمى (١) فى أغلب الأحيان بالعزم الرائى حول الصفر .

العزوم للبيانات المجمعة :

إذا حدثت $X_1 , X_2 , \ldots , X_K$ بتكرارات $f_1 , f_2 , \ldots , f_K$ على الترتيب فإن العزوم السابقة تعرف كما يلي :

$$\overline{X^r} = \frac{f_1X_1^r + f_2X_2^r + \ldots + f_KX_K^r}{N} = \frac{\sum_{j=1}^{K} f_jX_j^r}{N} = \frac{\Sigma fX^r}{N} \qquad (٤)$$

$$m_r = \frac{\sum_{j=1}^{K} f_j(X_j - \bar{X})^r}{N} = \frac{\Sigma f(X - \bar{X})^r}{N} = \overline{(X - \bar{X})^r} \qquad (٥)$$

$$m_r' = \frac{\sum_{j=1}^{K} f_j(X_j - A)^r}{N} = \frac{\Sigma f(X - A)^r}{N} = \overline{(X - A)^r} \qquad (٦)$$

حيث $N = \sum_{j=1}^{K} f_j = \Sigma f$ وهذه الصيغ ملائمة لحساب العزوم من البيانات المجمعة .

العلاقة بين العزوم :

تتحقق العلاقات التالية بين العزوم حول الوسط m_r والعزوم حول نقطة أصل اختيارية m_r'

$$\left.\begin{aligned} m_2 &= m_2' - m_1'^2 \\ m_3 &= m_3' - 3m_1'm_2' + 2m_1'^3 \\ m_4 &= m_4' - 4m_1'm_3' + 6m_1'^2m_2' - 3m_1'^4 \end{aligned}\right\} \qquad (٧)$$

(أنظر المسألة ٥ - ٩) لاحظ أن $m_1' = \bar{X} - A$.

حساب العزوم للبيانات المجمعة :

طريقة الترميز التي استخدمت في حساب الوسط والانحراف المعياري والمعطاة في الفصل السابق يمكن استخدامها كطريقة مختصرة لحساب العزوم . هذه الطريقة تستخدم الحقيقة أن $X_j = A + cu_j$ (أو باختصار $X = A + cu$) بحيث نحصل باستخدام المعادلة (٦) على

$$m_r' = c^r \frac{\Sigma fu^r}{N} = c^r\overline{u^r} \qquad (٨)$$

والتي يمكن استخدامها للحصول على m_r بتطبيق المعادلة (٧) .

طريقة شارلير للمراجعة ومعامل شبرد للتصحيح :

تستخدم طريقة شارلير المراجعة عند حساب العزوم بطريقة الترميز المتطابقات الآتية :

$$\begin{cases} \Sigma f(u+1) = \Sigma fu + N \\ \Sigma f(u+1)^2 = \Sigma fu^2 + 2\Sigma fu + N \\ \Sigma f(u+1)^3 = \Sigma fu^3 + 3\Sigma fu^2 + 3\Sigma fu + N \\ \Sigma f(u+1)^4 = \Sigma fu^4 + 4\Sigma fu^3 + 6\Sigma fu^2 + 4\Sigma fu + N \end{cases} \qquad (٩)$$

معامل تصحيح شبرد للعزوم (بتعميم الأفكار بصفحة ١١٦) هو كالآتى :

(مصحح) $m_2 = m_2 - \frac{1}{12}c^2$.

(مصحح) $m_4 = m_4 - \frac{1}{2}c^2 m_2 + \frac{7}{240}c^4$

العزمان m_3 ، m_1 لايحتاجان إلى تصحيح .

العزوم فى شكل غير مميز :

حتى نتلافى وحدات معينة فإنه يمكننا تعريف العزوم فى شكل غير مميز حول الوسط الحسابى

$$a_r = \frac{m_r}{s^r} = \frac{m_r}{(\sqrt{m_2})^r} = \frac{m_r}{\sqrt{m_2^r}} \qquad (١٠)$$

حيث $s = \sqrt{m^2}$ وهو الانحراف المعيارى . بما أن $m_1 = 0$ و $m_2 = s^2$ فإن $a_1 = 0$ و $a_2 = 1$.

الالتواء :

الالتواء هو درجة تماثل أو البعد عن التماثل لتوزيع . إذا كان المنحنى التكرارى لتوزيع (المدرج التكرارى الممهد) له « ذيل » أكبر إلى يمين مركز النهاية العظمى عنه إلى يسارها يسمى التوزيع بأنه ملتو إلى اليمين أو موجب الالتواء . أما إذا كان العكس صحيحاً فيقال أنه ملتو إلى اليسار أو سالب الالتواء .

فى التوزيعات الملتوية يقع الوسط على نفس جانب المنوال وذلك على نفس جانب الطرف الأطول (أنظر الأشكال ٣ – ١ ، ٣ – ٢ الفصل الثالث) . وكقياس للتماثل نأخذ الفرق (الوسط – المنوال) . وهذا المقياس يمكن تخليصه من الوحدات بقسمته على مقياس للتشتت ، مثل الانحراف المعيارى ، مما يؤدى إلى التعريف التالى :

$$\text{الالتواء} = \frac{\text{الوسط} - \text{المنوال}}{\text{الانحراف المعيارى}} = \frac{\bar{X} - \text{mode}}{s} \qquad (١١)$$

ولتحاشى استخدام المتوال ، من الممكن استخدام الصيغة الاعتبارية (١٠) صفحة ٤٨ ونعرف

$$\text{الالتـــواء} = \frac{3\,(\text{الوســط} - \text{الوســيط})}{\text{الانحــراف المعيــارى}} = \frac{3(\bar{X} - \text{median})}{s} \qquad (١٢)$$

والمقياسان السابقان يسميان على الترتيب معامل بيرسون الأول للالتواء ومعامل بيرسون الثانى للالتواء .

وهناك مقاييس أخرى للالتواء معرفة بدلالة الربيعات والمئينات وهى كالآتى :

$$\text{معامل الالتواء الربيعى} = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} \qquad (١٣)$$

$$\text{معامل الالتواء المئينى} = \frac{(P_{90} - P_{50}) - (P_{50} - P_{10})}{P_{90} - P_{10}} = \frac{P_{90} - 2P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}} \qquad (١٤)$$

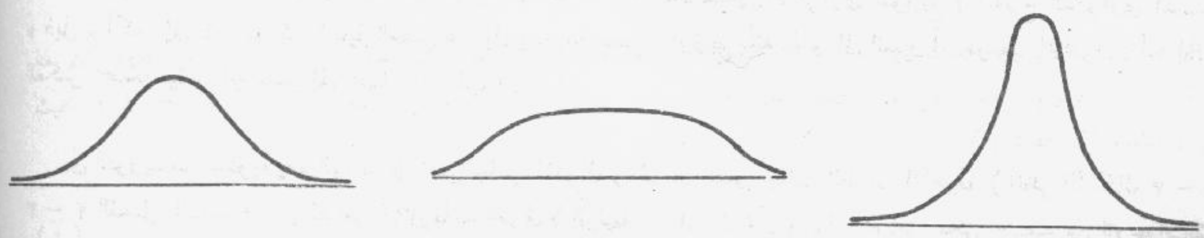
وهناك مقياس مهم آخر للالتواء باستخدام العزم الثالث حول الوسط الحسابى معبراً عنه بصيغة غير مميزة ويعرف كالآتى :

$$\text{معامل الالتواء باستخدام العزوم} = a_3 = \frac{m_3}{s^3} = \frac{m_3}{(\sqrt{m_2})^3} = \frac{m_3}{\sqrt{m_2^3}} \qquad (١٥)$$

طرق أخرى لقياس الالتواء تستخدم أحياناً a_3^2 و b_1 . للمنحنيات تامة التماثل مثل المنحنى الطبيعى تكون كلا من b_1 ، a_3 يساوى الصفر.

التفرطح :

التفرطح هو درجة تدبب قمة التوزيع ، ويؤخذ عادة بالقياس إلى التوزيع الطبيعى . التوزيع ذو القمة العالية نسبياً مثل المنحنى المعطى بالشكل ٥ – ١ (أ) يسمى منحنى مدبباً بينما المنحنى بالشكل ٥ - ١ (ب) حيث قمته مسطحة يسمى مفرطحاً . التوزيع الطبيعى المعطى ٥ – ١ (ج) حيث قمته ليست مدببة ولا مفرطحة يسمى متوسط التفرطح



(أ) مدبب (ب) مفرطح (ج) متوسط التفرطح

شكل ٥ – ١

أحد مقاييس التفرطح تستخدم العزم الرابع حول الوسط الحسابي على الصورة غير المميزة ويعرف بالآتي :

معامل التفرطح باستخدام العزوم = $a_4 = \frac{m_4}{s_4} = \frac{m_4}{m_2^2}$ (١٦)

والذي يرمز له غالباً بالرمز b_2 . وفي التوزيع الطبيعي $b_2 = a_4 = 3$. ولهذا السبب فإن التفرطح يعرف أحياناً بـ $(b_2 - 3)$ حيث يصير موجباً للتوزيع المدبب وسالباً للتوزيع المفرطح ، وصفراً للتوزيع الطبيعي .

يستخدم أيضاً مقياس آخر للتفرطح يعتمد على الربيعات والمئينات ويعطي :

$$\kappa = \frac{Q}{P_{90} - P_{10}} \qquad (١٧)$$

حيث $Q = ½ (Q_3 - Q_1)$ نصف المدى الربيعي . وسوف نشير إلى هذا المقياس بمعامل التفرطح المئيني . للتوزيع الطبيعي تكون قيمة هذا المعامل 0.263 . (انظر المسألة ٥ – ١٤) .

عزوم ، التواء وتفرطح المجتمع :

عندما يكون من المطلوب التفرقة بين عزوم ومقاييس الالتواء والتفرطح لعينة من تلك التي تقابلها في المجتمع الذي سحبت منه هذه العينة ، فإنه من المعتاد استخدام الرموز اللاتينية للأولى والرموز اليونانية للأخيرة . فإذا كانت عزوم العينة يرمز لها بالرموز m_r ، m_r' فإن الرموز اليونانية المقابلة هي μ_r' ، μ_r ، (μ هو الحرف اليوناني « ميو ») . أما الدليل فتستخدم دائماً الحروف اللاتينية . كذلك فإنه إذا كانت مقاييس الالتواء والتفرطح للعينة يرمز لها بالرموز a_4 و a_3 على الترتيب ؛ فإن التواء وتفرطح المجتمع يرمز له بالرموز α_4 ، α_3 (هو الحرف اليوناني « ألفا »)

وقد سبق أن ذكرنا أن الانحراف المعياري للعينة وللمجتمع يرمز لها بالرموز σ ، s على الترتيب .

مسائل محلولة :

العـــزوم :

٥ – ١ أوجد العزم (أ) الأول (ب) الثاني (جـ) الثالث (د) الرابع . لمجموعة الأرقام 10 ، 8 ، 7 ، 3 ، 2

الحـــل :

(أ) العزم الأول أو الوسط الحسابي $\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{2+3+7+8+10}{5} = \frac{30}{5} \quad 6$

(ب) العزم الثاني $\overline{X^2} = \frac{\Sigma X^2}{N} = \frac{2^2+3^2+7^2+8^2+10^2}{5} \quad \frac{226}{5} \quad 45.2$

(جـ) العزم الثالث $\overline{X^3} = \frac{\Sigma X^3}{N} = \frac{2^3+3^3+7^3+8^3+10^3}{5} \quad \frac{1890}{5} \quad 378$

(د) العزم الرابع $\overline{X^4} \quad \frac{\Sigma X^4}{N} = \frac{2^4+3^4+7^4+8^4+10^4}{5} = \frac{16\,594}{5} \quad 3318.8$

٥ – ٢ أوجد العزم (أ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع حول الوسط الحسابى لمجموعة الأرقام بالمسألة ٥ – ١

الحـــل :

(أ) $m_1 = \overline{(X - \bar{X})} = \dfrac{\Sigma (X - \bar{X})}{N} = \dfrac{(2 - 6) + (3 - 6) + (7 - 6) + (8 - 6) + (10 - 6)}{5} = \dfrac{0}{5} = 0$

m_1 دائماً تساوى صفراً نظراً لأن $\overline{X - \bar{X}} = \bar{X} - \bar{X} = 0$. (أنظر المسألة ٣ – ١٦ ، الفصل الثالث) .

(ب) $m_2 = \overline{(X - \bar{X})^2} = \dfrac{\Sigma (X - \bar{X})^2}{N} = \dfrac{(2 - 6)^2 + (3 - 6)^2 + (7 - 6)^2 + (8 - 6)^2 + (10 - 6)^2}{5} = \dfrac{46}{5} = 9{\cdot}2$

لاحظ أن m_2 هو التباين s^2 .

(جـ) $m_3 = \overline{(X - \bar{X})^3} = \dfrac{\Sigma (X - \bar{X})^3}{N} = \dfrac{(2 - 6)^3 + (3 - 6)^3 + (7 - 6)^3 + (8 - 6)^3 + (10 - 6)^3}{5} = \dfrac{-18}{5} = -3{\cdot}6$

(د) $m_4 = \overline{(X - \bar{X})^4} = \dfrac{\Sigma (X - \bar{X})^4}{N} = \dfrac{(2 - 6)^4 + (3 - 6)^4 + (7 - 6)^4 + (8 - 6)^4 + (10 - 6)^4}{5} = \dfrac{610}{5} = 122$

٥ – ٣ أوجد العزم (أ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع

حول النقطة 4 لمجموعة الأرقام بالمسألة ٥ – ١

الحـــل :

(أ) (a) $m_1' = \overline{(X - 4)} = \dfrac{\Sigma (X - 4)}{N} = \dfrac{(2 - 4) + (3 - 4) + (7 - 4) + (8 - 4) + (10 - 4)}{5} = 2$

(ب) $m_2' = \overline{(X - 4)^2} = \dfrac{\Sigma (X - 4)^2}{N} = \dfrac{(2 - 4)^2 + (3 - 4)^2 + (7 - 4)^2 + (8 - 4)^2 + (10 - 4)^2}{5} = \dfrac{66}{5} = 13{\cdot}2$

(جـ) $m_3' = \overline{(X - 4)^3} = \dfrac{\Sigma (X - 4)^3}{N} = \dfrac{(2 - 4)^3 + (3 - 4)^3 + (7 - 4)^3 + (8 - 4)^3 + (10 - 4)^3}{5} = \dfrac{298}{5} = 59{\cdot}6$

(د) $m_4' = \overline{(X - 4)^4} = \dfrac{\Sigma (X - 4)^4}{N} = \dfrac{(2 - 4)^4 + (3 - 4)^4 + (7 - 4)^4 + (8 - 4)^4 + (10 - 4)^4}{5} = \dfrac{1650}{5} = 330$

٥ – ٤ باستخدام نتائج المسائل ٥ – ٢ ، ٥ – ٣ ، حقق العلاقة بين العزوم

(أ) $m_2 = m_2' - m_1'^2$ (ب) $m_3 = m_3' - 3m_1'm_2' + 2m_1'^3$ (جـ) $m_4 = m_4' - 4m_1'm_3' + 6m_1'^2m_2' - 3m_1'^4$.

الحـــل :

من المسألة ٥ – ٣ : $m_1' = 2,\ m_2' = 13{\cdot}2,\ m_3' = 59{\cdot}6,\ m_4' = 330$: 5.3 إذن

(أ) $m_2 = m_2' - m_1'^2 = 13{\cdot}2 - (2)^2 = 13{\cdot}2 - 4 = 9{\cdot}2$

(ب) $m_3 = m_3' - 3m_1' m_2' + 2m_1'^3 = 59{\cdot}5 - 3(2)(13{\cdot}2) \mp 2(2)^3 = 59{\cdot}6 - 79{\cdot}2 + 16 = -3{\cdot}6$

(جـ) $m_4 = m'_4 - 4m_1' m_3' + 6m_1'^2 m_2' - 3m_1'^4 = 330 - 4(2)(59{\cdot}6) + 6(2)^2(13{\cdot}2) - 3(2)^4 = 122$

تتفق مع نتائج المسألة ٥ – ٢ .

٥ – ٥ أثبت أن (أ) $m_2 = m_2' - m_1'^2$ (ب) $m_3 = m_3' - 3m_1' m_2' + 2m_1'^3$

(جـ) $m_4 = m_4' - 4m_1' m_3' + 6m_1'^2 m_2' - 3m_1'^4$

الحـــل :

(أ) إذا كانت $\bar{d} = X - A$ ، فإن $\bar{X} = A + d$ ؛ $\bar{X} = A + d$ و $X - \bar{X} = d - \bar{d}$

$$m_2 = \overline{(X-\bar{X})^2} = \overline{(d-\bar{d})^2} = \overline{d^2 - 2\bar{d}d + \bar{d}^2}$$
$$= \overline{d^2} - 2\bar{d}^2 + \bar{d}^2 = \overline{d^2} - \bar{d}^2 = m_2' - m_1'^2$$

(ب)
$$m_3 = \overline{(X-\bar{X})^3} = \overline{(d-\bar{d})^3} = \overline{(d^3 - 3d^2\bar{d} + 3d\bar{d}^2 - \bar{d}^3)}$$
$$= \overline{d^3} - 3\bar{d}\overline{d^2} + 3\bar{d}^3 - \bar{d}^3 = \overline{d^3} - 3\bar{d}\overline{d^2} + 2\bar{d}^3 = m_3' - 3m_1' m_2' + 2m_1'^3$$

(جـ)
$$m_4 = \overline{(X-\bar{X})^4} = \overline{(d-\bar{d})^4} = \overline{(d^4 - 4d^3\bar{d} + 6d^2\bar{d}^2 - 4d\bar{d}^3 + \bar{d}^4)}$$
$$= \overline{d^4} - 4\bar{d}\overline{d^3} + 6\bar{d}^2\overline{d^2} - 4\bar{d}^4 + \bar{d}^4 = \overline{d^4} - 4\bar{d}\overline{d^3} + 6\bar{d}^2\overline{d^2} - 3\bar{d}^4$$
$$= m_4' - 4m_1' m_3' + 6m_1'^2 m_2' - 3m_1'^4$$

حساب العزوم من البيانات المجمعة :

٥ – ٦ أوجد العزوم الأربعة الأولى حول الوسط لتوزيع الأوزان فى المسألة ٣ – ٢٢ ؛ الفصل الثالث .

جدول ٥ – ١

X	u	f	fu	fu^2	fu^3	fu^4
61	−2	5	−10	20	−40	80
64	−1	18	−18	18	−18	18
67	0	42	0	0	0	0
70	1	27	27	27	27	27
73	2	8	16	32	64	128
		$N = \Sigma f = 100$	$\Sigma fu = 15$	$\Sigma fu^2 = 97$	$\Sigma fu^3 = 33$	$\Sigma fu^4 = 253$

إذن

$$m_1' = c\frac{\Sigma fu}{N} = (3)\left(\frac{15}{100}\right) = 0{\cdot}45 \qquad m_3' = c^3\frac{\Sigma fu^3}{N} = (3)^3\left(\frac{33}{100}\right) = 8{\cdot}91$$

$$m_2' = c^2\frac{\Sigma fu^2}{N} = (3)^2\left(\frac{97}{100}\right) = 8{\cdot}73 \qquad m_4' = c^4\frac{\Sigma fu^4}{N} = (3)^4\left(\frac{253}{100}\right) = 204{\cdot}93$$

بحيث

$$m_1 = 0$$
$$m_2 = m_2' - m_1'^2 = 8{\cdot}73 - (0{\cdot}45)^2 = 8{\cdot}5275$$
$$m_3 = m_3' - 3m_1'\, m_2' + 2m_1'^3 = 8{\cdot}91 - 3(0{\cdot}45)(8{\cdot}73) + 2(0{\cdot}45)^3 = 2{\cdot}6932$$
$$m_4 = m_4' - 4m_1'\, m_3' + 6m_1'^2\, m_2' - 3m_1'^4$$
$$= 204{\cdot}93 - 4(0{\cdot}45)(8{\cdot}91) + 6(0{\cdot}45)^2(8{\cdot}73) - 3(0{\cdot}45)^4 = 199{\cdot}3759$$

٥ – ٧ أوجد (أ) m_1' (ب) m_2' (جـ) m_3' (د) m_4' (هـ) m_1 (و) m_2 (ز) m_3 (ح) m_4 (ط) $\bar{X}$ (ى) s (ك) $\overline{X^2}$ (ل) $\overline{X^3}$ التوزيع بالمسألة ٤ – ١٩ ، الفصل الرابع .

الحـــل :

جدول ٥ – ٢

X	u	f	fu	fu^2	fu^3	fu^4
70	−6	4	−24	144	−864	5184
74	−5	9	−45	225	−1125	5625
78	−4	16	−64	256	−1024	4096
82	−3	28	−84	252	−756	2268
86	−2	45	−90	180	−360	720
90	−1	66	−66	66	−66	66
$A \rightarrow$ 94	0	85	0	0	0	0
98	1	72	72	72	72	72
102	2	54	108	216	432	864
106	3	38	114	342	1026	3078
110	4	27	108	432	1728	6912
114	5	18	90	450	2250	11 250
118	6	11	66	396	2376	14 256
122	7	5	35	245	1715	12 005
126	8	2	16	128	1024	8192
		$N = \Sigma f = 480$	$\Sigma fu = 236$	$\Sigma fu^2 = 3404$	$\Sigma fu^3 = 6428$	$\Sigma fu^4 = 74\,588$

(أ) $m_1' = c\dfrac{\Sigma fu}{N} = (4)\left(\dfrac{236}{480}\right) = 1{\cdot}9667$

(ب) $m_2' = c^2\,\dfrac{\Sigma fu^2}{N} = (4)^2\left(\dfrac{3404}{480}\right) = 113{\cdot}4667$

(جـ) $m_3' = c^3\dfrac{\Sigma fu^3}{N} = (4)^3\left(\dfrac{6428}{480}\right) = 857{\cdot}0667$

(د) $m_4' = c^4\dfrac{\Sigma fu^4}{N} = (4)^4\left(\dfrac{74588}{480}\right) = 39\,780{\cdot}2667$

(هـ) $m_1 = 0$

(و) $m_2 = m_2' - m_1'^2 = 113{\cdot}4667 - (1{\cdot}9667)^2 = 109{\cdot}5988$

(ز) $m_3 = m_3' - 3m_1'\, m_2' + 2m_1'^3 = 857{\cdot}0667 - 3(1{\cdot}9667)(113{\cdot}4667) + 2(1{\cdot}9667)^3 = 202{\cdot}8158$

(ح) $m_4 = m_4' - 4m_1'\, m_3' + 6m_1'^2\, m_2' - 3m_1'^4 = 35\,627{\cdot}2853$

(ط) $\bar{X} = \overline{(A + d)} = A + m_1' = A + c\dfrac{\Sigma fu}{N} = 94 + 1{\cdot}9667 = 95{\cdot}97$

(ى) $s = \sqrt{m_2} = \sqrt{109{\cdot}5988} = 10{\cdot}47$

(ك) $\overline{X^2} = \overline{(A+d)^2} = \overline{(A^2 + 2Ad + d^2)} = A^2 + 2A\bar{d} + \overline{d^2} = A^2 + 2Am_1' + m_2'$

$= (94)^2 + 2(94)(1{\cdot}9667) + 113{\cdot}4667 = 9319{\cdot}2063, \text{ or } 9319$

(ل) $\overline{X^3} = \overline{(A+d)^3} = \overline{(A^3 + 3A^2d + 3Ad^2 + d^3)} = A^3 + 3A^2\bar{d} + 3A\overline{d^2} + \overline{d^3}$ = $A^3 + 3A^2m_1' + 3Am_2' + m_3' = 915\,571{\cdot}9597, \text{ or } 915\,600$ إلى أربعة أرقام معنوية

طريقة شارلير للمراجعة :

٥ – ٨ وضح كيفية استخدام طريقة شارلير للمراجعة للحسابات بالمسألة ٥ – ٧

الحــل :

للحصول على المراجعة المطلوبة فإننا نضيف الأعمدة التالية إلى تلك التي بالمسألة ٥ – ٧ باستثناء العمود الثانى حيث كرر هنا للتسهيل .

جدول ٥–٣

$u+1$	f	$f(u+1)$	$f(u+1)^2$	$f(u+1)^3$	$f(u+1)^4$
−5	4	−20	100	−500	2500
−4	9	−36	144	−576	2304
−3	16	−48	144	−432	1296
−2	28	−56	112	−224	448
−1	45	−45	45	−45	45
0	66	0	0	0	0
1	85	85	85	85	85
2	72	144	288	576	1152
3	54	162	486	1458	4374
4	38	152	608	2432	9728
5	27	135	675	3375	16 875
6	18	108	648	3888	23 328
7	11	77	539	3773	26 411
8	5	40	320	2560	20 480
9	2	18	162	1458	13 122
	$N = \Sigma f = 480$	$\Sigma f(u - 1) = 716$	$\Sigma f(u+1)^2 = 4356$	$\Sigma f(u+1)^3 = 17\,828$	$\Sigma f(u+1)^4 = 122\,148$

فى كل من المجموعات التالية أخذ الصف الأول من الجدول ٥–٣ والثانى من الجدول ٥–٢ بالمسألة ٥–٧ . تساوى النتـائج يعطى المراجعة المطلوبة .

$$\begin{cases} \Sigma f(u+1) = 716 \\ \Sigma fu + N = 236 + 480 = 716 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma f(u+1)^2 = 4356 \\ \Sigma fu^2 + 2\Sigma fu + N = 3404 + 2(236) + 480 = 4356 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma f(u+1)^3 = 17\,828 \\ \Sigma fu^3 + 3\Sigma fu^2 + 3\Sigma fu + N = 6428 + 3(3404) + 3(236) + 480 = 17\,828 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma f(u+1)^4 = 122\,148 \\ \Sigma fu^4 + 4\Sigma fu^3 + 6\Sigma fu^2 + 4\Sigma fu + N = 74\,588 + 4(6428) + 6(3404) + 4(236) + 480 = 122\,148 \end{cases}$$

تصحيح شبرد للعزوم :

٥ – ٩ طبق تصحيح شبرد لإيجاد العزوم حول الوسط للبيانات فى (ا) المسألة ٥–٦ (ب) المسألة ٥–٧ .

الحـــل :

(ا)

m_2 (المصحح) $= \; = m_2 - c^2/12 = 8{\cdot}5275 - 3^2/12 = 7{\cdot}7775$

$= m_4 - \frac{1}{2}c^2m_2 + \frac{7}{240}c^4$

$199{\cdot}3759 - \frac{1}{2}(3)^2(8{\cdot}5275) + \frac{7}{240}(3)^4$

m_4 (المصحح) $= \; 163{\cdot}3646$

لايحتاجان إلى تصحيح .

(ب)

m_2 (المصحح) $= \; = m_2 - c^2/12 = 109{\cdot}5988 - 4^2/12 = 108{\cdot}2655$

$= m_4 \quad \frac{1}{2}c^2m_2 - \frac{7}{240}c^4$

$= 35\,627{\cdot}2853 - \frac{1}{2}(4)^2(109{\cdot}5988) + \frac{7}{240}(4)^4$

m_4 (المصحح) $= \; = 34\,757{\cdot}9616$

الالتـــواء :

٥–١٠ أوجد معامل التواء بيرسون (ا) الأول (ب) الثانى لاجور الـ 65 عاملا فى شركة P and R . أنظر المسألة ٣–٤٤ ، الفصل الثالث والمسألة ٤–١٨ ، الفصل الرابع .

الحـــل :

الوسط £ 79.76 ، الوسيط = £ 79.06 ، الانحراف المعيارى = s = £ 15.60

(ا) المعامل الأول للتفرطح = $\dfrac{\text{الوسيط – المنوال}}{\text{د}}$ = $\dfrac{£79{\cdot}76 - £77{\cdot}50}{£15{\cdot}60} = 0{\cdot}1448$, or $0{\cdot}14$.

(ب) المعامل الثانى للتفرطح = $\dfrac{3\,(\text{الوسط – الوسيط})}{s}$ = $\dfrac{3(£79{\cdot}76 - £79{\cdot}06)}{£15{\cdot}60} = 0{\cdot}1346$, or $0{\cdot}13$.

إذا استخدمنا الانحراف المعيارى المصحح (أنظر المسألة ٤–٢١ (ا) ، الفصل الرابع) فإن هذه المعاملات تصبح ، على الترتيب ،

$$\text{(ا)} \quad \frac{\text{الوسط} - \text{المنوال}}{s\ (\text{المصحح})} = \frac{£79{\cdot}76 - £77{\cdot}50}{£15{\cdot}33} = 0{\cdot}1474 \text{ or } 0{\cdot}15$$

$$\text{(ب)} \quad \frac{3\ (\text{الوسط} - \text{الوسيط})}{s\ (\text{المصحح})} = \frac{3(£79{\cdot}76 - £79{\cdot}06)}{£15{\cdot}33} = 0{\cdot}1370, \text{ or } 0{\cdot}14$$

بما أن المعاملات موجبة فإن التوزيع ملتو التواء موجب ، بمعنى ، ملتو إلى اليمين .

٥–١١ أوجد (ا) معامل الالتواء الربيعى (ب) معامل الالتواء المئينى لتوزيع المسألة ٥–١٠ (أنظر المسألة ٣–٤٤ ، الفصل الثالث) .

