CALCUL EXPLICITE DU GRADIENT DE LA PERTE DE CHARGE

ZEGHADNIA Lotfi[1] REZGUI Nourdine[1] & ACHOUR Bachir[2]
Zeghadnia