الحـل :

$$Q_1 = £68{\cdot}25,\ Q_2 = P_{50} = £79{\cdot}06,\ Q_3 = £90{\cdot}75,\ P_{10} = D_1 = £58{\cdot}12,\ P_{90} = D_9 = £101{\cdot}00$$

$$\text{(ا) معامل الالتواء الربيعى} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \frac{£90{\cdot}75 - 2(£79{\cdot}06) + £68{\cdot}25}{£90{\cdot}75 - £68{\cdot}25} = 0{\cdot}0391$$

$$\text{(ب) معامل الالتواء المئينى} = \frac{P_{90} - 2P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}} = \frac{£101{\cdot}00 - 2(£79{\cdot}06) + £58{\cdot}12}{£101{\cdot}00 - £58{\cdot}12} = 0{\cdot}0233$$

٥–١٢ أوجد معامل الالتواء باستخدام العزوم a_3 ، لكل من (ا) توزيع أوزان الطلبة فى جامعة XYZ (أنظر المسألة ٥–٦) .

(ب) نسب الذكاء .I.Q لطلبة المدرسة الابتدائية (المسألة ٥–٧)

الحـل :

(ا)

$$m_2 = s^2 = 8{\cdot}5275,\ m_3 = -2{\cdot}6932.$$

إذن

$$a_3 = \frac{m_3}{s^3} = \frac{m_3}{(\sqrt{m_2})^3} = \frac{-2{\cdot}6932}{(\sqrt{8{\cdot}5275})^3} = 0{\cdot}1413, \text{ or } -0{\cdot}14.$$

إذا استخدم تصحيح شبر د للبيانات المجمعة (أنظر المسألة ٥–٩ (ا)) إذن

$$a_3\ (\text{المصحح}) = \frac{m_3}{(\sqrt{\text{corrected } m_2})^3} = \frac{-2{\cdot}6932}{(\sqrt{7{\cdot}7775})^3} = -0{\cdot}1242 \text{ or } -0{\cdot}12$$

(ب)
$$a_3 = \frac{m_3}{s^3} = \frac{m_3}{(\sqrt{m_2})^3} = \frac{202.8158}{(\sqrt{109.5988})^3} = 0.1768, \text{ or } 0.18$$

إذا استخدم تصحيح شبرد للبيانات المجمعة (أنظر المسألة ٥–٩ (١)) فإن

$$a_3\ (\text{المصحح}) = \frac{m_3}{(\sqrt{\text{corrected } m_2})^3} = \frac{202.8158}{(\sqrt{108.2655})^3} = 0.1800, \text{ or } 0.18$$

لاحظ أن كلا التوزيعين ملتو التواء بسيطا ، (١) إلى اليسار (سالب) ، (ب) إلى اليمين (موجب)

التوزيع (ب) أكثر التواء من (١) . بمعنى أن (١) أكثر تماثلا من (ب) ويدلل على ذلك الحقيقة أن القيمة الرقية أو القيمة المطلقة لمعامل الالتواء في (ب) أكثر منها في (١) .

التفرطح :

٥–١٣ أوجد معامل التفرطح باستخدام العزوم ، a_4 ، لبيانات (١) المسألة ٥–٦ (ب) لمسألة ٥–٧ .

الحــل :

(١)
$$a_4 = \frac{m_4}{s^4} = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{199.3759}{(8.5275)^2} = 2.7418, \text{ or } 2.74$$

إذا أستخدم تصحيح شبرد (أنظر المسألة ٥–٩ (١)) ، فإن

$$a_4\ (\text{المصحح}) = \frac{m_4\ (\text{المصحح})}{(a_4\ (\text{المصحح}))^2} = \frac{163.3646}{(7.7775)^2} = 2.7007, \text{ or } 2.70$$

(ب)
$$a_4 = \frac{m_4}{s_4} = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{35\,627.2853}{(109.5988)^2} = 2.9660, \text{ or } 2.97$$

إذا استخدم تصحيح شبرد (أنظر المسألة ٥–٩ (ب)) ، فإن

$$a_4\ (\text{المصحح}) = \frac{m_4\ (\text{المصحح})}{(m_2\ (\text{المصحح}))^2} = \frac{34\,757.9616}{(108.2655)^2} = 2.9653, \text{ or } 2.97$$

وبما أنه في التوزيع الطبيعي $a_4 = 3$ ، ينتج عن ذلك أن كلا التوزيعين (١) ، (ب) مفرطحان وذلك بالمقارنة بالتوزيع الطبيعي (بمعنى أنه أقل تدببا من التوزيع الطبيعي) .

إذا أخذنا خاصية التدبب فإن التوزيع (ب) يقرب بالتوزيع الطبيعي أكثر من التوزيع (١) ولكن ، من المسألة ٥–١٢ التوزيع (١) أكثر تماثلا من (ب) بحيث إذا أخذنا صفة التماثل فإن (١) يقرب بالتوزيع أكثر من (ب) .

٥–١٤ (أ) احسب معامل التفرطح المئينى $\kappa = Q/(P_{90} - P_{10})$. لتوزيع المسألة ٥–١١ .

(ب) ما مدى قربه من التوزيع الطبيعى ؟

الحـــل :

(أ) $Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2}(£90{\cdot}75 - £68{\cdot}25) = £11{\cdot}25,\ P_{90} - P_{10} = £101{\cdot}00 - £58{\cdot}12 = £42{\cdot}88$

إذن $\kappa = Q/(P_{90} - P_{10}) = 0{\cdot}262$

(ب) بما أن κ للتوزيع الطبيعى هـــو 0.263 ، ينتج عن ذلك أن التوزيع المعطى متوسط التفرطح (بمعنى أن تحدبه يقترب من التوزيع الطبيعى) . أى أن تفرطح التوزيع يماثل تقريبا تفلطح التوزيع الطبيعى مما يؤدى إلى الاعتقاد بأنه يمكن تقريبه بشكل جيد باستخدام التوزيع الطبيعى إذا أخذنا فى الاعتبار تفرطحه .

مســـائل اضافية

العزوم :

٥–١٥ أوجد العزم (أ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع لمجموعة الأرقام 6 ,3 ,8 ,9 ,5 ,7 ,4

ج : (أ) 6 (ب) 40 (جـ) 288 (د) 2188

٥–١٦ أوجد العزم (أ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع

حول الوسط لمجموعة الأرقام بالمسألة ٥–١٥ .

ج : (أ) 0 (ب) 4 (جـ) 0 (د) 25.86

٥–١٧ أوجد العزم (أ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع

حول الرقم 7 لمجموعة الأرقام بالمسألة ٥–١٥ .

ج : (أ) 1— (ب) 5 (جـ) 91— (د) 53

٥–١٨ باستخدام نتائج المسألة ٥–١٦ ، ٥–١٧ ، أثبت العلاقات بين العزوم

(أ) $m_2 = m_2' - m_1'^2$ (ب) $m_3 = m_3' - 3m_1'm_2' + 2m_1'^3$

(جـ) $m_4 = m_4' - 4m_1'm_3' + 6m_1'^2 m_2' - 3m_1'^4$

٥-١٩ أوجد العزوم الأربعة حول الوسط لمجموعة أرقام المتوالية الحسابية $2, 5, 8, 11, 14, 17$.

ج : $0, 26.25, 0, 1193.1$

٥-٢٠ أثبت أن (ا) $m_2' = m_2 + h^2$ (ب) $m_3' = m_3 + 3hm_2 + h_3$, (جـ) $m_4' = m_4 + 4hm_3 + 6h^2m_2 + h^4$,

حيث $h = m_1'$

٥-٢١ إذا كان العزم الأول حول الرقم 2 هـــو 5 ، فما هو الوسط ؟

ج : 7

٥-٢٢ إذا كانت العزوم الأربعة الأولى حول الرقم 3 تساوى $-2, 10, -25, 50$

أوجـد العزوم المقابلة (ا) حول الوسط (ب) حول الرقم 5 (جـ) حول الصفر .

(ج) (ا) $0, 6. 19, 42$ (ب) $-4, 22, -117, 560$ (جـ) $1, 7, 38, 74$

٥-٢٣ أوجد العزوم الأربعة الأولى حول الوسط للأرقام $0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1.$

ج : $0, 0{\cdot}2344, 0{\cdot}0586, 0{\cdot}0696$

٥-٢٤ (ا) أثبت أن $m_5 = m_5' - 5m_1'm_4' + 10m_1'^2m_3' - 10m_1'^3m_2' + 4m_1'^5$ (ب) أوجد صيغة مماثلة لـ m_6

٥-٢٥ من مجموع N عدد ، الكسر p يعبر عن الأرقام التى تأخذ القيمة واحد والكسر $q = 1 - p$ يعبر عن الأرقام التى تأخذ القيمة صفر . أوجـــد

(ا) m_1 (ب) m_2 (جـ) m_3 (د) m_4 لمجموعة الأرقام . قارن بالمسألة ٥-٢٣ .

ج : (ا) $m_1 = 0$ (ب) $m_2 = pq$ (جـ) $pq(q - p)$ (د) $dq(p^2 - pq + q^2)$

٥-٢٦ أثبت أن العزوم الأربعة الأولى حول الوسط فى المتوالية العددية $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n - 1)d$ هى

$$m_1 = 0, m_2 = \tfrac{1}{12}(n^2 - 1)d^2, m_3 = 0, m_4 = \tfrac{1}{240}(n^2 - 1)(3n^2 - 7)d^4$$

قارن بالمسألة ٥-١٩ . أنظر أيضا المسألة ٤-٦٩ ، الفصل الرابع

ملحوظة : $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + (n - 1)^4 = \tfrac{1}{30}n(n - 1)(2n - 1)(3n^2 - 3n - 1).$]

العزوم من البيانات المجمعة :

X	f
12	1
14	4
16	6
18	10
20	7
22	2
المجموع	30

جدول ٥–٤

٥–٢٧ احسب العزوم الأربعة الأولى حول الوسط للتوزيع بالجدول ٥–٤

ج : $m_1 = 0, m_2 = 5{\cdot}97, m_3 = -0{\cdot}397, m_4 = 89{\cdot}22$

٥–٢٨ وضح كيفية استخدام طريقة شارلير للمراجعة عند أجراء الحسابات بالمسألة ٥–٢٧

٥–٢٩ طبق معامل تصحيح شبرد للعزوم التى حصلت عليها بالمسألة ٥–٢٧ .

ج : m_1 (مصحح) $= 0$ ، m_2 (مصحح) $= 5.440$ ، m_3 (مصحح) $= -0.5920$

و m_4 (مصحح) $= 76.2332$

٥–٣٠ أوجد العزوم الأربعة الأولى حول الوسط للتوزيع بالمسألة ٣–٥٩ بالفصل الثالث .

(أ) بدون تصحيح شبرد (ب) باستخدام تصحيح شبرد .

ج : (أ) $m_1 = 0, m_2 = 53{\cdot}743, m_3 = 61{\cdot}853, m_4' = 8491{\cdot}4$

(ب) m_2 (مصحح) $= 51.660$ ، m_4 (مصحح) $= 7837.8$

٥–٣١ أوجد (أ) m_1 (ب) m_2 (جـ) m_3 (د) m_4

(هـ) $\bar{X}$ (و) s (ز) $\overline{X^2}$ (ح) $\overline{X^3}$ (ط) $\overline{X^4}$ (ى) $\overline{(X+1)^3}$

لتوزيع المسألة ٣–٦٢ ، الفصل الثالث .

(أ) 0 (ب) 52.95 (جـ) 92.35 (د) 7158.20 (هـ) 26.2 (و) 7.28 (ز) 739.58

(ح) 22247 (ط) 706 428 (ى) 24 545

الالتواء :

٥–٣٢ أوجد معامل الالتواء باستخدام العزوم ، a_3 ، لتوزيع المسألة ٥–٢٧

(أ) بدون استخدام تصحيح شبرد (ب) باستخدام تصحيح شبرد

ج : (أ) -0.2464 (ب) -0.2464

٥–٣٣ أوجد معامل الالتواء باستخدام العزوم ، a_3 ، لتوزيع المسألة ٣ – ٥٩ ، الفصل الثالث . أنظر المسألة ٥–٣٠ .

ج : 0.1570

٥-٣٤ العزم الثانى حول الوسط لتوزيعين هو 16,9 بينما العزم الثالث حول الوسط لهما هو 12.8 — ، 8.1 — على الترتيب . أى التوزيعين أكثر التواء إلى اليسار ؟

ج : التوزيع الأول .

٥-٣٥ أوجد معامل التواء بيرسون (أ) الأول (ب) الثانى . لتوزيع المسألة ٣-٥٩ ، الفصل الثالث عدد الفروق .

ج : (أ) 0.040 (ب) 0.074

٥-٣٦ أوجد (أ) معامل الالتواء الربيعى (ب) معامل الالتواء المئينى لتوزيع المسألة ٣-٥٩ ، الفصل الثالث ، قارن النتيجة بنتيجة المسألة ٥-٣٥ واشرح .

(أ) 0.02— (ب) 0.13—

٥-٣٧ (أ) وضح السبب فى أن معامل بيرسون للالتواء غير مناسب لتوزيع المسألة ٢-٣١ الفصل الثانى :

(ب) أوجد معامل الالتواء الربيعى لهذا التوزيع وفسر النتيجة .

ج : (ب) 0.078—

التفــرطح :

٥-٣٨ أوجد معامل التفرطح باستخدام العزوم a_4 ، لتوزيع المسألة ٥-٢٧

(أ) بدون استخدام تصحيح شبرد . (ب) باستخدام تصحيح شبرد

ج : (أ) 2.62 (ب) 2.58

٥-٣٩ أوجد معامل التفرطح باستخدام العزوم لتوزيع المسألة ٣-٩٤ ، الفصل الثالث .

(أ) بدون استخدام تصحيح شبرد (ب) باستخدام تصحيح شبرد . (أنظر المسألة ٥-٣٠) .

ج : (أ) 2.94 (ب) 2.94

٥-٤٠ العزم الرابع حول الوسط لكلا من التوزيعين بالمسألة ٥-٣٤ هما 780 ، 230 على الترتيب . أى التوزيعين أكثر تقريبا للتوزيع المعتدل لو نظرنا إلى

(أ) تدبب القمــة (ب) الالتـــواء

ج : (أ) الثانى (ب) الأول

٥-٤١ أى من التوزيعات بالمسألة ٥-٤٠ (أ) مدبب (ب) متوسط التفرطح (ج) مفرطح ؟

ج : (أ) الثانى (ب) ليس أى منهما (ج) الأول .

٥-٤٢ الانحراف المعيارى لتوزيع متماثل هــو 5 . ماذا يجب أن يكون عليه العزم الرابع حول الوسط بحيث يكون التوزيع (أ) مدبب (ب) متوسط التفرطح (ج) مفرطح ؟

ج : (أ) أكبر من 1875 (ب) يساوى 1875 (ج) أقل من 1875

٥-٤٣ (أ) احسب معامل التفرطح المئينى ، K لتوزيع المسألة ٣-٥٩ الفصل الثالث .

(ب) قارن نتيجتك بالنتيجة النظرية 0.263 للتوزيع الطبيعى وفسر ذلك .

(ج) كيف يمكن التوفيق بين هذه النتيجة بتلك التى حصلت عليها من المسألة ٥-٣٩

ج : (أ) 0.313

الفصل السادس

اساسيات نظرية الاحتمالات

التعريف التقليدى للاحتمالات :

افترض أن الحدث E يمكن أن يحدث بـ h طريقة وكانت n عدد جميع الحالات الممكنة والتى لها نفس الفرصة فى الحدوث وبهذا فإن احتمال حدوث الحدث (يسمى نجاحه) يرمز له بالرمز .

$$p = \Pr\{E\} = \frac{h}{n}$$

واحتمال عدم حدوث الحدث (يسمى فشله) يرمز له بالرمز .

$$q = \Pr\{\text{not } E\} = \frac{n-h}{n} = 1 - \frac{h}{n} = 1 - p = 1 - \Pr\{E\}$$

وبهذا فإن $p+q=1$ أو $\Pr\{E\} + \Pr\{\text{not } E\} = 1$

والحدث "not E" يرمز له أحياناً بالرمز $\bar{E}, \tilde{E}$ أو $\sim E$

مثـــال :

E تمثل الحدث ظهور الأرقام 3 أو 4 فى رمية زهرة طاولة مرة واحدة .

هناك ست طرق ممكنة لوقوع الزهر ينتج عنها ظهور الأرقام 1, 2, 3, 4, 5, 6 .

وإذا كانت الزهرة غير متميزة (بمعنى أنها غير مثقلة بالرصاص بحيث تقع على عدد معين عند القائها – غير مغشوشة) . فإننا يمكن أن نفترض أن هذه الطرق الست متساوية الحدوث . وبما أن E يمكن أن تحدث فى مرتين من هذه الطرق فإن $p = \Pr\{E\} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

احتمال عدم الحصول على 3 أو 4 (بمعنى ، الحصول على 1, 2, 5, 6) هو

$$q = \Pr\{\bar{E}\} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

لاحظ أن احتمال حدث هو رقم بين 1 ,0 . إذا كان وقوع الحدث مستحيلا ، فإن احتماله هو 0 . إذا كان الحدث لابد أن يقع ، بمعنى أن وقوعه مؤكد ، فإن احتماله هو 1 . إذا كان احتمال حدوث حدث هو p ، فإن الترجيح فى صالح حدوثه هو $p : q$. (وتقرأ « p إلى q ») ، والترجيح فى صالح عدم حدوثه هو $q : p$. بهذا فإن الترجيح فى صالح عدم ظهور 3 أو 4 فى رمية واحدة لزهرة طاولة غير متحيزة هو

$$q : p = {}^2/_3 : {}^1/_3 = 2:1$$ بمعنى 2 إلى 1

تعريف الاحتمال كتكرار نسبى :

يعيب التعريف السابق للاحتمال أن كلمة « له نفس الفرصة فى الحدوث » كلمة غامضة . وفى الواقع فإن هذه الكلمة تبدو أنها مرادفة لكلمة « متساوية الأحتمال » ، وبهذا فإن التعريف دائرى حيث نعرف الاحتمال بدلالة نفسه . ولهذا السبب فإن البعض ، يستخدم تعريفاً إحصائياً للاحتمال . وطبقاً لهذا فإن الاحتمال المقدر ، أو الاحتمال الاعتبارى . لحدث يؤخذ على أنه التكرار النسبى لحدوث هذا الحدث عندما تكون عدد المشاهدات كبيراً جداً . والاحتمال نفسه هو نهاية التكرار النسبى عندما يؤول عدد المشاهدات إلى مالا نهاية .

مثـــال :

إذا قذفت عملة 1000 مرة ونتج عنها 529 صورة ، فإن التكرار النسبى للصورة هو 0.529=529/1000 إذا قذفت العملة 1000 مرة أخرى ونتج عنها 493 صوة فإن التكرار النسبى فى مجموع 2000 رمية هو $(529 + 493)/2000 = 0.511$. وطبقاً للتعريف الإحصائى ، فإنه بالاستمرار بهذا الشكل فإننا نصبح أقرب ثم أقرب إلى رقم نسميه احتمال ظهور الصورة فى رمية واحدة للعملة . من النتيجة التى حصلنا عليها هذا الرقم يجب أن يكون 0.5 إلى رقم معنوى واحد . لحصول على أرقام معنوية أكثر فإننا يجب أن نأخذ مشاهدات أخرى .

التعريف الاحصائى ، على الرغم من أنه مفيد من الناحية العملية ، إلا أن له صعوباته من وجهة النظر الرياضية ، حيث أن الرقم الذى يمثل النهاية قد لا يوجد بالفعل . لهذا السبب فإن نظرية الاحتمال الحديثة تبنى على أساس فروض حيث مفهوم الاحتمال غير معرف مثلما النقطة والخط غير معرفين فى الهندسة .

الاحتمال الشرطى . الأحداث المستقلة والتابعة :

إذا كان E_1 و E_2 حدثين ، فإن احتمال حدوث E_2 علماً بأن E_1 قد حدث فعلا يعبر عنه $Pr\{E_2 | E_1\}$ أو $Pr\{E_2 \text{ given } E_1\}$ ويسمى بالاحتمال الشرطى لـ E_2 إذا كانت E_1 حدثت بالفعل .

إذا كان حدوث أو عدم حدوث E_1 لن يؤثر على احتمال حدوث E_2 فإن $Pr\{E_2 | E_1\} = Pr\{E_2\}$ ونقول فى هذه الحالة أن E_2 و E_1 أحداث مستقلة ، وخلاف ذلك فإنهم أحداث تابعة .

إذا كانت E_2E_1 تعبر عن الحدث « كلا من E_1 , E_2 يحدثان معا » وتسمى فى بعض الأحيان حدث مركب ، فإن

$$\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2|E_1\} \tag{١}$$

وعلى وجه الخصوص

للأحداث المستقلة
$$\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\} \tag{٢}$$

ولثلاثة أحداث E_1, E_2, E_3 فإن

$$\Pr\{E_1E_2E_3\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2|E_1\}\Pr\{E_3|E_1E_2\} \tag{٣}$$

بمعنى أن احتمال حدوث E_1, E_2, E_3 معاً يساوى احتمال حدوث E_1 مضروباً فى احتمال حدوث E_2 علماً بأن E_1 قد حدث فعلا ، مضروباً فى احتمال حدوث E_3 علماً بأن كلا من E_1, E_2 قد حدثا بالفعل . وعلى وجه الخصوص .

للأحداث المستقلة
$$\Pr\{E_1E_2E_3\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\}\Pr\{E_3\} \tag{٤}$$

وبشكل عام إذا كانت $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ عدد n من الأحداث المستقلة احتمالاتها على الترتيب $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ فإن احتمال حدوث $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ هو $p_1 p_2 p_3 \ldots, p_n$

مثال ١ :

إذا كان الحدث E_1 يعبر عن « ظهور الصورة فى الرمية الخامسة لعملة » والحدث E_2 يعبر عن « ظهور الصورة فى الرمية السادسة للعملة » فإن الحدثين E_1 , E_2 أحداث مستقلة ، وبهذا فإن احتمال ظهور الصورة فى كلا الرميتين الخامسة والسادسة هو ، بافتراض أن العملة « غير متحيزة » هو

$$\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\} = (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}$$

مثال ٢ :

إذا كان احتمال أن يظل A على قيد الحياة 20 عاماً هو 0.7 واحتمال أن يظل B على قيد الحياة 20 عاماً هو 0.5 ، فأن أحتمال أن يظل الإثنان على قيد الحياة 20 عاماً هو $0.35 = (0.5)\ (0.7)$.

مثال ٣ :

افترض أن صندوقاً يحتوى على 3 كور بيضاء و 2 كرة سوداء . الحدث E_1 هو « الكرة المسحوبة فى المرة الأولى سوداء » والحدث E_2 « الكرة المسحوبة فى المرة الثانية سوداء » علماً بأن الكرة التى سحبت لا تعاد مرة ثانية .

هنا E_1, E_2 أحداث تابعة .

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة فى المرة الأولى سوداء $\Pr\{E_1\} = \frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$ بينما أن احتمال أن تكون الكرة المسحوبة فى المرة الثانية سوداء علماً بأن الكرق التى سحبت فى المرة الأولى كانت سوداء $\Pr\{E_2|E_1\} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$ بهذا فإن احتمال أن تكون الكرتين لونهما أسود هو

$$\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2|E_1\} = \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{10}$$

الاحداث المتنافية :

فى حدثين أو عدة أحداث إذا كان حدوث أحدها يمنع حدوث الآخر أو الآخرين فإنه يطلق عليها أحداث متنافية . بهذا إذا كانت E_1 و E_2 أحداث متنافية فإن $\Pr\{E_1E_2\} = 0$.

إذا كان $E_2 + E_2$ يمثل الحدث بأن « أياً من E_1 أو E_2 أو كلاهما يحدثان » فإن

$$\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1E_2\} \qquad (٥)$$

وعلى وجه الخصوص

للأحداث المتنافية
$$\Pr\{E_1 + E_2) = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} \qquad (٦)$$

وكتعميم لهذا إذا كانت $E_1, E_2, \ldots, E_n$ عدد n من الأحداث المتنافية احتمال حدوثها هو على الترتيب $p_1, p_2, \ldots, p_n$ فإن احتمال حدوث

E_1 أو E_2 أو ... أو E_n هو $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$

مثال ١ :

E_1 يمثل الحدث « سحب آس من مجموعة أوراق اللعب « الكوتشينة » والحدث E_2 يمثل « سحب ورقة عليها صورة الملك » إذن $\Pr\{E_1\} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ and $\Pr\{E_2\} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. احتمال سحب ورقة تكون إما آس أو ملك هو $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$

حيث أن الملك والآس لا يمكن أن يظهرا معاً فى سحب واحد ولهذا فهما يعدان أحداثاً متنافية .

مثال ٢ :

E_1 يمثل الحدث « سحب آس من مجموعة أوراق اللعب » « الكوتشينة » و E_2 يمثل الحدث « سحب ورقة عليها صورة القلب » إذن E_1 و E_2 لا يعدان أحداثاً متنافية حيث يمكن أن تكون الورقة آس وعليها صورة القلب . وبهذا فإن احتمال سحب ورقة وتكون آس وعليها صورة القلب أو كليهما هو

$$\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1E_2\}$$
$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة :

إذا كان المتغير X يمكن أن يأخذ مجموعة مجموعة من القيم المتقطعة $X_1, X_2, \ldots, X_K$ باحتمالات $p_1, p_2, \ldots, p_K$ على الترتيب ، حيث $p_1 + p_2 + \ldots + p_K = 1$ فإنه يمكن القول أن هذا يعد تعريفاً لتوزيع احتمال متقطع للمتغير X.

الدالة $p(X)$ والتى تأخذ القيم $p_1, p_2, \ldots, p_K$ لقيم $X = X_1, X_2, \ldots, X_K$ تسمى دالة الاحتمال أو ال
تكرار X . ولأن X يمكن أن تأخذ قيما معينة باحتمالات محددة ، فإنه يسمى غالباً بالمتغير العشوائى المتقطع . المتغير العشوائى يعرف أيضاً بالمتغير التصادفى .

مثــال :

قذفت زهرتى طاولة (غير متحيزتين) فإذا كان X يعبر عن مجموع النقط التى نحصل عليها . فإن التوزيع الأحتمالى يعطى بالجدول التالى

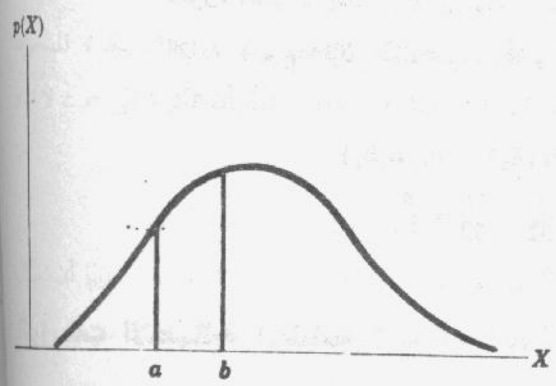
X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(X)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

على سبيل المثال ، احتمال الحصول على مجموع 5 هو $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ وبهذا فإنه فى 900 رمية الزهرتين فإننا نتوقع أن 100 رمية ستعطى المجموع 5 .

لاحظ أن هذا مناظر لتوزيع التكرارى النسبى حيث حلت الاحتمالات محل التكرارات النسبية وبهذا يمكن التفكير فى التوزيعات الاحتمالية كتوزيع نظرى أو الصورة المثالية فى النهاية للتوزيع التكرارى النسبى عندما تكون عدد المشاهدات كبير جداً . ولهذا السبب فإنه يمكن أن ننظر إلى التوزيعات الاحتمالية كتوزيعات للمجتمعات ، بينما التوزيعات التكرارية النسبية كتوزيعات للعينات المسحوبة من هذه المجتمعات .

ويمكن تمثيل التوزيعات الاحتمالية بيانياً برسم $p(X)$ مقابل X ، كما فى التوزيع التكرارى النسبى . أنظر المسألة ٦-١١ بتجميع الاحتمالات نحصل على دالة التوزيع الاحتمالى التراكمى ، والمقابلة للتوزيع التكرارى المتجمع النسبى . والدالة المرتبطة بهذا التوزيع تسمى أحياناً بدالة التوزيع .

التوزيعات الاحتمالية المتصلة :



الأفكار السابقة يمكن أن تمتد لتشمل الحالة التى يمكن أن يأخذ فيها المتغير X مجموعة من القيم المتصلة . ويعبر المضلع التكرارى النسبى للعينة ، من الناحية النظرية أو فى النهاية عن المجتمع حيث يمهد بمنحنى متصل. مثل الموضح فى الشكل ٦ - ١ . والذى تأخذ معادلته الصورة $Y = p(X)$ المساحة الكلية تحت المنحنى المحدد بالمحور X ، تساوى واحد ، والمساحة تحت المنحنى التى تقع بين الخطوط $X = a$ و $X = b$ (مظللة فى الشكل) تعطى احتمال أن X تقع بين a, b والتى يمكن التعبير عنها بـ $\Pr\{a < X < b\}$

وتسمى $p(X)$ دالة كثافة الاحتمال ، أو باختصار دالة كثافة ، وإذا أعطينا مثل هذه الدالة فإنه يمكن القول أن هذا يعد تعريفا للتوزيع الاحتمالي المتصل للمتغير X . ويسمى المتغير X غالبا بمتغير عشوائي متصل .

وكما في حالة المتغير المتقطع ، فإنه يمكن تعريف دالة التوزيع الاحتمالي التراكمي ودالة التوزيع المرتبطة بها .

التوقع الرياضى :

إذا كانت p تمثل احتمال حصول شخص على كية من النقود S ، التوقع الرياضى ، أو ببساطة التوقع ، يعرف بأنه pS .

مثـــال :

إذا كان احتمال أن يكسب شخص جائزة قيمتها $£10$ هـــو $^1/_5$ ، فإن التوقع هـــو $£2 = (£10)^1/_5$.

ويمكن بسهولة تعميم مفهوم التوقع . إذا كان X يعبر عن متغير عشوائي متقطع والذى يمكن أن يأخذ القيم $X_1, X_2, \dots, X_K$ باحتمالات $p_1, p_2, \dots, p_K$ على الترتيب حيث $p_1 + p_2 + \dots p_K = 1$ ، التوقع الرياضى للمتغير X أو ببساطة توقع X ، ويرمز له بالرمز $E(X)$ ، يعرف بأنه

$$E(X) = p_1X_1 + p_2X_2 + \dots + p_KX_K = \sum_{j=1}^{K} p_jX_j = \Sigma pX \qquad (٧)$$

إذا وضعنا فى صيغة التوقع بدلا من الاحتمالات p_j ، التكرارات النسبية f_j/N حيث $N = \Sigma f_j$ فإن التوقع يختصر إلى $(\Sigma fX)/N$ وهو الوسط الحسابى $\bar{X}$ لعينة حجمها N حيث $X_1, X_2, \dots, X_K$ تظهر مع تلك التكرارات النسبية وكلما صارت N أكبر فإن التكرارات النسبية f_j/N تقترب من الاحتمالات p_j وهذا يؤدى إلى تفسير $E(X)$ كمثل لمتوسط المجتمع التى سحبت منه العينة . فإذا رمزنا لمتوسط العينة بالرمز m فإن متوسط المجتمع المقابل يعبر عنه بالحرف اليونانى μ (ميو) .

ويمكن تعريف التوقع أيضا بالنسبة للمتغير العشوائى المستمر . ولكن التعريف يحتاج إلى استخدام علم التفاضل والتكامل .

العلاقة بين متوسط وتباين المجتمع ومتوسط وتباين العينة :

إذا سحبنا عينة عشوائية حجمها N من مجتمع (بمعنى أننا نفترض أن كل العينات ذات نفس الحجم لها نفس الفرصة فى السحب) ، فإنه من الممكن اثبات أن القيمة المتوقعة لمتوسط العينة m هو متوسط المجتمع μ .

لا يترتب على ما سبق استنتاج أن القيمة المتوقعة لأى كية محسوبة من العينة تساوى القيمة المقابلة لها فى المجتمع . على سبيل المثال ، فإن القيمة المتوقعة لتباين العينة كما سبق أن عرفناه لا يساوى تباين المجتمع ولكن يساوى $(N - 1)/N$ مضروبا فى هذا التباين . وهذه هى الطريقة التى يختارها بعض الاحصائيين فى تعريف تباين العينة حيث يأخذون تعريفنا للتباين مضروبا فى $N/(N - 1)$.

التحليل التوافقى :

الحصول على احتمالات الحوادث المركبة يتطلب عد جميع الحالات وهذا غالبا ما يكون صعب أو ممل أو كليهما . ولتسهيل العمل المطلوب فإننا نستخدم المبادئ الأساسية للموضوع المسمى بالتحليل التوافقى .

المبادىء الأساسية :

إذا كان حدث يمكن أن يحدث بأى من n_1 طريقة إذا حدث ذلك فإن حدثا آخر يمكن أن يحدث بأى من n_2 طريقة ، فإن عدد الطرق التى يمكن أن يحدث بها الحدثان معا بهذا الترتيب هــو $n_1 \, n_2$.

مثـــال :

مثال : إذا كان هناك 3 مرشحين لمنصب المحافظ و 5 مرشحين لمنصب العمدة ، فإن عدد الطرق التى يمكن بها شغل الوظيفتين معا هو $15 = 3.5$ طريقة .

مضروب n :

مضروب n ، ويرمز له بالرمز $n!$ يعرف كالآتى

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1 \qquad (٨)$$

وبهذا $5! = 5.4.3.2.1 = 120,\ 4!\,3! = (4.3.2.1)(3.2.1) = 144$. ومن المناسب تعريف $0! = 1$.

التباديل :

تباديل n من الأشياء المختلفة تأخذ r فى كل مرة هى تنظيمات يتركب كل منها من r مأخوذة من n من الأشياء مع الأهتمام بالترتيب فى هذه التنظيمات .

عدد تباديل n من الأشياء مأخوذة r فى المرة يرمز لها بالرمز $P_{n,r}$ أو ${}_nP_r,\ P(n, r)$ ونعرف كالآتى

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (٩)$$

وعلى وجه الخصوص ، عدد تباديل n شئ مأخوذة n فى المرة هــو

$${}_nP_n = n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$$

مثـــال :

عدد تباديل الحروف a, b, c مأخوذة حرفان فى كل مرة هــو $6 = 3.2 = {}_3P_2$ وهذه هى

ab, ba, ac, ca, bc, cb.

عدد تراتيب مجموعة من n من الأشياء مقسمة إلى n_1 من الأشياء المتشابه ، n_2 الأشياء المتشابهة و .... هو

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots} \qquad \text{حيث} \qquad n = n_1 + n_2 + \ldots \tag{١٠}$$

مثـال :

عدد تباديل الحروف فى كلمة *Statistics* هـو $\frac{10!}{3!3!1!2!1!} = 50\,400$ حيث أنه يوجد $3\ s's$ ، $3\ t's$ ، $1\ a$ و $2\ i's$ و $1\ c$.

التوافيق :

توافيق n من الأشياء المختلفة مأخوذة r فى كل مرة هى اختيارات يتركب كل منها من r من الـ n بصرف النظر عن الترتيب . عدد توافيق n من الأشياء مأخوذة r فى كل مرة يرمز لها بالرمز $\binom{n}{r}$ or $C_{n,r}$, $C(n,r)$, ${}_nC_r$ وتعرف بما يلى :

$${}_nC_r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{{}_nP_r}{r!} \tag{١١}$$

مثـال :

عدد توافيق الحروف a, b, c مأخوذة اثنان فى كل مرة هـو $_3C_2 = \frac{3 \cdot 2}{2!} = 3$

وهى ab, ac, bc . لاحظ أن ab هى نفس التوافيق مثل ba ولكنها ليست نفس التباديل .

لاحظ أن ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$. بهذا فإن $_{20}C_{17} = {}_{20}C_3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1140$ عدد توافيق n من الأشياء مأخوذة 1 أو 2 .. أو n فى كل مرة هـو

$${}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n - 1$$

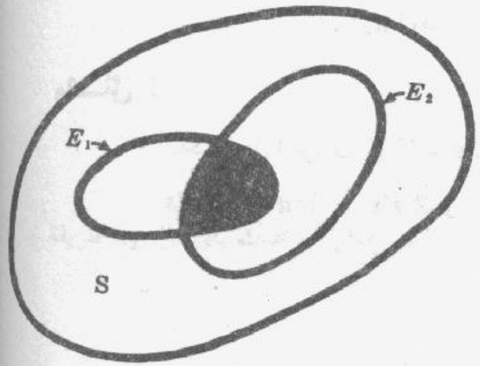
تقريب ستيرلنج لـ $n!$:

عندما تكون n كبيرة فإن حساب قيمة $n!$ مباشرة يكون غير عملى . وفى مثل هذه الحالة فإنه يمكن الاستفادة بصيغة ستيرلنج التقريبية :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \tag{١٢}$$

حيث ...$e = 2.71828$ الأساس الطبيعى للوغاريتمات . أنظر المسألة ٦-٣٦ .

العلاقة بين الاحتمال ونظرية الفئات :



فى النظرية الحديثة للاحتمالات ، نعبر عن كل النتائج الممكنة لتجربة أو مباراة . . . . . كنقطة فى مجال (والذى يمكن أن يكون ذو بعد واحد أو بعدين أو ثلاثة أبعاد . . وهكذا) . ويسمى هذا المجال مجال العينة S (أو فراغ العينة) إذا كانت S تحتوى على عدد محدود من النقط فإنه من الممكن أن ننسب لكل نقطة رقم غير سالب يسمى بالاحتمال بحيث يكون مجموع كل هذه الأرقام المقابلة لجميع النقط فى S هو الرقم واحد . الحدث هو فئة أو مجموعة من النقط فى S كمثال الحدث E_1 أو E_2 المشار إليهما فى الرسم ٥–٢ ، ويسمى هذا الرسم بشل أيلر أو شكل فن *Venn diagram* أو *Euler diagram* .

الحدث $E_1 + E_2$ هو مجموعة النقط التى إما تكون فى E_1 أو E_2 أو فى كليهما بينما الحدث $E_1\ E_2$ مجموعة النقط المشتركة فى كل من E_1 و E_2 بهذا فإن احتمال حدث مثل E_1 هو مجموع الاحتمالات المرتبطة بجميع النقط الموجودة فى E_1 . كذلك فإن احتمال $E_1 + E_2$ ويعبر عنها $\Pr\{E_1 + E_2\}$ وهو مجموع الاحتمالات المرتبطة بجميع النقط الموجودة داخل الفئة $E_1 + E_2$. إذا لم يكن هناك نقط مشتركة بين E_2, E_1 ؛ بمعنى أن الأحداث متنافية ، فإن $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\}$ أما إذا كانت هناك نقط مشتركة بينهما فإن

$$\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1E_2\}$$

الفئة $E_2 + E_1$ يرمز لها أحيانا بالرمز $E_2 \cup E_1$ وتسمى اتحاد فئتين .

الفئة E_1E_2 ويرمز لها أحيانا بالرمز $E_2 \cap E_1$ وتسمى تقاطع فئتين .

ومن الممكن تعميم ما سبق فى حالة وجود أكثر من فئتين . فبدلا من $E_1 + E_2 + E_3$ و $E_1\ E_2\ E_3$ فإنه يمكن استخدام الرموز $E_1 \cup E_2 \cup E_3$ و $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ على الترتيب .

ويستخدم الرمز الخاص ϕ على الفئة التى لاتحتوى على أى نقط ، وتسمى بالفئة الخالية والاحتمال المرتبط بالحدث المقابل لهذه الفئة هو صفر بمعنى $\Pr\{\phi\} = 0$.

إذا كان E_2 و E_1 لايوجد بينهما نقط مشتركة ، فيمكن أن نكتب $E_1E_2 = \phi$ والتى تعنى أن هذه الاحداث متنافية وأن $\Pr\{E_1\ E_2\} = 0$.

وفى هذا الاتجاه الحديث ، فإن المتغير العشوائى يعرف كدالة معرفة على كل نقطة فى مجال العينة ، على سبيل المثال ، فى المسألة ٦ – ٣٧ ، المتغير العشوائى هو مجموع إحداثيات كل نقطة .

وفى الحالات التى تتكون S من عدد لانهائى من النقط فإن الأفكار السابقة يمكن تعميمها باستخدام المفاهيم المعروفة فى التفاضل والتكامل .

مسائل محلولة

القواعد الأساسية للاحتمالات :

٦ - ١ حدد الاحتمال p أو تقدير له ، لكل من الأحداث التالية :

(أ) ظهور رقم فردى فى رمية واحدة لزهرة طاولة غير متحيزة .

من حالات ممكنة كل منها له نفس الفرصـــة فى الظهور ، 3 حالات (عندما يظهر على وجه الزهرة 5 ,3 ,1) فى صالح الحدث . إذن $p = {}^{3}/_{6} = \frac{1}{2}$.

(ب) ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل فى رمية عملة غير متحيزة مرتين .

إذا كانت H تعبر عن « الصــورة » و T تعبر عن « الكتابة » ، فإن النتائج الممكنة فى الرميتين هى أربعة حالات لها نفس الفرصة فى الظهور وهى HH, HT, TH, TT . والثلاث حالات الأولى فقط هى التى فى صالح الحدث . إذن $p = \frac{3}{4}$.

(ج) ظهور آس أو عشرة دينارى أو إثنين بستونى عند سحب ورقة واحدة من 52 ورقة من مجموعة أوراق لعب (كوتشينة) عادية مخلوطة خلطاً جيداً .

الحدث يمـكن أن يتحقق فى 6 حالات (آس بستونى ، آس قلب ، آس سباتى ، آس دينارى ، عشرة دينارى وإثنين بستونى) من 52 حالة لها نفس الفرصة فى الظهور . إذن $p = \frac{6}{52} = \frac{3}{26}$

(د) ظهور مجموع 7 فى رمية واحدة لظهرتين طاولة غير متحيزتين .

كل من الوجوه الستة لأحد الزهرتين يرتبط ظهوره بكل من الوجوه الستة للزهرة الأخرى ، وبهذا فإن مجموع الحالات الممكن ظهورها والتى لها نفس الفرصة فى الظهور ، هى $6.6 = 36$. وهذه يمكن التعبير عنها ، بـ

$(1,\ 1), (2,\ 1), (3,\ 1), \ldots, (6,\ 6)$

هناك 6 حالات نحصل فيها على المجموع 7 ، وهى $(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$ (أنظر المسألة ٦ - ٣٧) إذن $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(هـ) فى 100 رمية لعملة إذا ظهرت الصورة فى 56 رمية فإن الكتابة تظهر فى المرات الأخرى .

بما أن $44 = (100 - 56)$ صورة تظهر فى 100 رمية للعملة ، فإن الاحتمال المقـدر أو الاحتمال الاعتبارى لظهور الصورة هو التكرار النسبى $0.44 = 44/100$.

٦ - ٢ تجربة مكونة من قذفه عملة وزهرة طاولة . إذا كان E_1 هو الحدث « الصورة » تظهر فى رمية العملة و E_2 الحدث « 3 أو 6 » يظهران عند رمى الزهرة ، عبر بالكلمات عن معنى كل ما يلى :

(أ) $\bar{E}_1$ ظهور كتابة على العملة وأى رقم على الزهرة .

(ب) $\bar{E}_2$ 1 أو 2 أو 4 أو 5 على الزهرة وأى شىء على العملة .

(جـ) $E_1 E_2$ صورة على العملة و 3 أو 6 على الزهرة .

(د) $\Pr\{E_1\bar{E}_2\}$ احتمال ظهور صورة على العملة و 1, 2, 4, 5 على الزهرة .

(هـ) $\Pr\{E_1 | E_2\}$ احتمال الصورة على العملة علما بأن 3 أو 6 ظهرت فعلا على الزهرة .

(و) $\Pr\{\bar{E}_1 + \bar{E}_2\}$ احتمال الكتابة على العملة 1, 2, 4, 5 على الزهرة ، أو كليهما .

٦ – ٣ سحبت كرة بشكل عشوائي من صندوق به 6 كرات حمراء ، 4 كرات بيضاء ، 5 كرات زرقاء . حدد احتمال أن تكون (أ) حمراء (ب) بيضاء (ت) زرقاء (ث) ليست حمراء (ج) حمراء أو بيضاء

الحـــل :

اعتبر R الحدث سحب كرة حمراء ، W الحدث سحب كرة بيضاء وكذلك B الحدث سحب كرة زرقاء . إذن

(أ) $$\Pr\{R\} = \frac{\text{عدد طرق اختيار كرة حمراء}}{\text{عدد الطرق الكلية لاختيار كرة}} \quad \frac{6}{6+4+5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

(ب) $$\Pr\{W\} = \frac{4}{6+4+5} = \frac{4}{15}$$

(جـ) $$\Pr\{B\} = \frac{5}{6+4+5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

(د) باستخدام (أ) $$\Pr\{\bar{R}\} = 1 - \Pr\{R\} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

(هـ) $$\Pr\{R + W\} = \frac{\text{عدد طرق اختيار كرة حمراء أو بيضاء}}{\text{عدد الطرق الكلية لاختيار كرة}} = \frac{6+4}{6+4+5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

طريقة اخرى :

من (٢) $$\Pr\{R + W\} = \Pr\{\bar{B}\} = 1 - \Pr\{B\} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

لاحظ أن : $\Pr\{R + W\} = \Pr\{R\} + \Pr\{W\}$ بمعنى $\frac{2}{3} = \frac{2}{5} + \frac{4}{15}$ وهذا مثال للقاعدة العامة $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\}$ وهذا صحيح في حالة ما إذا كانت E_1, E_2 أحداث متنافية .

٦ – ٤ قذفت زهرة غير متميزة مرتين . أوجد احتمال الحصول على 4 أو 5 أو 6 في المرة الأولى و 1 أو 2 أو 3 أو 4 في المرة الثانية .

الحـــل :

اعتبر $E_1 =$ الحدث « 4 أو 5 أو 6 » في الرمية الأولى ، $E_2 =$ الحدث « 1 أو 2 أو 3 أو 4 » في الرمية الثانية .

وبما أن كل من الستة أوجه التي يمكن أن تقع عليها الزهرة في المرة الأولى ترتبط بكل من الستة أوجه التي يمكن أن تقع عليها الزهرة في المرة الثانية . فإن عدد الطرق الممكنة والتي لها نفس الفرصة في الظهور هي $36 = 6.6$ طريقة كل من الطرق الثلاث التي يظهر E_1 ترتبط بكل من الطرق الأربع التي يمكن أن يظهر بها E_2 وهذا يعطي $12 = 3.4$ طريقة يمكن أن تحدث بها E_1 و E_2 معاً أو E_1E_2 .

إذن $\Pr\{E_1E_2\} = 12/36 = 1/3$.

لاحظ أن $^4/_6 \cdot {}^3/_6 = {}^1/_3$ بمعنى $\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\}$

وهذه الصيغة صحيحة إذا كانت E_1 و E_2 أحداثاً مستقلة .

٦ – ٥ سحب كارتان من مجموعة أوراق لعب عادية مكونة من 52 كارتاً ومخلوطة خلطاً جيداً . أوجد احتمال أن يكون كلاهما آس إذا كان الكارت الأول (أ) أعيد إلى المجموعة (ب) لم يعد إلى المجموعة .

الحل :

اعتبر E_1 = الحدث « آس » في السحبة الأولى ، E_2 = الحدث « آس » في السحبة الثانية .

(أ) إذا أعيد الكارت الأول إلى المجموعة فإن E_1 و E_2 أحداث مستقلة إذن

Pr (الكارتان المسحوبان آس) = $\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\} = (4/52)(4/52) = 1/169$

(ب) الكارت الأول يمكن أن يسحب بـ 52 طريقة ، الكارت الثاني يمكن أن يسحب بـ 51 طريقة حيث أن الكارت الأول لن يعاد . بهذا فإن عدد طرق سحب كارتين هو 52.51 طريقة كلها لها نفس الفرصة في الظهور .
بما أن هناك 4 طرق يمكن أن يحدث بها E_1 و 3 طرق يمكن أن يحدث بها E_2 وبهذا فإن كلا من E_1 و E_2 أو $E_1 E_2$ يمكن أن يحدثا بـ 4.3 طرق . إذن $\Pr\{E_1E_2\} = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$.
لاحظ أن $3/51$ = Pr (الكارت الثاني آس علماً بأن الكارت الأول آس) = $\Pr\{E_2|E_1\}$ وهذه النتيجة إيضاح للقاعدة العامة $\Pr\{E_1E\} = \Pr\{E_1\} \Pr(E_2 | E_1\}$ في حالة ما إذا كانت E_1 و E_2 إحداثاً مستقلة .

٦ – ٦ سحبت ثلاث كرات على التوالي من الصندوق المشار إليه (بالمسألة ٦ – ٣)

أوجد احتمال أن يكون سحبوا بالترتيب أحمر ، أبيض وأزرق إذا كانت كل كرة مسحوبة (أ) تعاد مرة أخرى إلى الصندوق (ب) لاتعاد .

الحل :

اعتبر R = الحدث « أحمر » في السحبة الأولى W = الحدث « أبيض » في السحبة الثانية ، B = الحدث « أزرق » في السحبة الثالثة

والمطلوب $\Pr\{RWB\}$.

(أ) إذا أعيدت كل كرة بعد سحبها فإن $R,\ W,\ B$ تعد أحداثاً مستقلة وبهذا فإن

$$\Pr\{RWB\} = \Pr\{R\}\ \Pr\{W\}\ \Pr\{B\} = \left(\frac{6}{6+4+5}\right)\left(\frac{4}{6+4+5}\right)\left(\frac{5}{6+4+5}\right) = \left(\frac{6}{15}\right)\left(\frac{4}{15}\right)\left(\frac{5}{15}\right) = \frac{8}{225}$$

(ب) إذا لم تعد الكرة بعد سحبها ، فإن $B,\ W,\ R$ تعد أحداثاً تابعة وبهذا فإن

$$\Pr\{RWB\} = \Pr\{R\}\Pr\{W|R\}\Pr\{B|WR\} = \left(\frac{6}{6+4+5}\right)\left(\frac{4}{5+4+5}\right)\left(\frac{5}{5+3+5}\right)$$
$$= \left(\frac{6}{15}\right)\left(\frac{4}{14}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{4}{91}$$

حيث $\Pr\{B|WR\}$ هو احتمال الشرطى للحصول على كرة زرقاء إذا كانت كرة بيضاء وكرة حمراء قد اختيارهما بالفعل .

٦ - ٧ فى رمية زهرة غير متميزة مرتين أوجد احتمال ظهور الرقم 4 مرة واحدة على الأقل .

الحـل :

إذا كانت $E_1 =$ الحدث « 4 » فى الرمية الأولى ،

$E_2 =$ الحدث « 4 » فى الرمية الثانية .

$E_1 + E_2 =$ الحدث « 4 » فى الرمية الأولى أو « 4 » فى الرمية الثانية أو فى كليهما .

= الحدث ظهور « 4 » مرة واحدة على الأقل

المطلوب هو $\Pr\{E_1 + E_2\}$

الطريقة 1 :

عدد الطرق الممكنة والتى لها نفس الفرصة فى الظهور والتى يمكن أن تقع بها الزهرتان $= 6.6 = 36$

كذلك ، عدد الطرق التى يحدث بها E_1 وليس $E_2 = 5$.

عدد الطرق التى يحدث بها E_2 وليس $E_1 = 5$.

عدد الطرق التى يحدث بها لكل من $E_2,\ E_1 = 1$.

بهذا فإن عدد الطرق التى يمكن أن يحدث بها على الأقل أحد الحدثين E_1 أو $E_2 = 11 = 5 + 5 + 1$

بحيث $\Pr\{E_1 + E_2\} = 11/36$.

الطريقة 2 :

بما أن E_1 و E_2 ليست أحداثاً متنافية فإن $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1E_2\}$

كذلك ، بما أن E_1 و E_2 أحداثاً مستقلة $\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\}$

إذن en $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - (\frac{1}{6})(\frac{1}{6}) = \frac{11}{36}$

الطريقة 3 :

$1 = \Pr\{$ عدم ظهور الرقم « 4 » $\} + \Pr\{$ ظهور الرقم « 4 » على الأقل مرة $\}$ إذن

$\Pr\{$ ظهور الرقم « 4 » على الأقل مرة $\} = 1 - \Pr\{$ عدم ظهور الرقم « 4 » $\}$

$= 1 - \Pr\{$ عدم ظهور « 4 » فى الرمية الأولى وعدم ظهور « 4 » فى الرمية الثانية $\}$

$$= 1 - \Pr\{\bar{E}_1\bar{E}_2\} = 1 - \Pr\{\bar{E}_1\}\Pr\{\bar{E}_2\}$$
$$= 1 - (\tfrac{5}{6})(\tfrac{5}{6}) = \tfrac{11}{36}.$$

٦ - ٨ كيس يحتوى على « 4 » كرات بيضاء ، « 2 » كرة سوداء ، وكيس آخر يحتوى على 3 كرات بيضاء ، 5 كرات سوداء . إذا سحبت كرة من كل كيس ، أوجد احتمال :

(أ) كلا الكرتين لونهما أبيض .

(ب) كلا الكرتين لونهما أسود .

(ج) كرة بيضاء وكرة سوداء .

الحل :

إذا كانت W_1 = الحدث كرة « بيضاء » من الكيس الأولى ،

W_2 = الحدث كرة « بيضاء » من الكيس الثانى .

(أ) $\Pr\{W_1W_2\} = \Pr\{W_1\}\Pr\{W_2\} = (\frac{4}{4+2})(\frac{3}{3+5}) = \frac{1}{4}$

(ب) $\Pr\{\bar{W}_1\bar{W}_2\} = \Pr\{\bar{W}_1\}\Pr\{\bar{W}_2\} = (\frac{2}{4+2})(\frac{5}{3+5}) = \frac{5}{24}$.

(ج) الحدث « كرة بيضاء وكرة سوداء » مثل الحدث « أما الكرة الأولى بيضاء والثانية سوداء أو الكرة الأولى سوداء والثانية بيضاء » بمعنى ، $W_1\bar{W}_2 + \bar{W}_1W_2$. بما أن الأحداث $W_1\bar{W}_2,\ \bar{W}_1W_2$ أحداث متنافية ، فإن

$$\Pr\{W_1\bar{W}_2 + \bar{W}_1W_2\} = \Pr\{W_1\bar{W}_2\} + \Pr\{\bar{W}_1W_2\}$$
$$= \Pr\{W_1\}\Pr\{\bar{W}_2\} + \Pr\{\bar{W}_1\}\Pr\{W_2\} = (\frac{4}{4+2})(\frac{5}{3+5}) + (\frac{2}{4+2})(\frac{3}{3+5}) = \frac{13}{24}$$

طريقة اخرى :

الاحتمال المطلوب هو $1 - \Pr\{W_1W_2\} - \Pr\{\bar{W}_1\bar{W}_2\} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{5}{24} = \frac{13}{24}$

٦ - ٩ لعب A و B ، 12 دوراً فى مباراة الشطرنج كسب A ، 6 منها و B ، 4 وتعادلا فى مرتين . وقد اتفقا أن يلعب 3 أدواراً أخرى .

أوجد احتمال (أ) A يكسب المباريات الثلاث . (ب) انتهاء مباريتين بالتعادل (ج) A و B يكسبان بالتبادل (د) B يكسب مباراة على الأقل .

الحـــل :

اعتبر أن A_1, A_2, A_3 تمثل الأحداث « A يكسب » فى المباراة الأولى A_1 ، فى المباراة الثانية A_2 ، فى المباراة الثالثة A_3 .

B_1, B_2, B_3 تمثل الأحداث « B يكسب » فى المباراة الأولى B_1 ، فى المباراة الثانية B_2 ، فى المباراة الثالثة B_3 .

و T_1, T_2, T_3 تمثل الأحداث « التعادل » فى المباراة الأولى T_1 ، فى المباراة الثانية T_2 ، فى المباراة الثالثة T_3 .

على ضوء الخبرة السابقة (احتمال اعتبارى) فسنفرض أن

$$\Pr\{\text{يكسب مباراة } A\} = 6/12 = 1/2$$

$$\Pr\{\text{يكسب مباراه } B\} = 4/12 = 1/3$$

$$\Pr\{\text{انتهاء أى مباراة بالتعادل}\} = 2/12 = 1/6$$

(أ) $\Pr\{\text{يكسب جميع المباريات } A\} = \Pr\{A_1A_2A_3\} = \Pr\{A_1\}\Pr\{A_2\}\Pr\{A_3\} = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$

وذلك بافتراض أن نتيجة كل مباراة مستقلة عن نتيجة المباريات السابقة ، وهـــذا الفرض يبدو منطقياً (إلا لو اعتبرنا أن اللاعبين يتأثرون نفسياً بفوز أو خسارة اللاعب الآخر فى المباريات السابقة) .

(ب) $\Pr$ (انتهاء مباراتين بالتعادل) =

$$= \{\text{انتهاء المباراتين الأولى والثانية أو الأولى والثالثة أو الثانية والثالثة بالتعادل}\}$$

$$\begin{aligned}
&= \Pr\{T_1T_2\bar{T}_3\} + \Pr\{T_1\bar{T}_2T_3\} + \Pr\{\bar{T}_1T_2T_3\} \\
&= \Pr\{T_1\}\Pr\{T_2\}\Pr\{\bar{T}_3\} + \Pr\{T_1\}\Pr\{\bar{T}_2\}\Pr\{T_3\} + \Pr\{\bar{T}_1\}\Pr\{T_2\}\Pr\{T_3\} \\
&= (\tfrac{1}{6})(\tfrac{1}{6})(\tfrac{5}{6}) + (\tfrac{1}{6})(\tfrac{5}{6})(\tfrac{1}{6}) + (\tfrac{5}{6})(\tfrac{1}{6})(\tfrac{1}{6}) = 15/216 = 5/72.
\end{aligned}$$

(جـ) $\Pr\{\text{يكسبان بالتبادل } A \text{ و } B\} =$

$$= \Pr\{\text{يكسب } B \text{ ثم يكسب } A \text{ ثم يكسب } B \text{ أو يكسب } A \text{ ثم يكسب } B \text{ ثم يكسب } A\}$$

$$\begin{aligned}
&= \Pr\{A_1B_2A_3 + B_1A_2B_3\} = \Pr\{A_1B_2A_3\} + \Pr\{B_1A_2B_3\} \\
&= \Pr\{A_1\}\Pr\{B_2\}\Pr\{A_3\} + \Pr\{B_1\}\Pr\{A_2\}\Pr\{B_3\} \\
&= (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{3}) = 5/36.
\end{aligned}$$

(د) $\Pr\{\text{يكسب مباراة على الأقل } B\} = 1 - \Pr\{\text{يخسر جميع المباريات } B\}$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \Pr\{\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_3\} = 1 - \Pr\{\bar{B}_1\}\Pr\{\bar{B}_2\}\Pr\{\bar{B}_3\} \\
&= 1 - (\tfrac{2}{3})(\tfrac{2}{3})(\tfrac{2}{3}) = 19/27.
\end{aligned}$$

التوزيعات الاحتمالية :

٦–١٠ أوجد احتمال وجود أولاد وبنات فى عائلات مكونة من 3 أطفال ، مفترضاً تساوى احتمال الأولاد والبنات

الحـــل :

اعتبر أن B الحدث « وجود ولد فى العائلة » .

G = الحدث « وجود بنت فى العائلة » .

وطبقاً للفرض الخاص بتساوى الاحتمالات فإن $\frac{1}{2}$ = $\Pr\{B\} = \Pr\{G\}$.

فى عائلات مكونة من 3 أطفال فإن الأحداث المتنافية يمكن أن تقع حسب الاحتمالات الموضحة :

(أ) ثلاثة أولاد (BBB) . إذن $\Pr\{BBB\} = \Pr\{B\}\Pr\{B\}\Pr\{B\} = \frac{1}{8}$

وقد افترضنا هنا أن ولادة ولد لن تتأثر يكون الطفل السابق ولد ، أى افترضنا أن الأحداث مستقلة .

(ب) ثلاث بنات (GGG) . إذن كما فى (أ) أو بالتماثل $\Pr\{GGG\} = {}^{1}/_{8}$

(جـ) ولدان وبنت $(BBG + BGB + GBB)$. إذن

$$\begin{aligned}\Pr\{BBG + BGB + GBB\} &= \Pr\{BBG\} + \Pr\{BGB\} + \Pr\{GBB\}\\ &= \Pr\{B\}\Pr\{B\}\Pr\{G\} + \Pr\{B\}\Pr\{G\}\Pr\{B\} + \Pr\{G\}\Pr\{B\}\Pr\{B\}\\ &= \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{8}.\end{aligned}$$

(د) بنتان وولد $(GGB + GBG + BGG)$. كما فى (جـ) أو بالتماثل ، الاحتمال يساوى ${}^{3}/_{8}$.

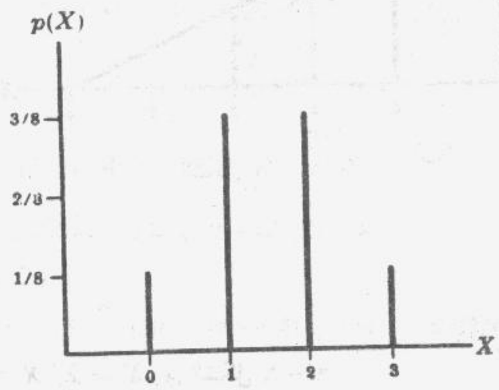
إذا أخذنا X كتغير عشوائى يعبر عن عدد الأولاد فى العائلات المكونة من ثلاثة أطفال ، يعبر عن التوزيع الاحتمالى كما هو موضح بالجدول

Number of boys X	0	1	2	3
Probability $p(X)$	1/8	3/8	3/8	1 8

٦-١١ مثل بيانياً توزيع المسألة ٦ – ١٠ .

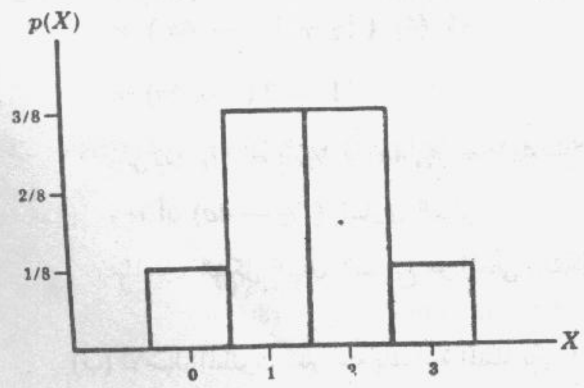
الحـل :

الرسم البيانى يمكن أن يمثل أما بالشكل ٦ – ٣ أو بالشكل ٦ – ٤



عدد الأولاد

شكل ٦ – ٣



عدد الأولاد

شكل ٦ – ٤

لاحظ أن مجموع مساحات المستطيلات فى الشكل ٦ – ٤ أعلاه هو واحد . فى الشكل السابق ، ويسمى بالمضلع الاحتمالى ، نعتبر المتغير X كتغير متصل على الرغم من أن المتغير أصلا متغير متقطع وهذه الطريقة تعد مفيدة أحياناً . الشكل ٦ – ٣ ، فى الناحية الأخرى ، يستعمل عندما لانريد اعتبار المتغير كتغير متصل .

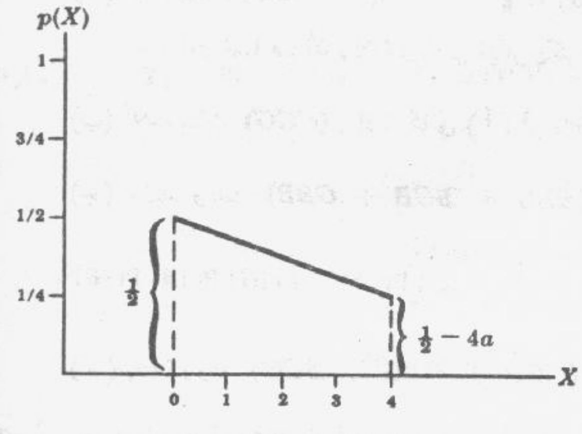
٦ - ١٢ المتغير المتصل X يأخذ قيما بين الصفر و 4 ودالة كثافة احتماله هى $p(X) = ½ - aX$ ، حيث a مقدار ثابت .

(أ) احسب قيمة a .

(ب) أوجد $Pr\{1 < X < 2\}$.

الحل :

(أ) الرسم البيانى لـ $p(X) = ½ - aX$ هو خط مستقيم كما هو موضح بالشكل ٦ - ٥ .



الشكل ٦ - ٥

للحصول على قيمة a ، فإننا يجب أن نتأكد من إن المساحة الكلية المحصورة بين الخط $X = 4 , X = 0$ وأعلى المحور X يجب أن تساوى واحداً .

عند $X = 0$ فإن $p(X) = ½$

عند $X = 4$ فإن $p(X) = ½ - 4a$

إذن يجب اختيار a بحيث تكون مساحة الشكل الرباعى = 1 .

مساحة الشكل الرباعى =

½ (الارتفاع) (مجموع القواعد) .

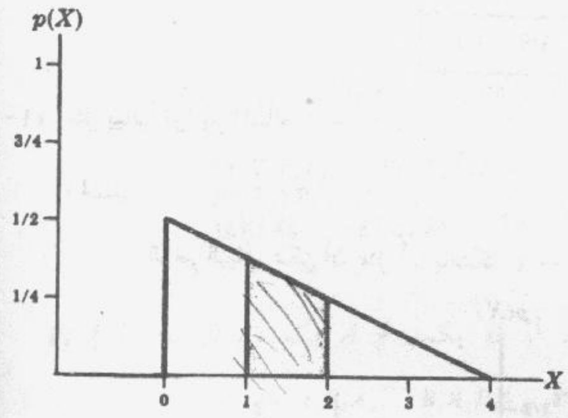
$= ½ (4) (½ + ½ - 4a)$

$= 2 (1 - 4a) = 1$

ومن ذلك $(1 - 4a) = ½, 4a = ½, a = ^1/_8$.

وبما أن $(½ - 4a)$ تساوى الصفر

بهذا فإن الشكل البيانى الصحيح هو المعطى بالشكل ٦ - ٦ .



الشكل ٦ - ٦

(ب) الاحتمال المطلوب معبر عنه بالمساحة المظللة بين $X = 1$, $X = 2$ فى الشكل ٦ - ٦ .

من (أ) $p(X) = ½ - ^1/_8 X$ ، إذن $p(1) = ^3/_8$ و $p(2) = ¼$ هى الاحداثيات عند $X = 1$ و $X = 2$ على الترتيب .

مساحة الشكل الرباعى المطلوب هى $½(1) (^3/_8 + ¼) = ^5/_{16}$

وهو الاحتمال المطلوب .

التوقع الرياضى :

٦ - ١٣ اشترى شخص ورقة يانصيب واحتمال أن يكسب الجائزة الأولى وقدرها £5000 أو الثانية وقدرها £2000 هـو 0.001 للأولى و 0.003 للثانية ماهو السعر العادل الذى يمكن دفعه فى هذه الورقة .

الحــل :

$$\text{التوقع} = (£5000)(0{\cdot}001) + (£2000)(0{\cdot}003) = £5 + £6 = £11$$

وهو السعر العادل الذى يجب دفعه .

٦ - ١٤ فى تجارة معينة تتضمن مخاطرة يمكن أن يكسب شخص £300 باحتمال 0.6 أو يتكبد خسارة £100 باحتمال 0.4 حدد القيمة المتوقعة بالنسبة له .

الحــل :

$$\text{التوقع} = (£300)(0{\cdot}6) - (£100)(0{\cdot}4) = £180 - £40 = £140$$

٦ - ١٥ أوجد (أ) $E(X)$ (ب) $E(X^2)$ (جـ) $E[(X-\bar{X})^2]$ للتوزيع الاحتمالى التالى :

X	8	12	16	20	24
$p(X)$	1/8	1/6	3/8	1/4	1/12

الحــل :

(أ) $$E(X) = \Sigma Xp(X) = (8)(1/8) + (12)(1/6) + (16)(3/8) + (20)(1/4) + (24)(1/12) = 16$$

وهذا يمثل متوسط هذا التوزيع

(ب) $$E(X^2) = \Sigma X^2p(X) = (8)^2(1/8) + (12)^2(1/6) + (16)^2(3/8) + (20)^2(1/4) + (24)^2(1/12) = 276$$

وهذا يمثل العزم الثانى حول نقطة الأصل صفر .

$$\begin{aligned} E[(X-\bar{X})^2] &= \Sigma(X-\bar{X})^2p(X) \\ &= (8-16)^2(1/8) + (12-16)^2(1/6) + (16-16)^2(3/8) + (20-16)^2(1/4) + (24-16)^2(1/12) = 20 \end{aligned}$$

وهذا يمثل تباين هذا التوزيع .

٦ - ١٦ كيس يحتوى على 2 كرة بيضاء و 3 كرات سوداء . أربعة أشخاص A, B, C, D وحسب ترتيب أسمائهم قام كل منهم بسحب كرة والكرة المسحوبة لاتعاد ثانية الأول الذى يسحب كرة بيضاء يحصل على £ 20 . حدد توقع كل منهم .

الحـــل :

بما أن هناك 3 كرات سوأداء فقط ، فإن شخصاً منهم سيكسب فى أول محاولة له . استخدم A, B, C, D للدلالة على الأحداث « A يكسب » « B يكسب » « C يكسب » « D يكسب » على الترتيب .

$\Pr\{A \text{ wins}\} = \Pr\{A\} = \frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$. $\Pr\{$ يكسب A $\}$. بهذا فإن توقع A $£4$ $\frac{2}{5}(£10)$

$\Pr\{$ A يخسرو B يكسب $\}$ $=$ $\Pr\{AB\} = \Pr\{\bar{A}\}\Pr\{B|\bar{A}\}$ $(\frac{3}{5})(\frac{2}{4})$ $\frac{3}{10}$.

وبهذا فإن توقع $B = £3$

$\Pr\{$ A يخسرو B يخسر و C يكسب $\}$ $=$ $\Pr\{\bar{A}\bar{B}C\} = \Pr\{\bar{A}\}\Pr\{\bar{B}|\bar{A}\}\Pr\{C|\bar{A}\bar{B}\} = (\frac{3}{5})(\frac{2}{4})(\frac{2}{3}) = \frac{1}{5}$.

وبهذا فإن توقع $C = £2$

$\Pr\{$ A يخسرو B يخسرو C يخسر و D يكسب $\}$ $=$

$$\Pr\{\bar{A}\bar{B}\bar{C}D\} = \Pr\{\bar{A}\}\Pr\{\bar{B}|\bar{A}\}\Pr\{\bar{C}|\bar{A}\bar{B}\}\Pr\{D|\bar{A}\bar{B}\bar{C}\}$$
$$= (\tfrac{3}{5})(\tfrac{2}{4})(\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{1}) = \tfrac{1}{10}$$

وبهذا فإن توقع $D = £1$.

مراجعة : $£4 + £3 + £2 + £1 = £10$ and $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = 1$

التباديل :

٦ – ١٧ بكم طريقة يمكن ترتيب 5 من البلى المختلفة الألوان فى صف ؟

الحـــل :

يجب أن ترتيب البليات الخمس فى خمس أماكن أى : ....

المكان الأول يمكن شغله بأى من البليات الخمس ، بمعنى ، هناك خمس طرق لشغل المكان الأول ، فإذا فعلنا ذلك فإن هناك 4 طرق لشغل المكان الثانى . ثم بعد ذلك هناك 3 طرق لشغل المكان الثالث ، طريقتان لشغل المكان الرابع وأخيراً طريقة واحدة لشغل المكان الأخير . وبهذا

عدد طرق ترتيب 5 بليات فى صف $= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$

وبشكل عام

عدد طرق ترتيب n من الأشياء المختلفة فى صف وهذه تسمى $= n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$

أيضاً عدد طرق ترتيب n من الأشياء المختلفة مأخوذة n فى كل مرة ويرمز لها بالرمز $_nP_n$.

٦ – ١٨ كم عدد طرق إجلاس 10 أشخاص على مقعد به 4 أماكن فقط ؟

الحـــل :

المكان الأول يمكن شغله بأى من 10 طرق وإذا تم ذلك فإن هناك 9 طرق لشغل المكان الثانى ، 8 طرق لشغل المكان الثالث ، 7 طرق لشغل المكان الرابع .

وبهذا $5040 = 10.9.8.7$ = عدد طرق ترتيب 10 أشخاص مأخوذة بين 4 فى المرة

وبشكل عام

$n(n-1)\ldots(n-r+1)$ = عدد طرق ترتيب n من الأشياء المختلفة مأخوذة r فى المرة وهذا يسمى أيضاً عدد تباديل n من الإشياء المختلفة مأخوذة r فى كل مرة ويرمز لها بالرمز $P_{n,r}$ و $P(n,r)$ ، $_nP_r$.

لاحظ أنه عندما $r = n$ فإن $_nP_n = n!$ كما فى المسألة ٦ – ١٧ .

٦ – ١٩ أحسب (أ) $_8P_3$ (ب) $_6P_4$ (ث) $_{15}P_1$ (ت) $_3P_3$

الحل :

(أ) $_8P_3 = 8.7.6 = 336$ (ب) $_6P_4 = 6.5.4.3 = 360$ (ﺟ) $_{15}P_1 = 15$ (د) $_3P_3 = 3.2.1 = 6$

٦ – ٢٠ من المطلوب إجلاس 5 رجال و 4 نساء فى صف بحيث يشغل النساء الأماكن ذات الأرقام الزوجية . ماهو عدد التراتيب الممكنة ؟

الحل :

عدد طرق إجلاس الرجال هو $_5P_5$ والنساء $_4P_4$. كل ترتيب للرجال يمكن أن يرتبط بكل ترتيب للنساء .

بهذا فإن عدد التراتيب الممكنة = $_5P_5 \cdot {_4P_4} = 5!\,4! = (120)(24) = 2880$

٦ – ٢١ كم من الأعداد المكونة من 4 أرقام يمكن تكوينها من الـ 10 أرقام $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$ إذا كانت :

(أ) يسمح بتكرار الرقم

(ب) غير مسموح بتكرار الرقم

(ﺟ) الرقم الأخير يجب أن يكون صفراً وغير مسموح بتكرار الأرقام .

الحل :

(أ) الرقم الأول يمكن أن يكون أى رقم من 9 أرقام (حيث أن الصفر غير مسموح به) الرقم الثانى ، الرقم الثالث والرابع يمكن أن يكون أى رقم من الارقام العشرة . إذن $9000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 9$ رقم يمكن تكوينهم .

(ب) الرقم الأول يمكن أن يكون أى رقم من 9 أرقام (حيث أن الصفر غير مسموح به)

الرقم الثانى يمكن أن يكون أى رقم من 9 أرقام (أى رقم ماعداً الذى ظهر فى الخانة الأولى)

الرقم الثالث يمكن أن يكو نأى رقم من 8 أرقام (أى رقم ماعداً الذى ظهر فى الخانتين الأولى والثانية) .

الرقم الرابع يمكن أن يكون أى رقم من 7 أرقام (أى رقم ماعدا الذى ظهر فى الخانات الثلاث الأولى)

إذن $4536 = 9.9.8.7$ عدد يمكن تكوينه .

طريقة اخرى :

الرقم الأول يمكن أن يكون أى رقم من 9 الخانات الثلاث الأخرى يمكن اختيارها بـ ${}_9P_3$ طريقة .

إذن $9 . {}_9P_3 = 9.9.8.7 = 4536$ عدد يمكن تكوينه .

(جـ) الرقم الأول يمكن اختياره بـ 9 طرق ، الثانى بـ 8 طرق والثالث بـ ${}_8P_3$ طرق .

إذن $9.8.7 = 504$ عدد يمكن تكوينه .

طريقة اخرى :

الرقم الأول يمكن اختياره بـ 9 طرق والرقان التاليان يمكن اختيارهما بـ ${}_8P_2$ طرق .

إذن $9 \; {}_8P_2 = 9.8.7 = 504$ عدد يمكن تكوينه .

٦ - ٢٢ أربعة كتب مختلفة فى الرياضة ، ستة كتب مختلفة فى الطبيعة و كتابان مختلفان فى الكيمياء مطلوب ترتيبهما على رف . ماهى عدد التراتيب المختلفة والممكنة إذا .

(أ) توضع الكتب المتعلقة بنفس الموضوع متجاورة .

(ب) كتب الرياضة فقط هى التى يجب أن توضع متجاورة .

الحـل :

(أ) عدد طرق ترتيب كتب الرياضة فيما بينها هى $_4P_4 = 4!$ طريقة ، وعدد طرق ترتيب كتب الطبيعة هو $_6P_6 = 6!$ طريقة وكتب الكيمياء $_2P_2 = 2!$ طريقة وعدد طرق ترتيب المجموعات الثـلاث هو $_3P_3 = 3!$

بهذا فإن عدد التراتيب الممكنة هو $4!\ 6!\ 2!\ 3! = 207\ 360$

(ب) يمكن اعتبار كتب الرياضة الأربعة ككتاب واحد كبير . بهذا يكون لدينا 9 كتب والتى يمـكن ترتيبهما بـ $_9P_9 = 9!$ طريقة . فى كل من هذه الطرق توضع كتب الرياضة معاً . ويكون عدد طرق ترتيب كتب الرياضة فيما بينهما هو $_4P_4 = 4!$ طريقة ، إذن .

عـدد التراتيب المطلوبة $= 9!\,4! = 8709\ 120$.

٦ - ٢٣ رتب فى صف خمساً من البلى الأحمر واثنين من البلى الأبيض وثلاثاً من البلى الأزرق . إذا كان البلى من نفس اللون لايمكن تميزه من بعض ، فماهو عدد التراتيب المختلفة الممكنة :

الحـل :

نفترض أن هناك P من التراتيب المختلفة . بضرب P فى عدد طرق تراتيب

(أ) البلى ا لخمس الأحمر فيما بينها .

(ب) إثنان من البلى الأبيض فيما بينها .

(جـ) الثلاثة من البلى الأزرق فيما بينها .

(بمعنى ضرب P فى $5!\ 2!\ 3!$) ، ثم نحصل على عدد طرق ترتيب 10 من البلى إذا كانت كل بلية متميزة عن الأخرى وهى $10!$.

إذن $(5!2!3!)\,P = 10!$ و $P = 10!\,/\,(5!\,2!\,3!)$

وبشكل عام ، عدد طرق التراتيب المختلفة لـ n من الأشياء مقسمة إلى n_1 من الأشياء المتشابهة n_2 من الأشياء المتشابهة $\ldots,n_k$ من الأشياء المتشابهة هى $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$ حيث $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

٦ – ٢٤ بكم طريقة يمكن أن يجلس 7 من الأشخاص حول مائدة دائرية إذا :

(أ) يمكن أن يجلسوا فى أى مكان . (ب) شخصان معينان يجب أن لايجلسوا متجاورين .

الحل :

(أ) اعتبر أن واحداً منهم يمكن أن يجلس فى أى مكان . وبهذا فإن الـ 6 أشخاص الباقين يمكن أن يجلسوا بـ $720 = 6!$ طريقة ، وهو عدد طرق ترتيب 7 أشخاص فى دائرة .

(ب) اعتبر أن الشخصين المعينين كشخص واحد . وبهذا سيكون هناك 6 أشخاص يمكن ترتيبهم بـ $5!$ ولكن الشخصين اللذين اعتبرناهما كشخص واحد يمكن ترتيبهما فيما بينهم بـ $2!$ طريقة . وبهذا فإن عدد طرق ترتيب 6 أشخاص حول مائدة مستديرة بحيث يجلس شخصان معينان معاً $=240 = 5!\ 2!$ باستخدام (أ) ، عدد الطرق التى يمكن أن يجلس بها 6 أشخاص حول مائدة مستديرة بحيث أن شخصين معينين لايجلسان بجوار بعضهما هو $480 = 720 - 240 =$ طريقة .

التباديل :

٦ – ٢٥ ماهى عدد الطرق التى يمكن أن يقسم بها 10 أشياء إلى مجموعتين مكونتين من 4 و 6 أشياء على الترتيب ؟

الحل :

هذه مثل عدد تراتيب 10 من الأشياء حيث 4 أشياء متشابهة فيما بينهما و 6 أشياء أخرى متشابهة فيما بينها .

من المسألة ٦ – ٢٣ النتيجة هى $\dfrac{10!}{4!\,6!} = \dfrac{10\,.\,9\,.\,8\,.\,7}{4!} = 210$

هـذه المشكلة مكافئة لمشكلة الحصول على عدد اختيارات 4 من 10 من الأشياء (أو 6 من 10 من الأشياء) وذلك بدون أهمية لترتيب الاختيار .

وبشكل عام عـدد اختيارات r من n من الأشياء ، ويسمى عدد تباديل n من الأشياء مأخوذة r فى المرة يرمز لها بالرمز $\binom{n}{r}$ ، $C(n,r)$ ، ${}_nC_r$ ويعطى بالصيغة .

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

٦ – ٢٦ احسب (أ) ${}_7C_4$ (ب) ${}_6C_5$ (جـ) ${}_4C_4$

الحــل :

(أ) $${}_7C_4 = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7.6.5.4}{4!} = \frac{7.6.5}{3.2.1} = 35$$

(ب) $${}_6C_5 = \frac{6!}{5!\,1!} = \frac{6.5.4.3.2}{5!} = 6, \text{ or } {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

(جـ) ${}_4C_4$ هو عدد اختيارات 4 أشياء مأخوذة كلها مرة واحدة .

إذن ${}_4C_4 = 1$.

لاحظ أن ${}_4C_4 = \frac{4!}{4!\,0!} = 1$ إذا عرفنا $0! = 1$.

٦ – ٢٧ كم طرق اختيار لجنة مكونة من 5 من 9 أشخاص ؟

الحــل :

$${}_9C_5 = \frac{9!}{5!\,4!} = \frac{9.8.7.6.5}{5!} = 126$$

٦ – ٢٨ من بين 5 من علماء الرياضة و 7 من علماء الطبيعة ، المطلوب تشكيل لجنة تكون من 2 من علماء الرياضة و 3 من علماء الطبيعة . بكم طريقة يمكن أن يتم ذلك إذا ،

(أ) أى عالم رياضى أو عالم طبيعى يمكن دخوله اللجنة .

(ب) عالم طبيعة معين يجب أن يكون ضمن اللجنة .

(جـ) إثنان معينان من علماء الرياضة يجب ألا يكونا ضمن اللجنة .

الحــل :

(أ) عدد طرق اختيار 2 من بين 5 من علماء الرياضة هى ${}_5C_2$ طريقة ، عدد طرق اختيار 3 من بين 7 من علماء الطبيعة هى ${}_7C_3$ طريقة .

عدد طرق الاختيار الممكنة $= {}_5C_2 \cdot {}_7C_3 = 10 . 35 = 250$

(ب) عدد طرق اختيار 2 من بين 5 من علماء الرياضة هى ${}_5C_2$ طريقة عدد طرق اختيار عالمين إضافيين من علماء الطبيعة من بين 6 علماء هى ${}_6C_2$ طريقة .

عدد طرق الاختيار الممكنة $= {}_5C_2 \cdot {}_6C_2 = 10 . 15 = 150$

(جـ) عدد طرق اختيار 2 من بين 3 من علماء الرياضة هى ${}_3C_2$ طريقة ، عدد طرق اختيار 3 من بين 7 من علماء الطبيعة هى ${}_7C_3$ طريقة .

عدد طرق الاختيار الممكنة $= {}_3C_2 \cdot {}_7C_3 = 3 . 35 = 105$

٦ – ٢٩ طفل معه خمس عملات كل عملة لها قيمة مختلفة . ماهو عدد مجموع النقود المختلفة التي يمكن له تكوينها .

الحـل :

بما أن كل عملة يمكن التعامل معها بطريقتين ، أما أن تختار أولا تختار . وبما أن كلا من الطريقتين التي يتم بهما التعامل مع العملة ترتبط بطريقتين للتعامل مع كل عملة من العملات الأخرى . فإن عدد طرق التعامل مع العملات الخمس هى 2^5 طريقة . ولكن الـ 2^5 طريقة تتضمن الحالة التي لانأخذ فيها أي عملة . وبهذا يكون الرقم المطلوب لمجاميع النقود = $2^5 - 1 = 31$.

طريقة اخرى :

من الممكن اختيار 1 من 5 من العملات ، 2 من 5 عملات ، ... ، 5 من 5 عملات . وبهذا فإن عدد مجاميع النقود المطلوب هو

$$_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$$

وبشكل عام ، ولأي قيمة صحيحة موجبة n و $_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \dots + {}_nC_n = 2^n - 1$

٦ – ٣٠ من 7 حروف ساكنة و 5 حروف متحركة ، ماهو عدد الكلمات المكونة من 4 حروف ساكنة مختلفة و 3 حروف متحركة مختلفة ؟ ليس من الضروري أن تكون الجملة لها معنى .

الحـل :

عدد طرق اختيار 4 حروف ساكنة مختلفة هي $_7C_4$ ، عدد طرق اختيار 3 حروف متحركة مختلفة هي $_5C_3$ طريقة . والـ 7 حروف المختلفة (4 ساكنة 3 متحركة) يمكن ترتيبهما بين أنفسهم بعدد طرق $_7P_7 = 7$

إذن $\quad {}_7C_4 \cdot {}_5C_3 \cdot 7! = 35 \cdot 10 \cdot 5040 = 1\,764\,000$ = عدد الكلمات .

تقريب سترلينج لـ $n!$:

٦ – ٣١ احسب $50!$.

الحـل :

لقيم n الكبيرة

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

وبهذا فإن

$$50! \sim \sqrt{2\pi(50)}\, 50^{50} e^{-50} = S.$$

ولحساب قيمة S تستخدم اللوغاريتمات للأساس 10 . إذن

$$\begin{aligned}\log S = \log(\sqrt{100\pi}\ 50^{50} e^{-50}) &= \tfrac{1}{2}\log 100 + \tfrac{1}{2}\log \pi + 50\log 50 - 50\log e \\ &= \tfrac{1}{2}\log 100 + \tfrac{1}{2}\log 3{\cdot}142 + 50\log 50 - 50\log 2{\cdot}718 \\ &= \tfrac{1}{2}(2) + \tfrac{1}{2}(0{\cdot}4972) + 50(1{\cdot}6990) - 50(0{\cdot}4343) = 64{\cdot}4836\end{aligned}$$

ومنها $S = 3{\cdot}04 \times 10^{64}$ ، وهو عدد له 65 رقم .

الاحتمال والتحليل التوافقى :

٦ – ٣٢ صندوق يحتوى على 8 كرات حمراء ، 3 بيضاء و 9 كرات زرقاء . إذا سحبت 3 كرات عشوائياً ، أوجد احتمالات . (أ) الكرات الثلاث الحمراء . (ب) 2 حمراء و كرة بيضاء . (ج) على الأقل كرة بيضاء . (د) كرة من كل لون تم سحبها . (هـ) الكرات سحبت بالترتيب حمراء ، بيضاء ، زرقاء .

الحـــل :

(أ) الطريقة الأولى :

اعتبر R_1, R_2, R_3 تعبر عن الأحداث R_1 كرة حمراء فى السحبة الأولى ، R_2 كرة حمراء فى السحبة الثانية ، R_3 كرة حمراء فى السحبة الثالثة .

إذن R_1, R_2, R_3 تعبر عن الحدث « كل الكرات المسحوبة حمراء » .

$$\Pr\{R_1R_2R_3\} = \Pr\{R_1\}\Pr\{R_2|R_1\}\Pr\{R_3|R_1R_2\} = (8/20)(7/19)(6/18) = 14/285$$

الطريقة الثانية :

$$\text{الاحتمال المطلوب} = \frac{\text{عدد طرق اختيار 3 من 8 من الكرات الحمراء}}{\text{عدد طرق اختيار 3 من 20 من الكرات}} = \frac{{}_8C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{14}{285}$$

(ب) باستخدام الطريقة الموضحة فى (أ) ، $\Pr\{\text{(الكرات الثلاث البيضاء)}\} = \frac{{}_3C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{1}{1140}$

الطريقة الأولى المشار إليها فى (أ) يمكن أيضاً استخدامها .

(ج) $\Pr\{\text{كرتان حمراء و كرة بيضاء}\} =$

$$= \frac{\text{(اختيار 2 من 8 من الكرات الحمراء) (اختيار كرة من 3 كرات بيضاء)}}{\text{عدد اختيار 3 كرات من 20 كرة}}$$

$$\frac{{}_8C_2 \cdot {}_3C_1}{{}_{20}C_3} = \frac{7}{95}$$

(د) $\Pr\{\text{عدم وجود كرات بيضاء}\} \quad \frac{{}_{17}C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{34}{57}$

إذن $\Pr\{\text{وجود كرة بيضاء على الأقل}\} = 1 - \frac{34}{57} = \frac{23}{57}$

(هـ) $\Pr\{\text{سحب كرة من كل لون}\} = \frac{{}_8C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_9C_1}{{}_{20}C_3} = \frac{18}{95}$

$\Pr\{\text{الكرات المسحوبة بالترتيب أحمر ، أبيض ، ازرق}\} = 1/3!\ \Pr\{\text{سحب كرة من كل لون}\}$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{18}{95}\right) = \frac{3}{95}$$

باستخدام (و) .

طريقة اخرى : $\Pr\{R_1W_2B_3\} = \Pr\{R_1\}\Pr\{W_2|R_1\}\Pr\{B_3|R_1W_2\} = (8/20)(3/19)(9/18) = 3/95$

٦ – ٣٣ سحبت خمسة كروت من مجموعة أوراق لعب مكونة من 52 كارت ممزوجة مزجاً جيداً . أوجد احتمال الحصول على (أ) 4 آس (ب) 4 آس و كارت ملك (جـ) 3 عليها العدد 10 و 2 ولد (د) الـ 9 ,10 ، ولد ، الملكة ، الملك بأى ترتيب (هـ) 3 من نفس المجموعة و 2 من مجموعة أخرى (و) الحصول على آس على الأقل .

الحـــل :

(أ) $$\Pr\{\text{4 آس}\} = \frac{{}_4C_4 \cdot {}_{48}C_1}{{}_{52}C_5} = \frac{1}{54\,145}$$

(ب) $$\Pr\{\text{4 آس ، 1 ملك}\} = \frac{{}_4C_4 \cdot {}_4C_1}{{}_{52}C_5} = \frac{1}{649\,740}$$

(جـ) $$\Pr\{\text{3 عشرة ، 2 ولد}\} = \frac{{}_4C_3 \cdot {}_4C_2}{{}_{52}C_5} = \frac{1}{108\,290}$$

(د) $$\Pr\{\text{10 ، 9 ولد ، ملكة وملك فى أى ترتيب}\} = \frac{{}_4C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_4C_1}{{}_{52}C_5} = \frac{6}{162\,435}$$

(هـ) $$\Pr\{\text{3 من أى مجموعة ، 2 من مجموعة أخرى}\} = \frac{4\,{}_{13}C_3 \cdot 3\,{}_{13}C_2}{{}_{52}C_5} = \frac{429}{4165}$$

حيث أن هناك 4 طرق لاختيار المجموعة الأولى و 3 طرق لاختيار المجموعة الثانية .

(و) $$\Pr\{\text{عدم الحصول على آس}\} = \frac{{}_{48}C_5}{{}_{52}C_5} = \frac{35\,673}{54\,145}$$

$$\Pr\{\text{الحصول على آس على الأقل}\} = 1 - \frac{35\,673}{54\,145} = \frac{18\,472}{54\,145}$$

٦ – ٣٤ أوجد احتمال ظهور الرقم 6 ثلاث مرات فى 5 رميات لزهرة طاولة متوازنة .

الحـــل :

اعتبر أن رمية زهرة الطاولة يمكن تمثيلها كخمس مسافات ‐ ‐ ‐ ‐ ‐ فى كل مسافة سيكون لدينا أما الحدث 6 أو الحدث ليس 6 $(\bar{6})$. على سبيل المثال ثلاثة من الأرقام 6 ورقان من غير الأرقام 6 يمكن حدوثها كالآتى : $6\,6\,\bar{6}\,6\,\bar{6}$ or $6\,\bar{6}\,6\,\bar{6}\,6$

وهكذا احتمال حدث مثل $6\,6\,\bar{6}\,6\,\bar{6}$ هو

$$\Pr\{6\,6\,\bar{6}\,6\,\bar{6}\} = \Pr\{6\}\Pr\{6\}\Pr\{\bar{6}\}\Pr\{6\}\Pr\{\bar{6}\} = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{5}{6} = (\tfrac{1}{6})^3(\tfrac{5}{6})^2$$

كذلك $\Pr\{6\,\bar{6}\,6\,\bar{6}\,6\} = (\tfrac{1}{6})^3(\tfrac{5}{6})^2$ ، وهكذا ، لكل الأحداث المكونة من ثلاثة من الرقم 6 ، ورقان ليسا 6 . ولكن هناك ${}_5C_3 = 10$ من هذه الأحداث وهذه الأحداث أحداث متنافية . وبهذا فإن الاحتمال المطلوب هو

$$\Pr\{6\,6\,\bar{6}\,6\,\bar{6} \text{ or } 6\,\bar{6}\,6\,\bar{6}\,6 \text{ or etc.}\} = {}_5C_3(\tfrac{1}{6})^3(\tfrac{5}{6})^2 = \tfrac{125}{3888}$$

وبشكل عام ، إذا كان $p = \Pr\{E\}$ ، $q = \Pr\{\bar{E}\}$ ، فانه باستخدام نفس المبررات التى ذكرناها فيما سبق فإن احتمال الحصول على $X\ E$'s بالضبط من N محولة هو

$$_{N}C_{X}\, p^{X} q^{N-X}$$

٦ – ٣٥ فى مصنع لوحظ أن متوسط الوحدات التالفة بالنسبة لمواصفات معينة فى انتاج آلة معينة لإنتاج المسامير هو 20% إذا اختير 10 مسامير عشوائياً من الانتاج اليومى لهذه الآلة ، أوجد احتمال وجود :

(أ) 2 بالضبط تالفين (ب) 2 أو أكثر تالفين (جـ) أكثر من 5 من الإنتاج تالف .

الحــل :

(أ) $\Pr\{\text{2 عدد المسامير التالفة}\} = {}_{10}C_2(0{\cdot}2)^2(0{\cdot}8)^8 = 45(0{\cdot}04)(0{\cdot}1678) = 0{\cdot}0302$

باستخدام مبررات مماثلة للمسألة ٦ – ٣٤ .

(ب)

$\Pr\{\text{عدد المسامير التالفة 2 أو أكثر}\}$

$$= 1 - \Pr\{\text{عدد المسامير التالفة 0}\} - \Pr\{\text{عدد المسامير التالفة 1}\}$$
$$= 1 - {}_{10}C_0(0{\cdot}2)^0(0{\cdot}8)^{10} - {}_{10}C_1(0{\cdot}2)^1(0{\cdot}8)^9$$
$$= 1 - (0{\cdot}8)^{10} - 10(0{\cdot}2)(0{\cdot}8)^9 \quad 1 - 0{\cdot}1074 - 0{\cdot}2684 = 0{\cdot}6242$$

(جـ)

$\Pr\{\text{عدد المسامير التالفة أكثر من 5}\} =$

$$\Pr\{\text{6 تالف}\} + \Pr\{\text{7 تالف}\} + \Pr\{\text{8 تالف}\} + \Pr\{\text{9 تالف}\} + \Pr\{\text{10 تالف}\}$$

$$= {}_{10}C_6(0{\cdot}2)^6(0{\cdot}8)^4 + {}_{10}C_7(0{\cdot}2)^7(0{\cdot}8)^3 + {}_{10}C_8(0{\cdot}2)^8(0{\cdot}8)^2$$
$$+ {}_{10}C_9(0{\cdot}2)^9(0{\cdot}8) + {}_{10}C_{10}(0{\cdot}2)^{10}$$
$$= 0{\cdot}006\,37.$$

٦ – ٣٦ فى 1000 عينة كل عينة مكونة من 10 مسامير مأخوذة حسب بيانات المسألة السابقة ، كم من هذه العينة نتوقع أن نجد

(أ) عدد المسامير التالفة 2 بالضبط

(ب) عدد المسامير التالفة 2 أو أكثر

(جـ) عدد المسامير التالفة أكثر من 5 ؟

الحــل :

(أ) $(1000)(0{\cdot}0302) = 30$ = العدد المتوقع من المسألة ٦ – ٣٥ (أ)

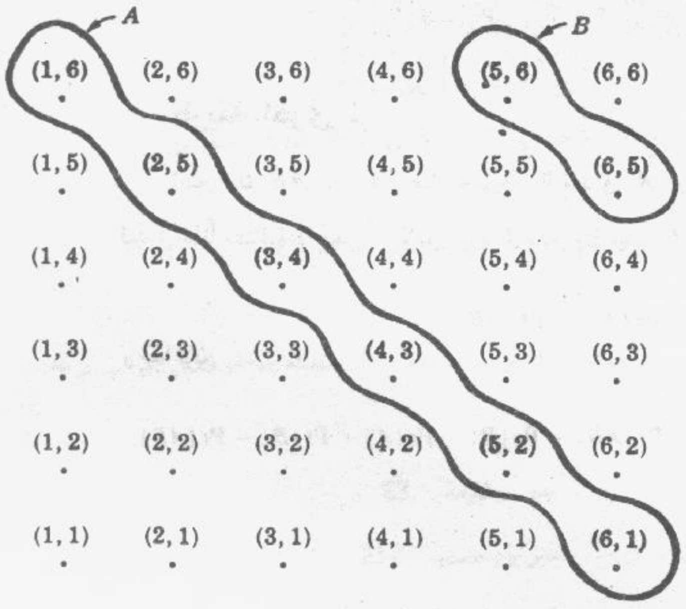
(ب) $(1000)(0{\cdot}6242) = 624$ = العدد المتوقع من المسألة ٦ – ٣٥ (ب)

(جـ) $(1000)(0{\cdot}006\,37) = 6$ = العدد المتوقع من المسألة ٦ – ٣٥ (جـ)

مجال العينة وأشكال أيلر :

٦ – ٣٧ (أ) كون مجال العينة لرمية زهرتى طاولة غير متحيزتين مرة واحدة .

(ب) من مجال العينة أوجد احتمال أن المجموع فى رمية زهرتى طاولة هو إما 7 أو 11 .



شكل ٦ – ٧

الحـــل :

(أ) يتكون مجال العينة من مجموعة النقطة المبينة فى الشكل ٦ – ٧ . الاحداثى الأول لكل نقطة يبين العدد الموضح على إحدى الزهرتين والأحـــداثى الثانى يبين العدد الموضح على الزهرة الأخرى . العدد الكلى للنقط هو 36 ونخصص لكل نقطة احتمالا قدره 1/36 . وبهذا يكون مجموع احتمالات جميع النقط فى المجال هو 1 .

(ب) مجموع النقط المقابلة للأحداث « المجموع 7 » مشار إليها بـ A و « المجموع 11 » مشار إليها بـ B .

$\Pr\{A\} =$ مجموع الاحتمالات المرتبطة بكل نقطة فى A $= 6/36$

$\Pr\{B\} =$ مجموع الاحتمالات المرتبطة بكل نقطة فى B $= 2/36$

$\Pr\{A+B\} =$ { مجموع احتمالات النقط الموجودة فى A أو فى B أو فى كليهما } $= (6+2)/36 = 8/36 = 2/9$

لاحظ أنه فى هذه الحالة $\Pr\{A+B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\}$.

نظراً لأن B و A ليس بينهما نقط مشتركة ، بمعنى أنهما أحداث متنافية .

٦ – ٣٨ باستخدام مجال عينة ، وضح أن

(أ) $\Pr\{A+B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\}$

(ب) $\Pr\{A+B+C\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} + \Pr\{C\} - \Pr\{AB\} - \Pr\{BC\} - \Pr\{AC\} + \Pr\{ABC\}$

الحـــل :

(أ) اعتبر أن B و A مجموعتان من النقط بينهما نقط مشتركة ممثلة بـ AB كما فى الشكل ٦ – ٨ .

تتكون A من $A\bar{B}$ و AB بينما B تتكون من AB و $B\bar{A}$.

المجموع الكلى للنقط فى $A+B$ (أما فى A أو فى B أو فى كليهما)

= المجموع الكلى للنقط فى A + المجموع الكلى للنقط فى B — المجموع الكلى للنقط فى AB .

و بما أن احتمال أى حدث أو فئة = مجموع الاحتمالات المرتبطة بنقط الفئة فإن

$$\Pr\{A+B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\}$$

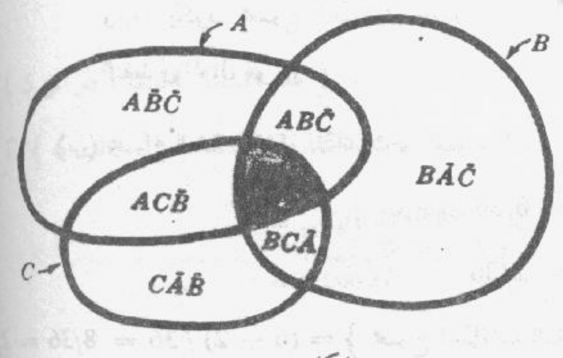
طريقة أخرى :

اعتبر أن $A - AB$ تمثل مجموعة النقط فى A والتى ليست فى B (مثل $A\bar{B}$) فإن $A - AB,\ B$ تعد أحداثاً متنافية (بمعنى أنه لايوجد نقط مشتركة بينهما) . كذلك

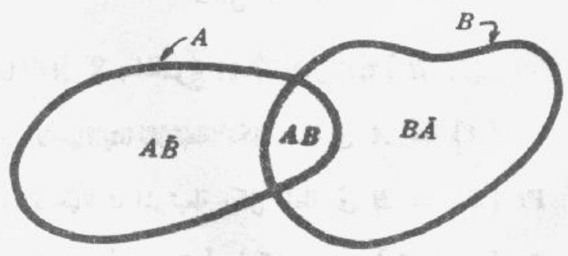
$$\Pr\{A - AB\} = \Pr\{A\} - \Pr\{AB\}.$$

و بهذا فإن

$$\Pr\{A+B\} = \Pr\{A-AB\} + \Pr\{B\} = \Pr\{A\} - \Pr\{AB\} + \Pr\{B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\}$$



شكل ٦ — ٩



شكل ٦ — ٨

(ب) اعتبر أن A, B, C مجموعات ثلاث من النقط كما هوموضح بالشكل ٦ — ٩ الرمز $AB\bar{C}$ يعنى النقط الموجودة فى A, B معاً وغير الموجودة فى C والرموز الأخرى لها معان مشابهة .

من الممكن اعتبار أن النقط الموجودة أما فى A أو B أو C أنها النقط المتضمنة فى ال 7 مجموعات المتنافية بالشكل ٦ — ٩ أعلاه ، منها 4 مجموعات مظللة و 3 غير مظللة . الاحتمال المطلوب هو .

$$\Pr\{A+B+C\} = \Pr\{A\bar{B}\bar{C}\} + \Pr\{B\bar{C}\bar{A}\} + \Pr\{C\bar{A}\bar{B}\} + \Pr\{AB\bar{C}\} + \Pr\{BC\bar{A}\} + \Pr\{CA\bar{B}\} + \Pr\{ABC\}$$

والآن للحصول على $A\bar{B}\bar{C}$ ، على سبيل المثال ، فإننا نحذف النقطة المشتركة بين B و A وكذلك بين A, C ، ولكن هذا يؤدى إلى أن نحذف النقطة المشتركة بين A, B, C مرتين .

وبهذا فإن $A\bar{B}\bar{C} = A - AB - AC + ABC$

$$\Pr\{A\bar{B}\bar{C}\} = \Pr\{A\} - \Pr\{AB\} - \Pr\{AC\} + \Pr\{ABC\}$$

وبنفس الطريقة ، نجد أن

$$\begin{aligned}
\Pr\{B\bar{C}\bar{A}\} &= \Pr\{B\} - \Pr\{BC\} - \Pr\{BA\} + \Pr\{BCA\}\\
\Pr\{C\bar{A}\bar{B}\} &= \Pr\{C\} - \Pr\{CA\} - \Pr\{CB\} + \Pr\{CAB\}\\
\Pr\{BC\bar{A}\} &= \Pr\{BC\} - \Pr\{ABC\}\\
\Pr\{CA\bar{B}\} &= \Pr\{CA\} - \Pr\{BCA\}\\
\Pr\{AB\bar{C}\} &= \Pr\{AB\} - \Pr\{CAB\}\\
\Pr\{ABC\} &= \Pr\{ABC\}
\end{aligned}$$

بتجميع هذه المعادلات السبع مع الأخذ فى الاعتبار أن $\Pr\{AB\} = \Pr\{BA\}$ فأننا نحصل على

$$\Pr\{A+B+C\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} + \Pr\{C\} - \Pr\{AB\} - \Pr\{BC\} - \Pr\{AC\} + \Pr\{ABC\}$$

٦ - ٣٩ فى بحث شمل 500 طالب يدرسون مادة أو أكثر من المواد ، الجبر . الطبيعة ، الإحصاء خلال فصل دراسى وجدت الأرقام التالية للطلبة الذين يدرسون المواد الموضحة .

الجبر	329	جبر وطبيعة	83
طبيعة	186	جبر وإحصاء	217
إحصاء	295	طبيعة وإحصاء	63

كم عدد الطلبة الذين يدرسون

(أ) كل المواد الثلاث (ب) يدرسون الجبر ولا يدرسون الإحصاء

(جـ) يدرسون الطبيعة ولا يدرسون الجبر

(د) يدرسون الإحصاء ولا يدرسون الطبيعة

(هـ) يدرسون الجبر أو الإحصاء ولا يدرسون الطبيعة

(و) يدرسون الجبر ولا يدرسون الطبيعة أو الإحصاء

الحـــل :

اعتبر أن A ترمز لمجموعة الطلبة الذين يدرسون الجبر ، و A يرمز لعدد الطلبة المنتمين لهذه المجموعة . كذلك اعتبر أن B يرمز لعدد الطلبة الذين يدرسون الطبيعة ، C عدد الطلبة الذين يدرسون الإحصاء .

بهذا فإن $(A+B+C)$ يرمز للعدد الذين يدرسون أما الجبر أو الطبيعة أو الإحصاء أو أى توافيق منها ، (AB) ترمز لعدد الذين يدرسون كلا من الجبر والطبيعة . وهكذا . وكما فى المثال السابق ، فإن

$$(A+B+C) = (A) + (B) + (C) - (AB) - (BC) - (AC) + (ABC)$$

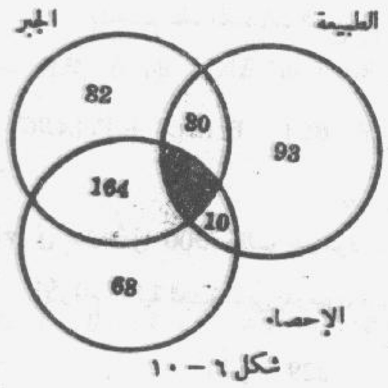
(أ) بالتعويض بالأرقام المعطاة فى هذه الصيغة فإننا نجد

$$500 = 329 + 186 + 295 - 83 - 63 - 217 + (ABC)$$

أو $(ABC) = 53$ ، وهو عدد الطلبة الذين يدرسون الجبر والطبيعة والإحصاء . لاحظ أن الاحتمال (الاعتبارى) لأن يدرس الطالب المواد الثلاث هو 53/500 .

(ب) لحصول على المعلومات المطلوبة من الملائم تكوين شكل أيلر يبين عدد الطلبة الذين ينتمون لكل مجموعة .

تبدأ من حقيقة أن هناك 53 طالب يدرسون المواد الثلاث ، ومنه نستنتج أن عدد الطلبة الذين يدرسون الجبر والإحصاء ولا يدرسون الطبيعة هو $217 - 53 = 164$ وهو الموضح بالرسم ٦ — ١٠ . ومن البيانات المعطاة فإننا نحصل على الأرقام الموضحة .



شكل ٦ — ١٠

من البيانات المعطاة، عدد الطلبة الذين يدرسون الجبر ولا يدرسون الإحصاء هو $329 - 217$ أو من الشكل ٦ — ١٠ ، $112 = 30 + 82$.

(ج) عدد الذين يدرسون الطبيعة ولا يدرسون الجبر $103 = 10 + 93$.

(د) عدد الذين يدرسون الإحصاء ولا يدرسون الطبيعة $232 = 164 + 68$.

(هـ) عدد الذين يدرسون الجبر أو الإحصاء ولا يدرسون الطبيعة $314 = 68 + 164 + 82$.

(و) عدد الذين يدرسون الجبر ولا يدرسون الطبيعة أو الأحصاء $= 82$

مسائل اضافية

المبادىء الأساسية للاحتمالات :

٦ — ٤٠ أوجد الاحتمال p ، أو تقدير له ، لكل من الأحداث التالية :

(أ) ظهور ملك ، آس ، ولد سباق ، أو بنت دينارى عند سحب ورقة وحدة من مجموعة أوراق لعب (كوتشينة) مخلوطة خلطاً جيداً .

(ب) ظهور مجموع 8 فى رمية واحدة لزهرتى طاولة غير متحيزتين .

(جـ) وجود مسمار غير تالف من 600 مسمار تم اختيارها ووجد أن بها 12 مسمار تالف .

(د) ظهور مجموع 7 أو 11 فى رمية واحدة لزهرتى طاولة غير متحيزتين .

(هـ) ظهور الصورة مرة على الأقل فى رمية عملة متوازنة ثلاث مرات .

ج : (أ) 5/26 (ب) 5/36 (جـ) 0.98 (د) 2/9 (هـ) 7/8 .

٦ - ٤١ فى تجربة مكونة من سحب ثلاثة كروت على التوالى من مجموعة أوراق لعب عادية مخلوطة خلطاً جيداً . اعتبر E_1 يمثل الحدث « ملك » فى السحبة الأولى ، E_2 الحدث « ملك » فى السحبة الثانية E_3 الحدث « ملك » فى السحبة الثالثة .

عبر بالكلمات على كل مما يلى :

(أ) $\Pr\{E_1\bar{E}_2\}$ (ب) $\Pr\{E_1 + E_2\}$ (جـ) $\bar{E}_1 + \bar{E}_2$

(د) $\Pr\{E_3 | E_1\bar{E}_2\}$ (هـ) $\bar{E}_1\bar{E}_2\bar{E}_3$ (و) $\operatorname{pr}\{E_1E_2 + \bar{E}_2E_3\}$.

ج : (أ) احتمال ظهور الملك فى السحبة الأولى وعدم ظهور الملك فى السحبة الثانية .

(ب) احتمال ظهور الملك أما فى السحبة الأولى أو فى السحبة الثانية أو كليهما .

(جـ) عدم ظهور الملك لا فى السحبة الأولى ولا فى السحبة الثانية ولا فى كليهما معاً .

(د) احتمال ظهور الملك فى السحبة الثالثة علماً بأن الملك قد ظهر فى السحبة الأولى ولم يظهر فى السحبة الثانية .

(هـ) عدم ظهور الملك فى أى من السحبات الثلاث .

(و) احتمال ظهور الملك فى كل من السحبتين الأولى والثانية معاً أو عدم ظهور الملك فى السحبة الثانية مع ظهوره فى السحبة الثالثة .

٦ - ٤٢ سحبت كرة عشوائياً من صندوق به 10 كرات حمراء ، 30 كرة بيضاء ، 20 كرة زرقاء و 15 كرة برتقالية .

أوجد احتمال أن تكون الكرة :

(أ) برتقالية أو حمراء . (ب) ليست حمراء أو زرقاء . (جـ) ليست زرقاء .

(د) بيضاء . (هـ) حمراء أو بيضاء أو زرقاء .

ج : (أ) 1/3 (ب) 3/5 (جـ) 11/15 (د) 2/5 (هـ) 4/5

٦ - ٤٣ سحبت كرتان على التوالى من الصندوق الموضح فى المسألة السابقة ، ويتم إعادة الكرة المسحوبة بعد كل سحبة . أوجد احتمال أن تكون :

(أ) الكرتان بيضاء . (ب) الأولى حمراء والثانية بيضاء . (جـ) لا توجد بينهما كرة برتقالية .

(د) الكرتان إما كلاهما حمراء أو كلاهما بيضاء أو إحداهما حمراء والأخرى بيضاء .

(هـ) الكرة الثانية ليست زرقاء . (و) الكرة الأولى برتقالية .

(ز) على الأقل واحدة زرقاء . (ح) على الأكثر واحدة حمراء .

(ط) الأولى بيضاء ولكن الثانية ليست بيضاء . (ى) كرة واحدة فقط حمراء .

ج : (أ) 4/25 (ب) 4/75 (جـ) 16/25 (د) 64/225 (هـ) 11/15 (و) 1/5 (ز) 104/225

(ح) 221/225 (ط) 6/25 (ى) 52/225 .

٦ – ٤٤ حل المسألة السابقة إذا كانت الكرة التي تسحب لا تعاد مرة أخرى .

ج : (أ) 29/185 (ب) 2/37 (جـ) 118/185 (د) 52/185 (هـ) 11/15 (و) 1/5
(ز) 86/185 (ح) 182/185 (ط) 9/37 (ى) 26/111 .

٦ – ٤٥ فى رميتين لزهرتى طاولة متوازنتين أوجد احتمال تسجيل مجموع 7 نقط

(أ) مرة (ب) على الأقل مرة (جـ) مرتين

ج : (أ) 5/18 (ب) 11/36 (جـ) 1/36

٦ – ٤٦ سحبت ورقتان على التوالى من مجموعة أوراق لعب عادية مكونة من 52 ورقة مخلوطة خلطاً جيداً . أوجد احتمال أن

(أ) الورقة الأولى ليست عشرة سباتى أو آس .

(ب) الورقة الأولى آس ولكن الورقة الثانية ليست آس .

(جـ) ورقة على الأقل تحمل علامة الديناري

(د) الورقتان ليستا من نفس المجموعة .

(هـ) لا يوجد أكثر من ورقة عليها صورة (الولد ، البنت ، الملك)

(و) الورقة الثانية ليست من الأوراق التى عليها صورة .

(ز) الورقة الثانية ليست من الأوراق التى عليها صورة علماً بأن الورقة الأولى من الأوراق التى عليها صورة .

(ح) الورقتان إما من الأوراق التى عليها صورة أو من الأوراق التى عليها رسم البستونى أو كلاهما .

ج : (أ) 47/52 (ب) 16/221 (جـ) 15/34 (د) 13/17 (هـ) 210/221
(و) 10/13 (ز) 40/51 (ح) 77/442 .

٦ – ٤٧ صندوق يحتوى على 9 تذاكر مرقة من 1 إلى 9 (بما فيها الرقم 9 نفسه) .

إذا سحبت ثلاث تذاكر من الصندوق تذكرة فى كل مرة ، أوجد احتمال أن تكون أرقامها بالتبادل إما فردى ، زوجى ، فردى أو زوجى ، فردى ، زوجى .

ج : 5/18 .

٦ – ٤٨ معامل الترجيح لصالح A لكسب مباراة فى الشطرنج ضد B هو 3:2 . إذا لعبت ثلاث مباريات ، ما هو معامل الترجيح .

(أ) لصالح أن يكسب A على الأقل مباريتين من ثلاث .

(ب) ضد A أن يخسر أول المباريتين الأولى والثانية مع B .

ج : (أ) 81 : 44 (ب) 4 : 21

٦ – ٤٩ كيس نقود يحتوى على قطعتين من النقود الفضية و 4 قطع نقود نحاسية وكيس آخر يحتوى على 4 قطع نقود فضية و 3 نحاسية . إذا اخترت قطعة نقود عشوائياً من أحد الكيسين ، ما هو احتمال أن تكون قطعة نقود فضية ؟

ج : 19/42 .

٦ – ٥٠ احتمال أن يبقى رجل على قيد الحياة 25 سنة أخرى وهو $3/5$ واحتمال أن تبقى زوجته على قيد الحياة 25 سنة أخرى و $2/3$ ما هو احتمال :

(أ) أن يبقى الإثنان على قيد الحياة .

(ب) أن يبقى الرجل فقط على قيد الحياة .

(جـ) أن تبقى الزوجة فقط على قيد الحياة .

(د) أن يبقى واحداً منهما على قيد الحياة .

ج : (أ) 2/5 (ب) 1/5 (جـ) 4/15 (د) 13/15

٦ – ٥١ من 800 عائلة بكل عائلة 4 أطفال ، ما هى النسبة المئوية المتوقعة للعائلات التى بها .

(أ) ولدان وبنتان .

(ب) ولد على الأقل

(جـ) ليس بها بنات .

(د) بنتان على الأكثر ؟ مفترضاً أن الأولاد والبنات لهما احتمال متساو فى الوجود .

ج : (أ) 37.5% (ب) 93.75% (جـ) 6.25% (د) 68.75% .

التوزيعات الاحتمالية :

٦ – ٥٢ إذا كان X متغيراً عشوائياً يمثل عدد الأولاد فى العائلات المكونة من 4 أطفال (أنظر المسألة ٦ – ٥١)

(أ) كون جدولا يمثل التوزيع الاحتمالى لـ X .

(ب) مثل التوزيع فى (أ) بيانياً .

ج : (أ)

X	0	1	2	3	4
$p(X)$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

٦ – ٥٣ المتغير العشوائى المتصل X يأخذ قيما بين $X = 2$ و $X = 8$ (بما فيها (2,8) ، ودالة كثافة احتماله معرفة بـ $a(X+3)$ حيث a مقدار ثابت .

(أ) احسب قيمة a . (ب) أوجد $\Pr\{3 < X < 5\}$.

(جـ) $\Pr\{X \geq 4\}$ (د) $\Pr\{|X-5| < 0.5\}$.

ج : (أ) 1/48 (ب) 7/24 (جـ) 3/4 (د) 1/6

٦ – ٥٤ ثلاث كرات بلى تسحب بدون إرجاع من وعاء يحتوى على 4 كرات بلى حمراء و 6 كرات بلى بيضاء . إذا كان X متغير عشوائى يعبر عن عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

(أ) كون جدولا موضحاً به التوزيع الاحتمالى لـ X .

(ب) مثل التوزيع بيانياً .

ج : (أ)

X	0	1	2	3
$p(X)$	1/6	1/2	3/10	1/30

٦ – ٥٥ فى المسألة السابقة ، أوجد (أ) $\Pr\{X = 2\}$ (ب) $\Pr\{1 \leqq X \leqq 3\}$ وفسر النتيجة .

ج : (أ) 3/10 ، وهذا احتمال سحب ما مجموعة 2 من الكرات الحمراء .

(ب) 5/6 ، وهذا احتمال سحب 1 أو 2 أو 3 من الكرات الحمراء ، سحب كرة حمراء على الأقل .

التوقع الرياضى :

٦ – ٥٦ ما هو السعر العادل للاشتراك فى لعبة احتمال أن يكسب فيها الشخص £25 هو 0.2 واحتمال أن يكسب £10 هو 0.4 ؟

ج : £9 .

٦ – ٥٧ إذا أمطرت السماء ، فإن بائع مظلات واقية من المطر يمكن أن يكسب £30 فى اليوم . إذا كان الجو معتدلا فإنه يخسر £6 فى اليوم . ما هو توقعه إذا كان احتمال سقوط المطر هو 0.3 ؟

ج : £4.80 فى اليوم .

٦ – ٥٨ A و B يشتركان فى لعبة حيث يقذفان بعملة متوازنة ثلاث مرات والذى يحصل على الصورة أولا يكسب اللعبة . إذا قذف A العملة أولا وإذا كانت القيمة الإجمالية للرهان هو £20 ، ما هو المبلغ الذى يجب أن يساهم به كل منهم بحيث يمكن اعتبار اللعبة عادلة ؟

ج : A, £12.50; B, £7.50

٦ – ٥٩ أوجد (أ) $E(X)$ (ب) $E(X^2)$ (جـ) $E[(X - \bar{X})^2]$ (د) $E(X^3)$ للتوزيع الاحتمالى التالى .

X	−10	−20	30
$p(X)$	1/5	3/10	1/2

ج : (أ) 7 (ب) 590 (جـ) 541 (د) 10900

٦ - ٦٠ أوجد (أ) الوسط (ب) التباين و (جـ) الانحراف المعياري لتوزيع X بالمسألة ٦ - ٥٤ وفسر نتائجك .
ج : (أ) 1.2 (ب) 0.56 (جـ) $\sqrt{0.56} = 0.75$.

٦ - ٦١ متغير عشوائي يأخذ القيمة 1 باحتمال p و 0 باحتمال $q = 1 - p$ أثبت أن
(أ) $E(X) = p$ (ب) $E[(X - \bar{X})^2] = pq$.

٦ - ٦٢ أثبت أن (أ) $E(2X + 3) = 2E(X) + 3$ (ب) $E[(X - \bar{X})^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$

٦ - ٦٣ إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين لهما نفس التوزيع .
وضح أن $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

التباديل :

٦ - ٦٤ احسب (أ) ${}_4P_2$ (ب) ${}_7P_5$ (جـ) ${}_{10}P_3$ ج : (أ) 12 (ب) 2520 (جـ) 720

٦ - ٦٥ لأي قيمة من قيم n ، ${}_{n+1}P_3 = {}_nP_4$ ؟ ج : $n = 5$

٦ - ٦٦ بكم طريقة يمكن أجلاس 5 أشخاص على كنبة إذا كان عدد الأماكن المتاحة هو 3 فقط ؟ ج : 60

٦ - ٦٧ بكم طريقة يمكن ترتيب 7 كتب على رف إذا كان (أ) أي ترتيب ممكن (ب) ثلاثة كتب معينة يجب أن تكون معاً ، (جـ) كتابان معينان يجب أن يشغلا النهاية ؟
ج : (أ) 5040 (ب) 720 (جـ) 240

٦ - ٦٨ كم من الأعداد المكونة من خمسة أرقام بكل منها يمكن تكوينها من الأرقام 9 , ... , 3 , 2 , 1 إذا (أ) الأرقام يجب أن تكون فردية (ب) الرقمان الأوليان من كل عدد أرقام زوجية ؟
ج : (أ) 8400 ، (ب) 2520

٦ - ٦٩ حل المسألة السابقة إذا كان تكرار الرقم مسموحاً به .
ج : (أ) 32 805 (ب) 11664

٦ - ٧٠ كم من الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام يمكن تكوينها من ثلاثة أرقام أربعة وأربعة أرقام اثنين ، ورقمان ثلاثة ؟
ج : 20

٦ - ٧١ بكم طريقة يمكن أجلاس 3 رجال و 3 نساء حول مائدة إذا كان (أ) لا توجد قيود موضوعة .
(ب) اثنتان معينتان من النساء يجب ألا يجلسا معاً . (جـ) كل واحدة من النساء يجب أن تجلس بين رجلين .
ج : (أ) 120 (جـ) 72 (ت) 12

التوافيق :

٦ - ٧٢ احسب (أ) ${}_5C_3$ (ب) ${}_8C_4$ (جـ) ${}_{10}C_8$.
ج : (أ) 10 (ب) 70 (جـ) 45

٦ - ٧٣ لأى قيمة من قيم n تكون ${}_nC_2 = 7 \cdot {}_{n+1}C_3 \cdot 3$ ؟ ج : $n=6$

٦ - ٧٤ بكم طريقة يمكن اختيار 6 أسئلة من 10 أسئلة ؟ ج : 210

٦ - ٧٥ كم عدد اللجان المكونة من 3 رجال 4 نساء يمكن تكوينها من 8 رجال و 6 نساء ؟ ج : 840

٦ - ٧٦ بكم طريقة يمكن اختيار 2 من الرجال ، 4 سيدات ، 3 أولاد و 3 بنات من 6 من الرجال ، 8 سيدات ، 4 أولاد و 5 بنات إذا كان

(أ) لا توجد أى قيود على الاختيار .

(ب) رجل معين وسيدة معينة يجب اختيارهما ؟

ج : (أ) 42 000 (ب) 7000

٦ - ٧٧ بكم طريقة يمكن تقسيم 10 أشخاص إلى (أ) مجموعتين مكونتين من 7 أشخاص ، 3 أشخاص (ب) ثلاثة مجموعات مكونة من 4 أشخاص ، 3 أشخاص ، شخصان ؟ ج : (أ) 120 (ب) 12 600

٦ - ٧٨ من 5 إحصائيين ، 6 اقتصاديين يراد تكوين لجنة من 3 احصائيين ، 2 من الأقتصاديين . كم لجنة يمكن تكوينها إذا كان :

(أ) لا توجد قيود على الاختيار .

(ب) 2 معينين من الاحصائيين يجب أن يكونا فى اللجنة .

(جـ) اقتصادى معين يجب أن يكون فى اللجنة . ؟

ج : (أ) 150 (ب) 45 (جـ) 100

٦ - ٧٩ أوجد عدد (أ) التوافيق (ب) التباديل ، المكون كل منها من أربعة حروف والتى يمكن تكوينها من الكلمة Tennessee؟

ج : (أ) 17 (ب) 163

٦ - ٨٠ أثبت أن $1 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \cdots + (-1)^n\, {}_nC_n = 0$

تقريب سترلينج لـ $n!$:

٦ - ٨١ بكم طريقة يكن اختيار 30 مفردة من 100 ؟ ج : 2.95×10^{25}

٦ - ٨٢ وضح أنه لقيم n الكبيرة ${}_{2n}C_n = 2^{2n}/\sqrt{\pi n}$ تقريباً .

مسـائل متنوعـة X

٦ – ٨٣ سحبت ثلاث ورقات من مجموعة أوراق لعب مكونة من 52 كارت . أوجد احتمال (أ) ورقتان عليهما صورة الولد وورقة عليها صورة الملك (ب) جميع الورقات من نفس النوع (جـ) جميع الورقات من مجموعات مختلفة (د) وجود ورقتي آس على الأقل .

ج : (أ) 6/5525 (ب) 22/425 (جـ) 169/425 (د) 73/5525

٦ – ٨٤ أوجد احتمال الحصول على مجموع 7 مرتين على الأقل في رمية زهرة أربعة مرات ؟

ج : 171/1296

٦ – ٨٥ إذا كان 10% من إنتاج آلة في مصنع إنتاجاً تالفاً ، إذا اختيرت 5 مسامير عشوائياً فما هو احتمال (أ) أن لايكون أي منها تالف (ب) وجود مسمار واحد تالف (جـ) وجود مسمارين على الأقل تالفين ؟

ج : (أ) 0.590 49 (ب) 0.328 05 (جـ) 0.088 66

٦ – ٨٦ (أ) كون مجال العينة لنتائج رميتين لعملة غير متحيزة مستخدماً 1 لتمثل « الصورة » و0 لتمثل « الكتابة » .

(ب) من مجال العينة أوجد احتمال ظهوره الصورة مرة على الأقل .

(جـ) هل يمكن لك تكوين مجال العينة لنتائج ثلاث رميات لعملة ؟ إذا كان ممكناً حدد بمساعدة هذا التكوين احتمال ظهور صورتين على الأقل .

ج : (ب) ¾ (جـ) $^7/_8$.

٦ – ٨٧ في استطلاع لرأي 200 ناخب أظهر المعلومات التالية والخاصة بثلاثة مرشحين A, B, C من حزب معين والذين يخوضون الانتخابات للحصول على ثلاثة مقاعد مختلفة .

28 مؤيدين لكل من A, B

122 مؤيدين لـ B أو C ولكن غير مؤيدين لـ A

98 مؤيدين لـ A أو B ولكن غير مؤيدين لـ C

64 مؤيدين لـ C ولكن غير مؤيدين لـ A أو B

42 مؤيدين لـ B ولكن غير مؤيدين لـ A أو C

14 مؤيدين لـ A و C ولكن غير مؤيدين لـ B

كم عدد الناخبين المؤيدين لـ (أ) جميع المرشحين الثلاثة (ب) A بغض النظر عن B أو C .

(جـ) B بغض النظر عن A أو C (د) C بغض النظر عن A أو B (هـ) A و B وليس C

(و) مرشح واحد فقط ؟

ج : (أ) 8 (ب) 78 (جـ) 86 (د) 102 (هـ) 20 (و) 142

٦ – ٨٨ (أ) أثبت أنه لأى حدثين E_1 و E_2 فإن $\Pr\{E_1 + E_2\} \leqq \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\}$
(ب) عمم النتيجة التى حصلت عليها فى (أ)

٦ – ٨٩ إذا كانت E_1, E_2, E_3 عبارة عن 3 أحداث من المعروف أن واحد منها على الأقل قد وقع . وإذا افترضنا أن أياً من هذه الأحداث يمكن أن ينتج عنه حدث آخر وليكن A ومن المعروف أن هذا الحدث أيضاً قد وقع . إذا كانت جميع الاحتمالات $\Pr\{E_1\}, \Pr\{E_2\}, \Pr\{E_3\}$ و $\Pr\{A|E_1\}, \Pr\{A|E_2\}, \Pr\{A|E_3\}$ يفترض أنها معلومة أثبت أن

$$\Pr\{E_1|A\} = \frac{\Pr\{E_1\}\Pr\{A|E_1\}}{\Pr\{E_1\}\Pr\{A|E_1\} + \Pr\{E_2\}\Pr\{A|E_2\} + \Pr\{E_3\}\Pr\{A|E_3\}}$$

ويمكن الحصول على نتيجة مشابهة لكل من $\Pr\{E_2|A\}$ و $\Pr\{E_3|A\}$. هذه الصيغة معروفة باسم « قاعدة بايز أو نظرية بايز » . وهى مفيدة لحساب احتمالات الفروض المختلفة E_1 أو E_2 أو E_3 والتى ينتج عنها الحدث A. والنتيجة السابقة يمكن تعميمها .

٦ – ٩٠ ثلاثة صناديق مجوهرات متماثلة تماماً ولكل صندوق درجان . فى كل من أدراج الصندوق الأول ساعة ذهبية . وفى كل من أدراج الصندوق الثانى يوجد ساعة فضية . فى أحد أدراج الصندوق الثالث توجد ساعة ذهبية بينما فى الدرج الآخر توجد ساعة فضية . اختير صندوق عشوائياً وفتح أحد الأدراج ووجد به ساعة فضية ، ماهو احتمال أن يكون بالدرج الثانى ساعة ذهبية ؟

(ملحوظة : طبق نتيجة المسألة ٦ – ٨٩)

ج : $1/3$

٦ – ٩١ قدر كلا من A و B أن يتقابلا فيما بين الساعة الثالثة والرابعة بعد الظهر على أن لاينتظر أى منهما الآخر أكثر من 10 دقائق . ماهو احتمال أن يتقابلا .

ج : $11/36$

٦ – ٩٢ اختيرت نقطتان عشوائياً على خط طوله $a > 0$. أوجد احتمال أن تكون الخطوط الثلاثة المكونة من ذلك يمكن أن تكون أضلاع مثلث .

ج : ¼

الفصل السابع

توزيعات ذى الحدين ، الطبيعى وبواسون

توزيع ذى الحدين :

إذا كانت p احتمال وقوع حدث ما فى أى محاولة وحيدة (وتسمى احتمال النجاح) و $q = 1 - p$ احتمال عدم وقوع الحدث فى أى محاولة وحيدة (وتسمى احتمال الفشل) فإن احتمال وقوع الحدث مرات عددها X بالضبط فى N محاولة (حدوث X نجاح و $N - X$ فشل) يعطى كالآتى :

$$p(X) = {}_NC_X p^X q^{N-X} = \frac{N!}{X!(N-X)!} p^X q^{N-X} \qquad (١)$$

حيث $X = 0, 1, 2, \ldots$ و $N! = N(N-1)(N-2)\ldots 1$ و $0! = 1$ بالتعريف (أنظر الفصل السادس المسألة ٦-٣٤) .

مثال ١ — احتمال الحصول على صورتين بالضبط من 6 رميات لعملة غير متحيزة هــو

$${}_6C_2(\tfrac{1}{2})^2(\tfrac{1}{2})^{6-2} = \frac{6!}{2!\,4!}(\tfrac{1}{2})^6 = \tfrac{15}{64}$$

باستخدام (١) بوضع $X = 2$ ، $N = 6$ و $p = q = ½$.

مثال ٢ — احتمال الحصول على 4 صورة فى 6 رميات لعملة غير متحيزة .

$${}_6C_4(\tfrac{1}{2})^4(\tfrac{1}{2})^{6-4} + {}_6C_5(\tfrac{1}{2})^5(\tfrac{1}{2})^{6-5} + {}_6C_6(\tfrac{1}{2})^6 = \tfrac{15}{64} + \tfrac{6}{64} + \tfrac{1}{64} = \tfrac{11}{32} \qquad (٢)$$

التوزيع الاحتمالى المتقطع (١) يسمى غالبا بتوزيع ذى الحدين حيث أنه لقيم $X = 0, 1, 2, \ldots, N$ يقابل الحدود المتتالية لصيغة ذى الحدين أو مفكوك ذى الحدين .

$$(q + p)^N = q^N + {}_NC_1 q^{N-1}p + {}_NC_2 q^{N-2}p^2 + \ldots + p^N$$

حيث 1 و ${}_NC_1$ و ${}_NC_2$ و ... تسمى معاملات ذى الحدين .

مثال :

$$\begin{aligned}(q + p)^4 &= q^4 + {}_4C_1 q^3p + {}_4C_2 q^2p^2 + {}_4C_3 qp^3 + p^4 \\ &= q^4 + 4q^3p + 6q^2p^2 + 4qp^3 + p^4\end{aligned}$$

التوزيع (١) يسمى أيضا توزيع برنولى بعد أن اكتشفه جيمس برنولى فى نهاية القرن السابع عشر .

بعض خصائص توزيع ذى الحدين مذكورة فى الجدول التالى :

جدول ٧ - ١

$\mu = Np$	الوسط
$\sigma^2 = Npq$	التباين
$\sigma = \sqrt{Npq}$	الانحراف المعيارى
$\alpha_3 = \dfrac{q-p}{\sqrt{Npq}}$	معامل الالتواء باستخدام العزوم
$\alpha_4 = 3 + \dfrac{1-6pq}{Npq}$	معامل التفرطح باستخدام العزوم

مثال : فى 100 رمية لعملة غير متحيزة فإن متوسط ظهور الصورة هو $\mu = Np = (100)(\frac{1}{2}) = 50$ وهذا هو الرقم المتوقع لظهور الصورة فى 100 رمية لعملة .

الانحراف المعيارى $\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} = 5$

التوزيع الطبيعى :

أحد الأمثلة الهامة للتوزيع الاحتمالى المتصل هو التوزيع الطبيعى ، أو المنحنى الطبيعى أو توزيع جاوس ، ويعرف بالمعادلة .

$$Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)^2/\sigma^2} \qquad (٣)$$

حيث μ = الوسط و σ = الانحراف المعيارى و $\pi = 3{\cdot}141\,59\ldots, e = 2{\cdot}718\,28\ldots$

المساحة الكلية المحصورة بين المنحنى (٣) والأحداثى السينى X تساوى واحدا ، وبهذا فإن المساحة تحت المنحنى بين الأحداثيات $X = a$ و $X = b$ حيث $a < b$ ، تمثل احتمال أن تقع X بين a و b ، ويعبر عنها بـ $\Pr\{a < X < b\}$.

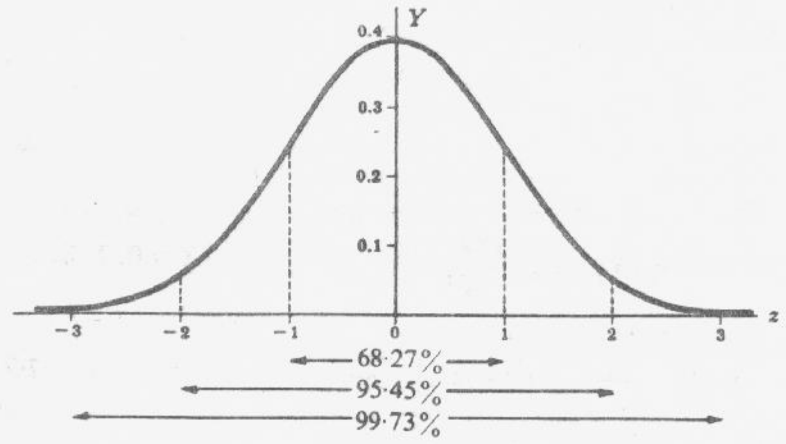
وعندما نعبر عن المتغير X بدلالة الوحدات المعيارية . $z = (X - \mu)/\sigma$ ، فإن المعادلة (٣) يستبدل بها ما يسمى بالصورة القياسية أو المعيارية .

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad (٤)$$

وفى هذه الحالة فإنه يقال أن z تتوزع توزيعا معتدلا متوسطه الصفر وتباينه الوحدة .

الشكل البيانى المنحنى الطبيعى المعيارى يظهر فى الشكل ٧-١ . فى هذه الشكل أوضحنا أن المساحة الواقعة بين $z = -1 , +1$ هى 68.27% وبين $z = -2 , +2$ هى 95.45% وكذلك بين $z = -3 , +3$ هى 99.73% من المساحة الكلية والتى تساوى واحد .

يمثل الجدول فى الملحق II المساحة تحت المنحنى والمحصورة بين الأحداثى $z = 0$ و أى قيمة موجبة لـ z ، ومن هذا الجدول فإن المساحة بين أى نقطتين يمكن الحصول عليها باستخدام تماثل المنحنى حول $z = 0$.



شكل ٧-١

بعض خصائص التوزيع الطبيعى المعرف بالمعادلة (٣) : مذكورة فى الجدول ٧ - ٢

الجدول ٧ - ٢

μ	الوسط
σ^2	التباين
σ	الانحراف المعيارى
$\alpha_3 = 0$	معامل الالتواء باستخدام العزوم
$\alpha_4 = 3$	معامل التفرطح باستخدام العزوم
$\sigma\sqrt{2/\pi} = 0.7979\sigma$	الانحراف المتوسط

العلاقة بين توزيع ذى الحدين والتوزيع الطبيعى :

إذا كانت N كبيرة وكلا من q و p ليسا قريبين من الصفر ، فإن توزيع ذى الحدين يمكن تقريبه بصورة جيدة بالتوزيع الطبيعى ذى المتغير المعيارى المعطى بـ $z = \dfrac{X - Np}{\sqrt{Npq}}$. ويصير التقريب أكثر جودة كلما زادت N ، وفى المالانهاية تصير العلاقة مضبوطة . وهذا موضح فى الجدول ٧-١ ، ٧-٢ حيث يتضح أنه عندما تزيد N فإن التواء وتفرطح توزيع ذى الحدين يقترب من التوزيع الطبيعى . ومن الناحية العملية فإن التقريب يعد جيدا إذا كان كل من Nq و Np أكبر من 5 .

توزيع بواسون :

التوزيع الاحتمالى المتقطع

$$p(X) = \frac{\lambda^X e^{-\lambda}}{X!} \qquad (X = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (٥)$$

حيث $e = 2{\cdot}71828\ldots$ ، λ ثابت معطى ، يسمى توزيع بواسون ، عقب اكتشاف بواسون له فى أوائل القرن التاسع عشر .

ويمكن حساب قيمة $p(X)$ باستخدام الجدول **VI** فى **صفحة ٥٣٨** الذى يعطى قيم $e^{-\lambda}$ لقيم λ المختلفة ، أو باستخدام اللوغاريتمات .

بعض خصائص توزيع بواسون :

بعض خصائص توزيع بواسون معطاة فى الجدول التالى

جدول ٧ — ٣

الوسط	$\mu = \lambda$
التباين	$\sigma^2 = \lambda$
الانحراف المعيارى	$\sigma = \sqrt{\lambda}$
معامل الالتواء باستخدام العزوم	$\alpha_3 = 1/\sqrt{\lambda}$
معامل التفرطح باستخدام العزوم	$\alpha_4 = 3 + 1/\lambda$

العلاقة بين توزيع ذى الحدين وتوزيع بواسون :

فى توزيع ذى الحدين (١) ، إذا كانت N كبيرة بينما احتمال وقوع حدث p قريبا من الصفر بحيث تكون $q = (1 - p)$ قريبة من 1 ، فإن الحدث يسمى حدثا نادرا . ومن الناحية العملية فإننا سنعتبر أن الحدث نادر إذا كان عدد المحاولات 50 على الأقل $(N \geqq 50)$ بينما Np أقل من 5 فى هذه الحالات فإن التوزيع ذى الحدين (١) يمكن تقريبه بشكل جيد بتوزيع بواسون (٥) . وهذا يتضح من مقارنة الجداول ٧-١ و ٧-٣ أعلاه ، حيث لو عوضنا عن $Np = \lambda$ و $1 \approx q$ و $0 \approx p$ فى الجدول ٧-١ نحصل على النتائج بالجدول ٧-٣ .

وبما أن هناك علاقة بين توزيع ذى الحدين والتوزيع الطبيعى . فإنه يمكن أن نبين أن توزيع بواسون يقترب من التوزيع الطبيعى ذى المتغير المعيارى $(X - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ عند تؤول λ إلى مالا نهاية .

توزيع كثيرات الحدود :

إذا كانت الأحداث $E_1, E_2, \ldots, E_K$ تحدث باحتمالات $p_1, p_2, \ldots, p_K$ على الترتيب ، فإن احتمال حدوث $E_1, E_2, \ldots, E_K$ مرات عددها على الترتيب $X_1, X_2, \ldots, X_K$ هو

$$\frac{N!}{X_1!\,X_2!\cdots X_K!}\, p_1^{X_1} p_2^{X_2} \cdots p_K^{X_K} \qquad (٦)$$

حيث $X_1 + X_2 + \ldots + X_K = N$

هذا التوزيع والذى يعد تعميما لتوزيع ذى الحدين ، يسمى توزيع كثيرات الحدود حيث (٦) هى الحد العام فى مفكوك كثيرات الحدود $(p_1 + p_2 + \ldots + p_K)^N$

مثال : إذا قذفت زهرة 12 مرة ، فإن احتمال الحصول على 1, 2, 3, 4, 5, 6 نقطة مرتين بالضبط لكل منها هــو

$$\frac{12!}{2!\,2!\,2!\,2!\,2!\,2!}\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2 = \frac{1925}{559\,872} = 0{\cdot}003\,44$$

العدد المتوقع لوقوع $E_1, E_2, \ldots, E_K$ فى N محاولة هــو $Np_1, Np_2, \ldots, Np_K$ على الترتيب .

توفيق توزيع نظرى للتوزيع التكرارى لعينة :

إذا كان لدى الشخص بعض الأدلة على شكل توزيع مجتمع معين سواء لمبررات احتمالية أو غيرها ، فإنه غالبا ما يمكن توفيق مثل هذا التوزيع النظرى (يسمى أيضا «نموذجا» أو توزيعا «متوقعا») للتوزيع التكرارى لعينة من هذا المجتمع . والطريقة المستخدمة بشكل عام تتضمن استعمال الوسط والانحراف المعيارى للعينة لتقدير الوسط والانحراف المعيارى للمجتمع . أنظر المسائل ٧-٣١ ، ٧-٣٣ و ٧-٣٤ .

ولاختبار جودة توفيق هذا التوزيع النظرى ، تستخدم اختبار كا تربيع والمعطى فى الفصل الثانى عشر .

ولمحاولة تقدير ما إذا كان التوزيع الطبيعى يمثل توفيقا جيدا للبيانات المعطاة ، فإنه من المناسب استخدام ورق رسم بيانى المنحنى الطبيعى أو ورق رسم بيانى احتمالى كما يسمى أحيانا (أنظر المسألة ٧ – ٣٢) .

توزيع ذى الحدين :

مسائل محلولة

توزيع ذى الحدين :

٧–١ أحسب (ا) $5!$ (ب) $\dfrac{6!}{2!4!}$ (جـ) ${}_8C_3$ (د) ${}_7C_5$ (هـ) ${}_4C_4$ (و) ${}_4C_0$

الحـــل

(ا) $5! = 5.4.3.2.1 = 120$

(ب) $\dfrac{6!}{2!4!} = \dfrac{6.5.5.3.2.1}{(2.1)(4.3.2.1)} = \dfrac{6.5}{2.1} = 15$

(جـ) ${}_8C_3 = \dfrac{8!}{3!(8-3)!} = \dfrac{8!}{3!5!} = \dfrac{8.7.6.5.4.3.2.1}{(3.2.1)(5.4.3.2.1)} = \dfrac{8.7.6}{3.2.1} = 56$

(د) ${}_7C_5 = \dfrac{7!}{5!2!} = \dfrac{7.6.5.4.3.2.1}{(5.4.3.2.1)(2.1)} = \dfrac{7.6}{2.1} = 21$

(هـ) ${}_4C_4 = \dfrac{4!}{4!0!} \quad 1$ (حيث $0! = 1$ بالتعريف)

(و) ${}_4C_0 = \dfrac{4!}{0!4!} \quad 1$

٧–٢ عند رمى عملة متوازنة ثلاث مرات أوجد احتمال ظهور الآتى :

(ا) 3 صور (ب) صورتان وكتابة (جـ) 2 كتابة ، 1 صورة (د) 3 كتابـــة

الحـــل :

الطريقة ١ :

أعتبر أن H تعبر عن « الصورة » و T تعبر عن « الكتابة » وافترض أن الرمز HTH ، على سبيل المثال يعنى ظهور الصورة فى الرمية الأولى ، الكتابة فى الرمية الثانية ثم الصورة فى الرمية الثالثة .

بما أن هناك أحد الشيئين (الصورة أو الكتابة) يمكن حدوثهما فى كل رمية ، فإن هناك $8 = (2)(2)(2)$ نتيجة ممكنة وهى

HHH, HHT, HTH, HTT, TTH, THH, THT, TTT

بما أن فرص هذه الامكانيات متساوية فى الظهور ، فإن احتمال كل هو $^1/_8$.

(ا) 3 صور (HHH) تحدث مرة واحدة فقط ، وبهذا فإن احتمال ظهور ثلاث صور هو $^1/_8$.

(ب) 2 صورة وكتابة تحدث ثلاث مرات (HHT, HTH, THH) وبهذا فإن

Pr { 2 صورة وكتابة } $= {}^3/_8$

(جـ) 2 كتابة وصورة تحدث ثلاث مرات (HTT و TTH و THT) إذن $^3/_8 =$ { 2كتابة وصورة } Pr

(د) 3 كتابة (TTT) تحدث مرة واحدة فقط ، إذن $^1/_8 =$ { 3 كتابة } Pr $=$ Pr{TTT} .

الطريقة ٢ : (باستخدام القانون)

(ا) Pr { 3 صور } $= {}_3C_3(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^0 = (1)(\frac{1}{8})(1) = \frac{1}{8}$

(ب) Pr { 2 صورة وكتابة } $= {}_3C_2(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^1 = (3)(\frac{1}{4})(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$

(جـ) Pr { 1 صورة و 2 كتابة } $= {}_3C_1(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^2 = (3)(\frac{1}{2})(\frac{1}{4}) = \frac{3}{8}$

(د) Pr { 3 كتابة } $= {}_3C_0(\frac{1}{2})^0(\frac{1}{2})^3 = (1)(1)(\frac{1}{8}) = \frac{1}{8}$

كذلك يمكن متابعة الحل كما فى الفصل السادس . المسألة ٦–١٠ .

٧–٣ فى خمس رميات لزهرة طاولة غير متحيزة أوجد احتمال أن يظهر الرقم 3

(ا) صفر من المرات (عدم ظهوره اطلاقا) (ب) مرة واحدة (جـ) مرتان

(د) ثلاث مرات (هـ) أربع مرات (و) خمس مرات .

الحل :

احتمال ظهور 3 فى رمية واحدة $= {}^1/_6 = p$

احتمال عدم ظهور 3 فى رمية واحدة $= {}^5/_6$ ، $q = 1 - p$ إذن

(ا) Pr (عدم ظهور 3 اطلاقا) $= {}_5C_0(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^5 = (1)(1)(\frac{5}{6})^5 = \frac{3125}{7776}$

(ب) Pr (ظهور 3 مرة واحدة) $= {}_5C_1(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^4 = (5)(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^4 = \frac{3125}{7776}$

(جـ) Pr (ظهور 3 مرتان) $= {}_5C_2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^3 = (10)(\frac{1}{36})(\frac{125}{216}) = \frac{625}{3888}$

(د) Pr (ظهور 3 ثلاث مرات) $= {}_5C_3(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^2 = (10)(\frac{1}{216})(\frac{25}{36}) = \frac{125}{3888}$

(هـ) $\Pr$ (ظهور 3 أربع مرات) $= {}_5C_4(\frac{1}{6})^4(\frac{5}{6})^1 = (5)(\frac{1}{1296})(\frac{5}{6}) = \frac{25}{7776}$

(و) $\Pr$ (ظهور 3 خمس مرات) $= {}_5C_5(\frac{1}{6})^5(\frac{5}{6})^0 = (1)(\frac{1}{7776})(1) = \frac{1}{7776}$

لاحظ أن هذه الاحتمالات تمثل حدود مفكوك ذى الحدين

$$(\tfrac{5}{6}+\tfrac{1}{6})^5 = (\tfrac{5}{6})^5 + {}_5C_1(\tfrac{5}{6})^4(\tfrac{1}{6}) + {}_5C_2(\tfrac{5}{6})^3(\tfrac{1}{6})^2 + {}_5C_3(\tfrac{5}{6})^2(\tfrac{1}{6})^3 + {}_5C_4(\tfrac{5}{6})(\tfrac{1}{6})^4 + (\tfrac{1}{6})^5$$

٧ — ٤ اكتب مفكوك ذى الحدين لـ (ا) $(q+p)^4$ ، (ب) $(q+p)^6$

الحــل :

(ا)
$$\begin{aligned}(q+p)^4 &= q^4 + {}_4C_1q^3p + {}_4C_2q^2p^2 + {}_4C_3qp^3 + p^4\\ &= q^4 + 4q^3p + 6q^2p^2 + 4qp^3 + p^4\end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned}(q+p)^6 &= q^6 + {}_6C_1q^5p + {}_6C_2q^4p^2 + {}_6C_3q^3p^3 + {}_6C_4q^2p^4 + {}_6C_5qp^5 + p^6\\ &= q^6 + 6q^5p + 15q^4p^2 + 20q^3p^3 + 15q^2p^4 + 6qp^5 + p^6\end{aligned}$$

المعاملات 1, 4, 6, 4, 1 تسمى معاملات ذى الحدين المقابلة لـ $N=4$ وكذلك 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1 تسمى معاملات ذى الحدين المقابلة لـ $N=6$. بكتابة هذه المعاملات لقيم $N = 0, 1, 2, 3, \ldots$ كما هو موضح بالشكل ، نحصل على تراتيب تسمى بمثلث باسكال . لاحظ أن الرقم الأول والأخير فى كل صف هو الرقم ١ وأى رقم آخر يمكن الحصول عليه بجمع الرقمين إلى يمين وإلى يسار هذا الرقم فى الصف السابق .

$$\begin{array}{c}1\\1 \quad 1\\1 \quad 2 \quad 1\\1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\end{array}$$

٧— ٥ فى عائلة لها 4 أطفال أوجد احتمال أن يكون بها . (ا) ولد على الأقل
(ب) ولد وبنت على الأقل .
افترض أن احتمال ولادة ولد هـــو ½

الحــل :

(ا)

$\Pr$ (ولد) $= {}_4C_1(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{4}$

$\Pr$ (3 أولاد) $= {}_4C_3(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^1 = \frac{1}{4}$

$\Pr$ (ولدين) $= {}_4C_2(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{8}$

$\Pr$ (4 أولاد) $= {}_4C_4(\frac{1}{2})^4(\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{16}$

إذن $\Pr$ (ولد على الأقل) $= \Pr$ (ولد) $+ \Pr$ (ولدين) $+ \Pr$ (3 أولاد) $+ \Pr$ (4 أولاد)

$$= \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{15}{16}$$

طريقة اخرى : $\Pr$ (ولد على الأقل) $= 1 - \Pr$ (عدم وجود ولد) $= 1 - (\frac{1}{2})^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

(ب) $\Pr$ (ولد وبنت على الأقل) $= 1 - \Pr$ (عدم وجود ولد) $- \Pr$ (عدم وجود بنت) $= 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = \frac{7}{8}$

٧ - ٦ من 2000 عائلة بكل منها 4 أطفال ، ما هو العدد المتوقع للعائلات التي بها (ا) على الأقل ولد واحد (ب) ولدان (جـ) بنت أو بنتان (د) لا يوجد بها بنات ؟ أرجع إلى المسألة ٧ - ٥ (ا)

الحـــل :

(ا) العدد المتوقع للعائلات التي يوجد بها ولد على الأقل $= 1875 = 2000(^{15}/_{16})$

(ب) العدد المتوقع للعائلات التي يوجد بها ولدان $750 = 2000\,(^{5}/_{8}) = 2000 . \text{Pr}$ { ولدان }

(جـ) Pr { بنتان } + Pr { بنت } = Pr { بنت أو بنتان }

$=$ Pr { ولد } + Pr { ولدان }

$= \frac{1}{4} + {^3/_8} = {^5/_8}$

العدد المتوقع للعائلات التي يوجد بها بنت أو بنتان $= 1250 = 2000\,(\,^{5}/_{8}\,)$

(د) العدد المتوقع للعائلات التي لا يوجد بها بنات $= 125 = 2000\,(^{1}/_{16})$

٧ - ٧ إذا كان 20 % من إنتاج آلة لصناعة المسامير هـــو إنتاج تالف ، أوجـــد احتمال أن يكون بين 4 مسامير اختيرت عشوائيا (ا) 1 (ب) 0 (جـ) على الأكثر مساران ، ستكون تالفة .

الحـــل :

احتمال وجود مسمار تالف هـــو $p = 0.2$ ، ووجود مسمار غير تالف $q = 1 - p = 0.8$

(ا) Pr (مسمار تالف من 4 مسامير) $= {}_4C_1(0{\cdot}2)^1(0{\cdot}8)^3 = 0{\cdot}4096$

(ب) Pr (عدم وجود أي مسمار تالف) $= {}_4C_0(0{\cdot}2)^0(0{\cdot}8)^4 = 0{\cdot}4096$

(جـ) Pr (وجود مسمارين تالفين) $= {}_4C_2(0{\cdot}2)^2(0{\cdot}8)^2 = 0{\cdot}1536.$

إذن

Pr { وجود مسمارين تالفين على الأكثر } = Pr { 0 مسمار تالف } + Pr { 1 مسمار تالف }
+ Pr { 2 مسمار تالف }

$= 0{\cdot}4096 + 0{\cdot}4096 + 0{\cdot}1536 = 0{\cdot}9728$

٧ - ٨ إذا كان احتمال أن يتخرج طالب التحق بكلية هو 0.4 . حدد احتمال أن يكون من بين 5 طلبة (ا) لا يتخرج أحد (ب) يتخرج واحد على الأقل .

الحـــل :

(ا) Pr (لا يتخرج أحـــد) $= {}_5C_0(0{\cdot}4)^0(0{\cdot}6)^5 = 0{\cdot}07776,$
أو حوالي 0.08

(ب) Pr (يتخرج واحـــد) $= {}_5C_1(0{\cdot}4)^1(0{\cdot}6)^4 = 0{\cdot}2592.$
أو حوالي 0.26

(جـ) Pr (أن يتخرج واحد على الأقل) $= 1 -$ Pr (أن لا يتخرج أحد)
أو حوالي 0.92

٧ – ٩ ما هو احتمال الحصول على ما مجموعة 9 (ا) مرتان ، (ب) على الأقل مرتان فى 6 رميات لزهرتى طاولة ؟

الحـــل :

كل من الـ 6 طرق التى يمكن أن تقع بها الزهرة الأولى يمكن أن نرتبط بكل من الـ 6 طرق التى يمكن أن تقع بها الزهرة الثانية ، وبهذا يكون هناك $6.6 = 36$ طريقة يمكن أن تقع بها الزهرتان . حيث هناك : 1 فى الزهرة الأولى ، 1 فى الزهرة الثانية ، 1 فى الزهر الأولى و 2 فى الزهرة الثانية وهكذا ... ، ويرمز لهـا $(1, 1)$ و $(1, 2)$

من هذه الـ 36 طريقة ، وكلها لهـا نفس الفرصة فى الظهور إذا كانت الزهرتان متوازنتان ، ما مجموعة 9 يحدث فى أربع حالات : $(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$. وبهذا يكون احتمال ظهور ما مجموعة 9 فى رمية واحدة لزهرتين هـــو $p = 4/36 = 1/9$ واحتمال عدم الحصول على ما مجموعة 9 فى رمية زهرتين $q = 1 - p = 8/9$.

(ا) $\Pr$ (اثنين 9 فى ست رميات) $= {}_6C_2(\frac{1}{9})^2(\frac{8}{9})^{6-2} = \frac{61\,440}{531\,441}$

$\Pr$ { وجود اثنين 9 على الأقل } = $\Pr$ { اثنين 9 } + $\Pr$ { ثلاثة 9 } + $\Pr$ { أربعة 9 } + $\Pr$ { خمسة 9 } + $\Pr$ { ستة 9 }

$$= {}_6C_2(\tfrac{1}{9})^2(\tfrac{8}{9})^4 + {}_6C_3(\tfrac{1}{9})^3(\tfrac{8}{9})^3 + {}_6C_4(\tfrac{1}{9})^4(\tfrac{8}{9})^2 + {}_6C_5(\tfrac{1}{9})^5\tfrac{8}{9} + {}_6C_6(\tfrac{1}{9})^6$$
$$= \frac{61\,440}{531\,441} + \frac{10\,240}{531\,441} + \frac{960}{531\,441} + \frac{48}{531\,441} + \frac{1}{531\,441} + \frac{72\,689}{531\,441}$$

طريقة اخرى :

$\Pr$ { اثنين 9 على الأقل } = $1 - \Pr$ { عدم وجود 9 } $- \Pr$ { واحد 9 }

$$= 1 - {}_6C_0(\tfrac{1}{9})^0(\tfrac{8}{9})^6 - {}_6C_0(\tfrac{1}{9})^1(\tfrac{8}{9})^5 = \frac{72\,689}{531\,441}$$

٧–١٠ احسب (ا) $\sum_{X=0}^{N} Xp(X)$ (ب) $\sum_{X=0}^{N} X^2 p(X)$ حيث $p(X) = {}_NC_X p^X q^{N-X}$

الحـــل :

$$\sum_{X=0}^{N} X p(X) = \sum_{X=1}^{N} X \frac{N!}{X!\,(N-X)!} p^X q^{N-X} = Np\sum_{X=1}^{N} \frac{(N-1)!}{(X-1)!\,(N-X)!} p^{X-1} q^{N-X} \qquad (\text{ا})$$
$$= Np(q+p)^{N-1} = Np$$

بما أن $q + p = 1$

$$\sum_{X=0}^{N} X^2 p(X) = \sum_{X=1}^{N} X^2 \frac{N!}{X!\,(N-X)!} p^X q^{N-X} = \sum_{X=1}^{N} [X(X-1)+X] \frac{N!}{X!\,(N-X)!} p^X q^{N-X}$$

$$= \sum_{X=2}^{N} X(X-1) \frac{N!}{X!\,(N-X)!} p^X q^{N-X} + \sum_{X=1}^{N} X \frac{N!}{X!\,(N-X)!} p^X q^{N-X}$$

$$= N(N-1)p^2 \sum_{X=2}^{N} \frac{(N-2)!}{(X-2)!\,(N-X)!} p^{X-2} q^{N-X} + Np = N(N-1)p^2 (q+p)^{N-2} + Np \quad (ب)$$

$$= N(N-1)p^2 + Np$$

ملحوظة : النتيجة فى (ا) و (ب) هى القيمة المتوقعة لكل من X^2 و X ويرمز لهما $E(X^2)$ و $E(X)$ على الترتيب (أنظر الفصل السادس) .

٧-١١ إذا كان متغير له توزيع ذى الحدين ، أوجد (ا) وسطه μ (ب) تباينه σ^2

الحـــل :

(ا) $\mu =$ توقع المتغير $= \sum_{X=0}^{N} X p(X) = Np$

من المسألة ٧ – ١٠ (ا)

(ب) $$\sigma^2 = \sum_{X=0}^{N} (X-\mu)^2 p(X) = \sum_{X=0}^{N} (X^2 - 2\mu X + \mu^2) p(X) = \sum_{X=0}^{N} X^2 p(X) - 2\mu \sum_{X=0}^{N} X p(X) + \mu^2 \sum_{X=0}^{N} p(X)$$

$$= N(N-1)p^2 + Np - 2(Np)(Np) + (Np)^2(1) = Np - Np^2 = Np(1-p) = Npq$$

باستخدام $\mu = Np$ ونتيجة المسألة ٧–١٠ فإننا نستنتج أن الانحراف المعيارى للمتغير الذى يتوزع كتوزيع ذى الحدين هـــو $\sigma = \sqrt{Npq}$.

طريقة أخرى : $E[(X - X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = N(N-1)p^2 + Np - N^2p^2 = Np - Np^2 = Npq$

من المسألة ٦–٦٢ (ا) الفصل السادس .

٧-١٢ إذا كان احتمال وجود مسمار معيب هـــو 0.1 أوجـــد

(ا) الوسط (ب) الانحراف المعيارى ، لتوزيع المسامير المعيبة من مجموع 400 مسمار .

(ا) الوسط $= Np = 400(0.1) = 40$ ، بمعنى أننا نتوقع وجود 40 مسمار معيب

(ب) التباين $= Npq = 400\,(0.1)\,(0.9) = 36$ وبهذا فإن الانحراف المعيارى $= \sqrt{36} = 6$

٧-١٣ أوجد باستخدام العزوم معاملات (ا) الالتواء (ب) التفرطح للتوزيع فى المسألة ٧–١٢

الحـــل :

( ) معامل الالتواء باستخدام العزوم $= \frac{q - p}{\sqrt{Npq}} = \frac{0.9 - 0.1}{6} = 0.133$

وبما أن هذا المقدار موجب فإن التوزيع ملتو إلى اليمين

(ب) $3.01 = \frac{1-6(0.1)(0.9)}{36} + 3 = \frac{1-6pq}{Npq} + 3 =$ معامل التفرطح باستخدام العزوم

التوزيع مدبب بشكل بسيط بالمقارنة بالتوزيع الطبيعى (له قمة أعلى نسبيا ، أنظر الفصل الخامس)

التوزيع الطبيعى :

٧–١٤ فى امتحان نهائى فى الرياضة كان المتوسط 72 والانحراف المعيارى 15 . أوجد الدرجات المعيارية (الدرجات معبرا عنها بوحدات من الانحراف المعيارى) للطلبة الحاصلين على درجات (ا) 60 (ب) 93 (ج) 72

الحـــل :

(ا) $z = \frac{X - \bar{X}}{s} = \frac{60 - 72}{15} = -0.8$ (ب) $z = \frac{X - \bar{X}}{s} = \frac{93 - 72}{15} = 1.4$

(ج) $z = \frac{X - \bar{X}}{s} = \frac{72 - 72}{15} = 0$

٧–١٥ بالرجوع إلى المسألة ٧–١٤ أوجد الدرجات المقابلة للدرجات المعيارية (ا) -1 (ب) 1.6

الحـــل :

(ا) $X = \bar{X} + zs = 72 + (-1)(15) = 57$ (ب) $X = \bar{X} + zs = 72 + (1.6)(15) = 96$

٧–١٦ أخبر طالبان بأنهما قد حصلا على درجات معيارية $0.4-$, 0.8 فى امتحان للقدرات فى اللغة الانجليزية . فإذا كانت درجاتهما هى 64 و 88 على الترتيب ، أوجد الوسط والانحراف المعيارى لدرجات الامتحان .

الحـــل :

باستخدام المعادلة $X = \bar{X} + zs$ للطالب الأول

(١) $88 = \bar{X} + 0.8s$

وباستخدام الطالب الثانى $64 = \bar{X} - 0.4s$ (٢)

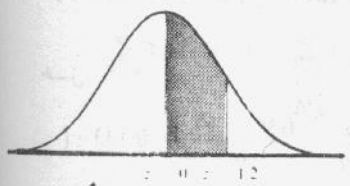
وبحل (١) ، (٢) معا نحصل على : الوسط $\bar{X} = 72$ والانحراف المعيارى $s = 20$.

٧–١٧ أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعى فى كل من الحالات (ا) إلى (ز) التالية . باستخدام الجدول فى صفحة ٥٣٣

(ا) بين $z = 0$ و $z = 1.2$.

فى الجدول صفحة ٥٣٨ . أبدأ بالعمود المعنون z حتى تصل إلى الرقم 1.2 ثم اتجه إلى اليمين إلى العمود المعنوى 0

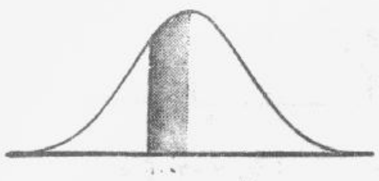
النتيجة 0.3849 هى المساحة المطلوبة وتمثل احتمال أن تقع z بين صفر و 1.2 ، ويرمز لها بالتعبير $\Pr\{0 \leqq z \leqq 1.2\}$



شكل ٧–٢ (أ)

(ب) بين $0.68- = z$ و $z = 0.$

المساحة المطلوبة = المساحة بين $0 = z$ و $z = 0.68$ (بالتماثل) لحصول على المساحة بين $0 = z$ و $z = 0.68$. اتجـه إلى أسفل فى العمود z المعنون حتى تصل إلى الرقم 0.6 ثم اتجه إلى اليمين إلى العمود المعنوى 8 .



شكل ٧ – ٢ (ب)

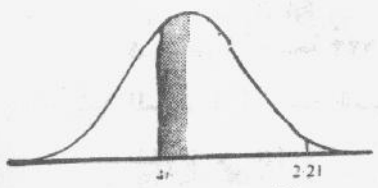
النتيجة 0.2517 هى المساحة المطلوبة وتمثل احتمال أن z تقع بين $0.68-$ و 0 ، ويرمز لها بالتعبير $Pr\{-0.68 \leqq z \leqq 0\}$

(جـ) بين $0.46- = z$ و $z = 2.21$.

المساحة المطلوبة = (المساحة بين $z = 0.46$ و $z = 0$)

$+$ (المساحة بين $z = 0$ و $z = 2.21$)

$0.1772 + 0.4864 = 0.6636$



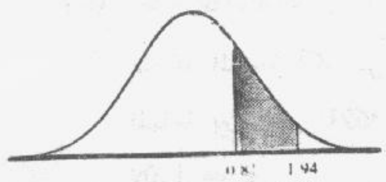
شكل ٧ – ٢ (جـ)

(د) بين $z = 0.81$ و $z = 1.94$

المساحة المطلوبة = (المساحة بين $z = 0$ و $z = 1.94$)

$-$ (المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.81$)

$= 0.2910 - 0.4738 = 0.1828$



شكل ٧ – ٢ (د)

(هـ) إلى يسار $z = 0.6$

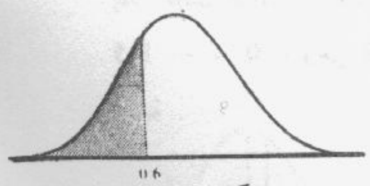
المساحة المطلوبة = (المساحة إلى يسار $z = 0$)

$-$ (المساحة بين $z = -0.6$ و $z = 0$)

$=$ (المساحة إلى يسار $z = 0$)

$-$ (المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.6$)

$0.2742 = 0.5 - 0.2258$



شكل ٧ – ٢ (هـ)

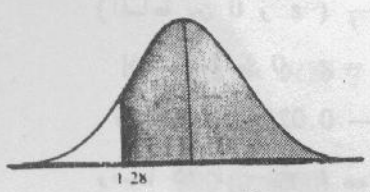
(و) إلى يمين $z = 1.28$

المساحة المطلوبة = (المساحة بين $z = -1.28$ و $z = 0$)

$+$ (المساحة إلى يمين $z = 0$)

$0.8997 = 0.3997 + 0.5$

وهـذه مثل $Pr\{z \geqq -1.28\}$



شكل ٧–٢ (و)

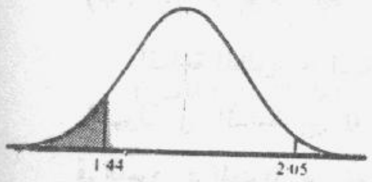
(ز) إلى يمين $z = 2.05$ وإلى يسار $z = -1.44$

المساحة المطلوبة = المساحة الكلية − (المساحة بين $1.44 = z$ و $z=0$)

− (المساحة بين $z = 0$ و $z = 2.05$).

$= 1 - 0.4251 - 0.4798$

$1 - 0.9049 = 0.0951$



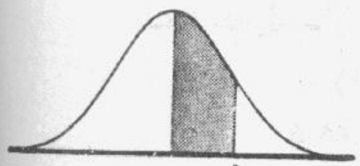
شكل ٧ − ٢ (ز)

٧−١٨ حدد قيمة أو قيم z فى كل من الحالات من (ا) إلى (ج) ، حيث المساحة تمثل تلك التى تقع تحت المنحنى الطبيعى .

(ا) إذا كانت المساحة بين 0 و z هى 0.3770

فى الملحق II صفحة ٥٣٣ ، القيمة 0.3770 تتحدد إلى اليمين فى الصف المعنون 1.1 وتحت العمود المعنوى 0.6 . وبهذا تكون قيمة z المطلوبة هى 1.16 .

ومن التماثل $z = -1.16$ قيمة أخرى . وبهذا فان $z = \pm 1.16$

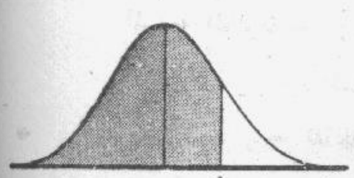

شكل ٧−٣ (ا)

(ب) المساحة إلى يسار z هى 0.8621

بما أن المساحة أكبر من 0.5 ، فإن z يجب أن تكون موجبة .

المساحة بين 0 و $z = 0.8621 - 0.5 = 0.3621$ ومنها

$z = 1.09$


شكل ٧ − ٣ (ب)

(ج) المساحة بين -1.5 و z هى 0.0217

إذا كانت z موجبة فإن المساحة يجب أن تكون أكبر من المساحة بين -1.5 و 0 ، وهى 0.4332 ، وبهذا فإن z يجب أن تكون سالبة .

الحالة ١ : z سالبة ولكن إلى يمين -1.5

المساحة بين -1.5 و z =

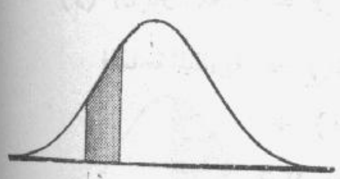
= (المساحة بين -1.5 و 0) − (المساحة بين 0 و z)

(المساحة بين 0 و z) − $0.4322 = 0.0217$

إذن المساحة بين 0 ، z =

$= 0.4332 - 0.0217 = 0.4115$

ومنها $z = -1.35$


شكل ٧ − ٣ (ج)

الحالة ٢ : z سالبة ولكن إلى يسار -1.5 .

المساحة بين z و -1.5 =

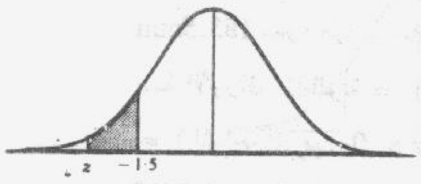
(المساحة بين z و 0) — (المساحة بين -1.5 و 0) .

0.4332 — (المساحة بين 0 و z) $= 0.0217$

وبهذا فإن المساحة بين 0 و z =

$0.0217 + 0.4332 = 0.4549$

و $z = -1.694$ باستخدام الاستكمال الخطى ، أو بدرجة بسيطة من عدم الدقة $z = -1.69$.



شكل ٧-٣ (جـ)

٧-١٩ أوجد احداثيات المنحنى الطبيعى عند (ا) $z = 0.84$ (ب) $z = -1.27$ (جـ) $z = -0.05$

الحـل :

(ا) فى الملحق I صفحة ٥٣٣ ، اتجه إلى أسفل العمود المعنون z حتى تصل إلى 0.8 . وبعد ذلك اتجـه إلى العمود المعنون 4 . نجـد أن 0.2803 هـو الاحداثى المطلوب .

(ب) بالتماثل ، (الأحداثى عنـد $z = -1.27$) = (الاحداثى عند $z = 1.27$) $= 0.1781$

(جـ) (الاحداثى $(z = -0.05)$ = (الاحداثى $(z = 0.05)$) $= 0.3984$

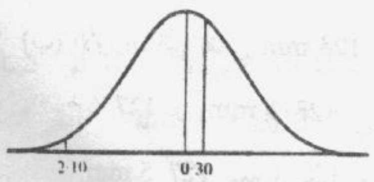
٧-٢٠ متوسط طول 500 من أوراق الغار من منطقة تشجير معينة هـو 151 mm والانحراف المعيارى هو 15mm إذا افترضنا أن الأطوال تتوزع توزيعا طبيعيا ، أوجـد عدد الأوراق التى أطوالها (ا) بين 155 mm و 120 (ب) أكبر من 185 mm .

الحـل :

(ا) الأطوال المسجلة بين 120 و 150 mm من الممكن من الناحية الفعلية أن تأخذ أى قيمة بين 119.5 إلى 155.5 mm بافتراض أنها سجلت إلى أقرب ملليمتر .

119.5 mm معبرا عنها بوحدات معيارية $(119.5-151)/15=-2.10$

155.5 mm معبرا عنها بوحدات معيارية $(155.5-151)/15=0.30$



شكل ٧-٤ (ا)

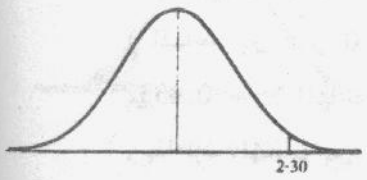
نسبة الأوراق المطلوبة = (المساحة بين $z = -2.10$ و $z = 0.30$)

= (المساحة بين $z = -2.10$ و $z = 0$) + (المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.30$)

$0.4821 + 0.1179 = 0.6000$

وبهذا فإن عدد الأوراق التى تقع أطوالها بين 120 و 155 mm هـو $300 = 500\ (0.6000)$

(ب) الأوراق التى طولها أكبر من 185 mm يجب أن يكون مقاييسها على الأقل 185.5 mm



185.5mm معبرا عنها بوحدات معيارية $=(185.5-151)/15=2.30$

نسبة الأوراق المطلوبة = (المساحة إلى يمين $z = 2.30$)

= (المساحة إلى يمين $z = 0$) — (المساحة بين $z = 0$ و $z = 2.30$)

$0.5 - 0.4893 = 0.0107$

شكل ٧ - ٤ (ب)

وبهذا فإن عدد الأوراق التى تكون أطوالها أكبر من 185 mm هو $5 = 500\,(0.107)$.

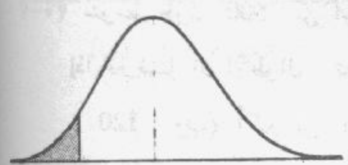
إذا كانت L تمثل طول ورقة اختيرت عشوائيا ، فإنه يمكن تلخيص النتائج السابقة باستخدام الاحتمال بكتابة .

$$\Pr\{L > 185.5\} = 0.0107 \quad , \quad \Pr\{119.5 \le L \le 155.5\} = 0.6000$$

٧-٢١ حدد عدد الأوراق فى المسألة السابقة التى طولها (ا) أقل من 128 mm (ب) 128 mm ، (جـ) أقل من أو يساوى 128 mm .

الحل :

(ا) الأوراق التى يكون طولها أقل من 128 mm يجب أن يكون مقياسها أقل من 127.5 mm



127.5mm معبرا عنها بوحدات قياسية $=-1.57=(127.5-151)/15$

نسبة الأوراق المطلوبة = (المساحة على يسار $z = -1.57$)

= (المساحة على يسار $z = 0$) — (المساحة بين $z = -1.57$ و $z = 0$)

$0.5 - 0.4418 = 0.0582$

شكل ٧-٥ (ا)

وبهذا فإن عدد الأوراق التى يكون طولها أقل من 128 mm $= 29 = 500(0.0582)$.

(ب) الأوراق التى تقاس 128 mm تقع أطوالها بين 127.5 و 128.5 mm . أنظر الشكل ٧ - ٥ (ب) أدناه .

127.5 mm معبرا عنها بوحدات معيارية $= -1.57 = (127.5 - 151)/15$

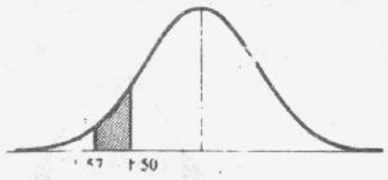
128.5 mm معبرا عنها بوحدات معيارية $= -1.50 = (128.5 - 151)/15$

نسبة الأوراق المطلوبة = (المساحة بين $z = -1.57$ و $z = -1.50$)

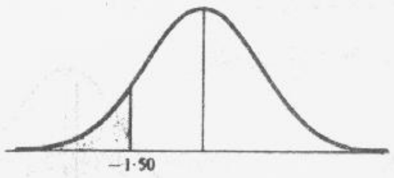
= (المساحة بين $z = -1.57$ و $z = 0$) — (المساحة بين $z = -1.5$ و $z = 0$)

$0.4418 - 0.4332 = 0.0086$

وبهذا فإن عدد الأوراق التى لها 128 mm هو 4 = (0.0086) 500



شكل ٧-٥ (ب)



شكل ٧-٥ (ج)

(ج) الأوراق التى يكون طولها أقل من أو يساوى 128 mm يجب أن يكون مقياسها أقل من 128.5 mm . أنظر الشكل ٧ - ٥ (ج).

128.5 mm معبرا عنها بوحدات معيارية = $(128.5 - 151)/15 = -1.50$

نسبة الأوراق المطلوبة = (المساحة إلى يسار $z = -1.50$)

(المساحة إلى يسار $z = 0$) — (المساحة بين $z = -1.50$ و $z = 0$)

$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$

وبهذا فإن عدد الأوراق التى لها طول 128 mm أو أقل هو $33 = (0.0668)\ 500$

طريقة أخرى : باستخدام الأجزاء (ا) ، (ب)

عدد الأوراق التى لها طول أقل من أو يساوى 128 mm يساوى (عدد الأوراق التى طولها أقل من 128 mm) + (عدد الأوراق التى طولها 128 mm) = $33 = 4 + 29$

٧-٢٢ كانت الدرجات فى امتحان مفاجيء قصير فى البيولوجى 0,1, 2, ... , 10 نقطة ، معتمدا على عدد الاجابات الصحيحة من 10 من أسئلة . وكان متوسط الدرجات 6.7 وانحرافها المعيارى هو 1.2 . إذا افترضنا أن الدرجات تتوزع حسب التوزيع الطبيعى ، حدد (ا) النسبة المئوية لعدد الطلبة الذين سجلوا 6 نقط (ب) أكبر درجة سجلها أقل 10% من طلبة الفصل (ج) أقل درجة سجلها أحسن 10% من طلبة الفصل.

الحـل :

(ا) لاستخدام التوزيع الطبيعى لبيـانات متقطعة ، نجد أنه من الضرورى معالجة هذه البيـانات كما لو كـانت بيانات متصلة . وبهذا فإن تسجيل 6 نقط تعتبر كما لو كانت من 5.5 إلى 6.5 نقطة . أنظر الشكل ٧ - ٦ (ا).

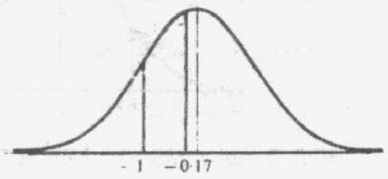
5.5 كوحدات معيارية = $(5.5 - 6.7)/1.2 = -1.0$

6.5 كوحدات معيارية = $(6.5 - 6.7)/1.2 = -0.17$

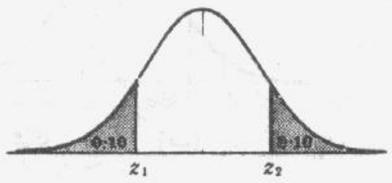
النسبة المطلوبة = (المساحه بين $z = -1$ و $z = -0.17$)

= (المساحة بين $z = -1$ و $z = 0$) — (المساحة بين $z = -0.17$ و $z = 0$).

$= 0.3413 - 0.0675 = 0.2738 = 27\%$



شكل ٧-٦ (أ)



شكل ٧-٦ (ب)

(ب) اعتبر أن X_1 هى الدرجة الكبرى المطلوبة و z_1 هى الدرجة معبرا عنها بوحدات معيارية .
من الشكل ٧-٦ (ب) فإن المساحة إلى يسار z_1 هى $0.10 = 10\%$ وبهذا فإن (المساحة بين z_1 و 0) $= 0.40$ ، و $z_1 = -1.28$ (بشكل قريب جدا) .

إذن $z_1 = (X_1 - 6.7)/1.2 = 1.28$ و $X_1 = 5.2$ أو $X_1 = 5$ إلى أقرب رقم صحيح .

(جـ) اعتبر أن X_2 هى الدرجة الصغرى المطلوبة و z_2 هى الدرجة معبراً عنها بوحدات معيارية .
من (ب) ، وبالتماثل ، $z_2 = 1.28$. إذن $(X_2 - 6.7)/1.2 = 1.28$ و $X_2 = 8.2$ أو $X_2 = 8$ إلى أقرب رقم صحيح .

٧ - ٢٣ متوسط القطر الداخلى فى عينة من 200 جلبة مستديرة من إنتاج آلة معينة هو 5.02 mm وانحرافها المعيارى 0.05 mm والهدف من استخدام هذه الجلب يسمح بانحراف فى القطر أقصاه من 4.96 إلى 5.08 mm ، وفيما عدا ذلك تعتبر الجلبة معيبة . أوجد النسبة المئوية للجلب التالفة فى إنتاج هذه الآلة ، مفترضاً أن الأقطار تتوزع توزيعاً طبيعياً .

الحـــل :

4.96 معبراً عنها بوحدات لمعيارية $= (4.96 - 5.02)/0.05 = -1.2$

5.08 معبراً عنها بوحدات معيارية $= 1.2 = (5.08 - 5.02)/0.05$

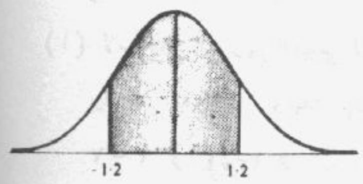
نسبة الجلب غير التالفة

(المساحة تحت المنحنى الطبيعى بين $z = -1.2$ و $z = 1.2$)

= (ضعف المساحة بين $z = 0$ و $z = 1.2$)

$2\ (0.3849) = 0.7698$

أو 77%



شكل ٧ - ٧

وبهذا فإن نسبة الجلب التالفة $= 100\% - 77\% = 23\%$

لاحظ أنه لو اعتبرنا أن الفترة من 4.96 إلى 5.08 mm تمثل فعلا الأقطار من 4.955 إلى 5.085 mm فإن النتيجة السابقة تعدل تعديلا طفيفاً . وعلى أية حال فإلى رقمين عشريين فإن النتيجة لن تختلف .

التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ذى الحدين :

٧-٢٤ أوجد احتمال الحصول على مابين 3 و 6 صورة (6 متضمنة فى الفترة) فى 10 رميات لعملة متوازنة باستخدام
(أ) توزيع ذى الحدين ، (ب) التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ذى الحدين

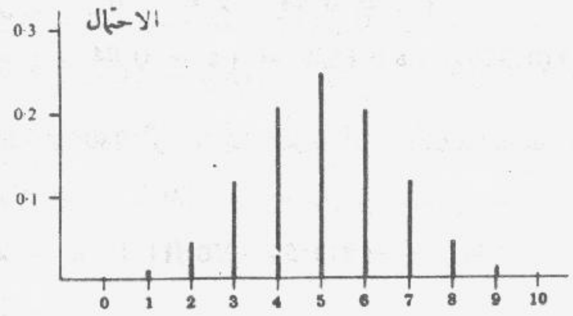
الحـــل :

(أ)

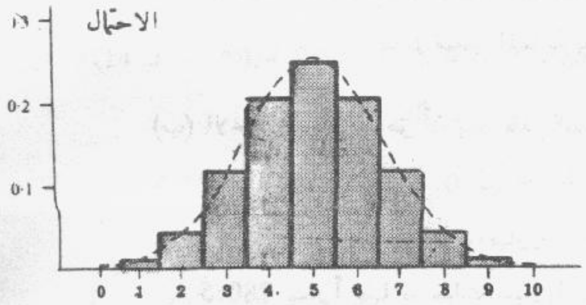
$\Pr\{3 \text{ صور}\} = {}_{10}C_3(\tfrac{1}{2})^3(\tfrac{1}{2})^7 = \tfrac{15}{128}$ $\quad$ $\Pr\{5 \text{ صور}\} = {}_{10}C_5(\tfrac{1}{2})^5(\tfrac{1}{2})^5 = \tfrac{63}{256}$

$\Pr\{4 \text{ صور}\} = {}_{10}C_4(\tfrac{1}{2})^4(\tfrac{1}{2})^6 = \tfrac{105}{512}$ $\quad$ $\Pr\{6 \text{ صور}\} = {}_{10}C_6(\tfrac{1}{2})^6(\tfrac{1}{2})^4 = \tfrac{105}{512}$

إذن $\Pr\{\text{مابين } 3 \text{ و } 6 \text{ صور بما فيها } 6\} = \tfrac{15}{128} + \tfrac{105}{512} + \tfrac{63}{256} + \tfrac{105}{512} = \tfrac{99}{128} = 0{\cdot}7734.$



شكل ٧ - ٨ (أ)



شكل ٧ - ٨ (ب)

(ب) توزيع الاحتمال لعدد الصور فى 10 رميات لعملة موضح بيانياً فى الأشكال ٧ - ٨ (أ) و ٧ - ٨ (ب) أعلاه ، حيث الشكل ٧ - ٨ (ب) تعامل البيانات كما لو كانت متصلة . والاحتمال المطلوب هو مجموع مساحات المستطيلات المظللة بالشكل ٧ - ٨ (ب) ويمكن تقريبها بالمساحة تحت المنحنى الطبيعى المقابل والمرسوم بخطوط متقطعة .

باعتبار البيانات متصلة ، فإنه يترتب على ذلك اعتبار من 3 إلى 6 صور مثل من 2.5 إلى 6.5 صورة . كذلك فإن متوسط وتباين توزيع ذى الحدين معطى ب : $\mu = Np = 10(\tfrac{1}{2}) = 5$ and $\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(10)(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})} = 1{\cdot}58.$

والآن 2.5 معبراً عنها بوحدات معيارية $= (2.5-5)/1.58 = -1.58$

و 6.5 معبراً عنها بوحدات معيارية $= (6.5-5)/1.58 = 0.95$

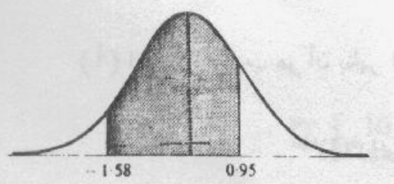
الاحتمال المطلوب = (المساحة بين $z = -1.58$ و $z = 0.95$)

= المساحة بين $z = -1.58$ و $z = 0$) +

(المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.95$)

$= 0.4429 + 0.3289 = 0.7718$

والذى يقارن بشكل جيد مع القيمة الحقيقية 0.7734 الذى حصلنا عليه فى الجزء (أ) .



شكل ٧ - ٩

وتزداد درجة الدقة لقيم N الأكبر .

٧-٢٥ عملة متوازنة قذفت 500 مرة . أوجد احتمال أن عدد الصور لن تختلف عن 250

(أ) بأكثر من 10 (ب) بأكثر من 30

الحــل :

$$\mu = Np = (500)(\tfrac{1}{2}) = 250 \quad \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(500)(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})} = 11.18$$

(أ) المطلوب هو احتمال أن يكون عدد الصور يقع بين 240 و 260 أو ، إذا اعتبرنا أن البيانات متصلة ، يقع بين 239.5 و 260.5 .

239.5 معبراً عنها بوحدات معيارية $= (239.5 - 250)/11.18 = -0.94$

260.5 معبراً عنها بوحدات معيارية $= 0.94$

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعى بين $z = -0.94$ و $z = 0.94$)

= (ضعف المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.94$) $= 2(0.3264) = 0.6528$

(ب) الاحتمال المطلوب هو أن يقع عدد الصور بين 220 و 280 أو ، إذا اعتبرنا أن البيانات متصلة ، بين 219.5 و 280.5

219.5 معبراً عنها بوحدات معيارية $= (219.5 - 250)/11.18 = -2.73,$.

280.5 معبراً عنها بوحدات معيارية $= 2.73$

الاحتمال المطلوب = (ضعف المساحة بين $z = 0$ و $z = -2.73$)

$2(0.4968) = 0.9936$

ومن هذا يتضح أنه يمكن أن تكون على درجة كبيرة من الثقة أن عدد الصور لن تختلف عن القيمة المتوقعة (250) بأكثر من 30 . أما إذا حدث أن كان عدد الصور الفعلى هو 280 . فإننا سنعتقد اعتقاداً قوياً بأن العملة متحيزة أى مغشوشة .

٧-٢٦ قذفت زهرة 120 مرة . أوجد احتمال أن يظهر الوجه 4 :

(أ) 18 مرة أو أقل (ب) 14 مرة أو أقل . مفترضاً أن الزهرة غير متحيزة .

الحــل :

احتمال ظهور الوجه الذى عليه الرقم 4 هو $p = 1/6$ ، واحتمال عدم ظهوره هو $q = 5/6$

(أ) الاحتمال المطلوب هو أن يظهر الوجه 4 بين 0 و 18 مرة . وهذا بالضبط يساوى

$${}_{120}C_{18}(\tfrac{1}{6})^{18}(\tfrac{5}{6})^{102} + {}_{120}C_{17}(\tfrac{1}{6})^{17}(\tfrac{5}{6})^{103} + \cdots + {}_{120}C_{0}(\tfrac{1}{6})^{0}(\tfrac{5}{6})^{120}$$

وبما أن العمل المطلوب فى الحساب عمل شاق ، فإننا نستخدم التقريب باستخدام المنحنى الطبيعى .

وإذا اعتبرنا أن البيانات متصلة ، ينتج عن ذلك أن ظهور الوجه 4 بين 0 إلى 18 مرة يمكن اعتباره مثل ظهور هذا الوجه بين 0.5 — إلى 18.5 . كذلك

$$\mu = Np = 120(\tfrac{1}{6}) = 20 \quad \text{و} \quad \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(120)(\tfrac{1}{6})(\tfrac{5}{6})} = 4.08$$

إذن 0.5 — معبراً عنها بوحدات معيارية $= -5.02 = (-0.5 - 20)/4.08$

18.5 معبراً عنها بوحدات معيارية $= -0.37$

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعى بين $z = -5.02$ و $z = -0.37$)

= (المساحة بين $z = 0$ و $z = -5.02$) — (المساحة بين $z = 0$ و $z = -0.37$)

$0.5 - 0.1443 = 0.3557$

(ب) خطوط الحل كما فى (أ) ، مستخدمين 14 بدلا من 18

إذن 0.5 — بوحدات معيارية $= 5.02$ ، 14.5 بوحدات معيارية $= 1.35 = (14.5 - 20)/4.08$.

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعى بين $z = -5.02$ و $z = -1.35$)

= (المساحة بين $z = 0$ و $z = -5.02$) — (المساحة بين $z = 0$ و $z = -1.35$)

$0.5 - 0.4115 = 0.0885$

ومن هذا فإنه لو كررنا عينات كل منها مكون من 120 رمية لزهرة ، فإن الوجه 4 يظهر 14 مرة أو أقل فى حوالى 1/10 من هذه العينات .

توزيع بواسون :

٧-٢٧ عشرة فى المائة من الأدوات المنتجة فى عملية صناعية معينة هى أدوات تالفة . أوجد احتمال أن يكون فى 10 من هذه الأدوات وحدتان تالفتان بالضبط باستخدام (أ) توزيع ذى الحدين (ب) تقريب بواسون لتوزيع ذى الحدين .

الحـل :

احتمال وجود أداة تالفة $= p = 0.1$

(أ) Pr { 2 أداة تالفة من 10 } $= {}_{10}C_2(0.1)^2(0.9)^8 = 0.1937 \text{ or } 0.19.$

(ب) $\lambda = Np = 10(0.1) = 1.$

Pr { 2 أداة تالفة من 10 } $= \dfrac{\lambda^X e^{-\lambda}}{X!} = \dfrac{(1)^2 e^{-1}}{2!} = \dfrac{e^{-1}}{2} = \dfrac{1}{2e} = 0.1839$

أو 0.18 ، باستخدام $e = 2.718$

بشكل عام فإن التقريب يعتبر جيداً إذا كانت $p \leq 0.1$ و $\lambda = Np \leq 5$.

٧–٢٨ إذا كان احتمال أن يعانى شخص من رد فعل سيىء عند حقنه بمصل معين هو 0.001 ، أوجد احتمال أنه من 2000 شخص (أ) 3 بالضبط (ب) أكثر من شخصين ، سيعانون من رد فعل سيىء .

الحــل :

$$\Pr\{X \text{ شخص يعانى من رد فعل سيىء}\} = \frac{\lambda^X e^{-\lambda}}{X!} = \frac{2^X e^{-2}}{X!}$$

حيث $\lambda = Np\ (2000)(0.001) = 2$

(أ) $\Pr\{3 \text{ أشخاص سيعانون من رد فعل سيىء}\} = \dfrac{2^3 e^{-2}}{3!} = \dfrac{4}{3e^2} = 0.180$

(ب) $\Pr\{0 \text{ سيعانى}\} = \dfrac{2^0 e^{-2}}{0!} = \dfrac{1}{e^2}$

$\Pr\{1 \text{ سيعانى}\} = \dfrac{2^1 e^{-2}}{1!} = \dfrac{2}{e^2}$

$\Pr\{2 \text{ سيعانى}\} = \dfrac{2^2 e^{-2}}{2!} = \dfrac{2}{e^2}$

$$\Pr\{\text{أكثر من شخصين سيعانون}\} = 1 - \Pr\{0 \text{ أو } 1 \text{ أو } 2 \text{ سيعانون}\}$$

$$= 1 - (1/e^2 + 2/e^2 + 2/e^2) = 1 - 5/e^2 = 0.323.$$

لاحظ أنه طبقا لتوزيع ذى الحدين فإن الاحتمالات المطلوبة هى :

(أ) ${}_{2000}C_3 (0.001)^3 (0.999)^{1997}$

(ب) $1 - \{{}_{2000}C_0 (0.001)^0 (0.999)^{2000} + {}_{2000}C_1 (0.001)^1 (0.999)^{1999} + {}_{2000}C_2 (0.001)^2 (0.999)^{1998}\}$

والتى من الصعب حساب قيمتها مباشرة .

٧–٢٩ إذا كان توزيع بواسون معطى كالآتى : $p(X) = \dfrac{(0.72)^X e^{-0.72}}{X!}$.

أوجد (أ) $p(0)$ (ب) $p(1)$ (جـ) $p(2)$ (د) $p(3)$

الحــل :

(أ) $p(0) = \dfrac{(0.72)^0 e^{-0.72}}{0!} = \dfrac{(1)e^{-0.72}}{1} = e^{-0.72} = 0.4868$ باستخدام الجدول بالملحق (VI) ، صفحة ٥٣٨

(ب) $p(1) = \dfrac{(0.72)^1 e^{-0.72}}{1!} = 0.72e^{-0.72} = (0.72)(0.4868) = 0.3505$

(جـ) $p(2) = \dfrac{(0.72)^2 e^{-0.72}}{2!} = \dfrac{(0.5184)e^{-0.72}}{2} = (0.2592)(0.4868) = 0.1262$

طريقة أخرى : $p(2) = \dfrac{0.72}{2} p(1) = (0.36)(0.3505) = 0.1262$

(د) $p(3) = \dfrac{(0.72)^3 e^{-0.72}}{3!} = \dfrac{0.72}{3} p(2) = (0.24)(0.1262) = 0.0303$

توزيع كثيرات الحدود :

٧-٣٠ صندوق يحتوى على 5 كرات حمراء ، 4 كرات بيضاء و 3 كرات زرقاء . اختيرت كرة عشوائياً من الصندوق وسجل لونها ، ثم أعيدت مرة أخرى للصندوق . أوجد احتمال أن يكون أنه من بين 6 كرات اختيرت بهذه الطريقة يوجد 3 كرات حمراء ، 2 بيضاء وكرة زرقاء .

الحــل :

Pr { زرقاء فى أى سحبة } $= 3/12$ ، Pr { حمراء فى أى سحبة } $= 5/12$ ، Pr { بيضاء فى أى سحبة } $= 4/12$ ،

إذن Pr { 3 حمراء ، 2 بيضاء ، 1 زرقاء } $= \frac{6!}{3!2!1!}(\frac{5}{12})^3(\frac{4}{12})^2(\frac{3}{12})^1 = \frac{625}{5184}$

توفيق البيانات باستخدام توزيعات نظرية :

٧-٣١ وفق توزيع ذى الحدين لبيانات المسألة ٢ – ١٧ ، الفصل الثانى

الحــل :

حيث أن Pr { X صورة فى رمية 5 عملات } $= p(X) = {}_5C_X p^X q^{5-X}$

حيث p احتمال الصورة و q احتمال الكتابة فى رمية واحدة لعملة .

من المسألة ٧ – ١١ (أ) متوسط عدد الصور $\mu = Np = 5p$

للتوزيع التكرارى المشاهد أو الفعلى ، فإن متوسط عدد الصور هو

$$\frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{(38)(0) + (144)(1) + (342)(2) + (287)(3) + (164)(4) + (25)(5)}{1000} = \frac{2470}{1000} = 2{\cdot}47$$

بمساواة الوسط النظرى والوسط الفعلى ، $5p = 2.47$ أو $p = 0.494$ وبهذا فإن توزيع ذى الحدين الذى تم توفيقه معطى : $p(X) = {}_5C_X (0{\cdot}494)^X (0{\cdot}506)^{5-X}$

فى الجدول ٧ – ٤ تم إدراج هذه الاحتمالات وكذلك الاحتمالات المتوقعة (النظرية) أو التكرارات الفعلية . ويظهر فى الجدول أن التوفيق جيد . وسوف يبحث جودة التوفيق فى المسألة ١٢ – ١٢ ، الفصل الثانى عشر .

جـــــدول ٧ – ٤

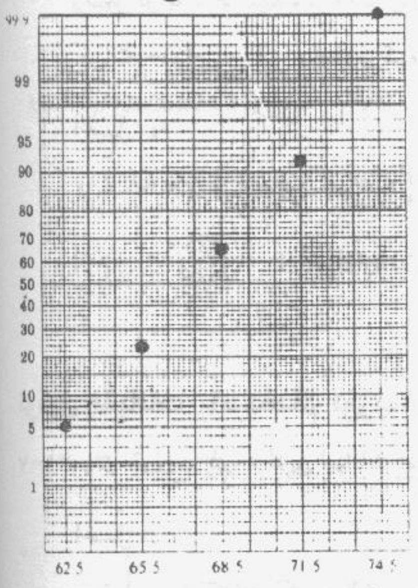
عدد الصور X	Pr { X صورة }	التكرار المتوقع	التكرار المشاهد
0	0·0332	33·2 or 33	38
1	0·1619	161·9 or 162	144
2	0·3162	316·2 or 316	342
3	0·3087	308·7 or 309	287
4	0·1507	150·7 or 151	164
5	0·0294	29·4 or 29	25

٧–٣٢ استخدام ورق رسم بيانى احتمالى لتحديد ما إذا كان التوزيع التكرارى المذكور بالجدول ٢ – ١ صفحة ٤٥ ، من الممكن تقريبه بصورة جيدة من التوزيع الطبيعى .

الحـــل :

الجـــدول ٧ – ٥

الوزن (kg)	التكرار المتجمع النسبى (٪)
أقل من 62·5	5·0
أقل من 65·5	23·0
أقل من 68·5	65·0
أقل من 71·5	92·0
أقل من 74·5	100·0



شكل ٧ – ١٠

٧–٣٣ وفق منحنى طبيعى لبيانات الجدول ٢ – ١ ، صفحه

الحـــل :

جـــدول ٧ – ٦

الوزن (kg)	حدود الفئات X	z لحدود الفئات	المساحة تحت المنحنى الطبيعى من 0 إلى z	المساحة لكل فئة	التكرار المتوقع	التكرار المشاهد
	59·5	2·72	0·4967			
60–62	62·5	−1·70	0·4554	0·0413	4·13 or 4	5
63–65	65·5	−0·67	0·2486	0·2068	20·68 or 21	18
66–68	68·5	0·36	0·1406	Add → 0·3892	38·92 or 39	42
69–71	71·5	1·39	0·4177	0·2771	27·71 or 28	27
72–74	74·5	2·41	0·4920	0·0743	7·43 or 7	8

$\bar{X} = 67{\cdot}45$ kg. $s = 2{\cdot}92$ kg

يمكن تنظيم الحل كما فى الجدول ٧ – ٦ . عند حساب z لحدود الفئات ، تستخدم $z = (X - \bar{X})/s$ حيث الوسط $\bar{X}$ والانحراف المعيارى s حصلنا عليهما من المسألة ٣ – ٢٢ ، الفصل الثالث والمسألة ٤ – ١٧ الفصل الرابع على الترتيب .

فى العمود الرابع من اليسار ، المساحات تحت المنحنى الطبيعى من 0 إلى z حصلنا عليها باستخدام الجدول فى الملحق II ، صفحة ٥٣٣ . ومنها نحصل على المساحات تحت المنحنى الطبيعى بين القيم المتتالية لـ z كما فى العمود الخامس . وهذه نحصل عليها بطرح المساحات المتتالية فى العمود الرابع عندما تكون قيم z المقابلة لها نفس الإشارة ، وبالإضافة عندما تكون قيم z لها إشارة مختلفة (والتى حدثت مرة واحدة فى الجدول) . والسبب فى ذلك يبدو واضحاً من الشكل البيانى .

بضرب القيم فى العمود الخامس من اليسار (والذى يمثل التكرارات النسبية) بالتكرار الكلى (فى هذه الحالة 100) ينتج عنه التكرارات المتوقعة كما فى العمود السادس . حيث يشاهد أنها تتفق مع التكرارات الفعلية أو المشاهدة والموضحة بالعمود الأخير .

وإذا أردنا ، فإنه يمكن تعديل الانحراف المعيارى باستخدام معامل تصحيح شبرد (أنظر المسألة ٤ – ٢١ (أ) ، الفصل الرابع) .

« جودة التوفيق » لهذا التوزيع سوف تدرس فى المسألة ١٢ – ١٣ ، الفصل الثانى عشر .

٧-٣٤ الجدول ٧ – ٧ يبين عدد الأيام f فى فترة 50 يوماً والتى حدث خلالها X حادث سيارة فى مدينة معينة . وفق توزيع بواسون لهذه البيانات .

الحـل :

متوسط عدد الحوادث هو

$$\lambda = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{(21)(0) + (18)(1) + (7)(2) + (3)(3) + (1)(4)}{50} = \frac{45}{50} = 0.90$$

وبهذا ، طبقاً لتوزيع بواسون

$$\Pr\{X \text{ حادث}\} = \frac{(0.90)^X e^{-0.90}}{X!}$$

جدول ٧ – ٧

عدد الأيام f	عدد الحوادث X
21	0
18	1
7	2
3	3
1	4
المجموع 50	

الجدول ٧ – ٨ يبين احتمالات 0, 1, 2, 3, 4 حادث كما حصلنا عليها من توزيع بواسون السابق ، مقروناً بالعدد المتوقع أو النظرى لعدد الأيام والتى وقع خلالها X حادثة (حصلنا عليه بضرب الاحتمالات المقابلة فى 50) .

ولتسهيل المقارنة كتب فى العمود الأخير العدد الفعلى للأيام

جـــدول ٧ – ٨

العـدد الفعـلى للأيام	العـدد المتوقع للأيام	$Pr\{X \text{ حادثة}\}$	عدد الحوادث X
0	0·4066	20·33 or 20	21
1	0·3659	18·30 or 18	18
2	0·1647	8·24 or 8	7
3	0·0494	2·47 or 2	3
4	0·0111	0·56 or 1	1

لاحظ أن توفيق توزيع بواسون للبيانات المعطاة يعد توفيقا جيداً .

لتوزيع بواسون الحقيقى ، التباين $\sigma^2 = \lambda$. وحساب التباين للتوزيع المعطى نجد أنه 0.97 . وهذا يقارن بشكل مقبول مع قيمة λ وهى 0.90 ، ويمكن اعتبار ذلك دليلا اخر لملاءمة توزيع بواسون كتقريب لبيانات العينة .

مســائل اضــافية

توزيع ذى الحدين :

٧–٣٥ احسب قيمة (أ) $7!$ (ب) $10!/(6!4!)$ (جـ) ${}_9C_5$ (د) ${}_{11}C_8$ (هـ) ${}_6C_1$

ج : (أ) 5040 (ب) 210 (جـ) 126 (د) 165 (هـ) 9

٧–٣٦ أوجد مفكوك (أ) $(q+p)^7$ ، (ب) $(q+p)^{10}$

ج : (أ) $q^7 + 7q^6p + 21q^5p^2 + 35q^4p^3 + 35q^3p^4 + 21q^2p^5 + 7qp^6 + p^7$

(ب) $q^{10} + 10q^9p + 45q^8p^2 + 120q^7p^3 + 210q^6p^4 + 252q^5p^5 + 210q^4p^6 + 120q^3p^7 + 45q^2p^8 + 10qp^9 + p^{10}$

٧–٣٧ فى رمية عملة متوازنة 6 مرات أوجد احتمال ظهور (أ) 0 (ب) 1 (جـ) 2 (د) 3 (هـ) 4 (و) 5 صورة

ج : (أ) 1/64 (ب) 3/32 (جـ) 15/64 (د) 5/16 (هـ) 15/64 (و) 3/32

٧–٣٨ فى رمية واحدة لست عملات غير متحيزة أوجد احتمال ظهور (أ) 2 أو أكثر صورة (ب) أقل من 4 صور

ج : (أ) 57/64 (ب) 21/32

٧–٣٩ إذا كانت X تعبر عن عدد الصور فى رمية واحدة لأربع عملات متوازنة ،

أوجد (أ) $\Pr\{X = 3\}$ (ب) $\Pr\{X < 2\}$ (جـ) $\Pr\{X \leqq 2\}$ (د) $\Pr\{1 < X \leq 3\}$

ج : (أ) ¼ (ب) 5/16 (جـ) 11/16 (د) 5/8

٧–٤٠ فى 800 عائلة بكل منها 5 أطفال ، ماهو عدد الأسر المتوقع أن يكون بها (أ) 3 أولاد (ب) 5 بنات (جـ) 2 أو 3 أولاد . مفترضاً أن احتمال وجود بنت أو ولد احتمال متساو .

ج : (أ) 250 (ب) 25 (جـ) 500

٧–٤١ أوجد احتمال الحصول على ما مجموعة 11 (أ) مرة واحدة ، (ب) مرتان ، فى رميتين لزهرتين متوازنتين .

ج : (أ) 17/162 (ب) 1/324

٧–٤٢ أوجد احتمال الحصول على 9 بالضبط مرة واحدة فى 3 رميات لزهرتين

ج : 64/243

٧–٤٣ أوجد احتمال تخمين الإجابة الصحيحة على 6 أسئلة على الأقل من 10 أسئلة فى امتحان « خطأ – صواب » .

ج : 193/512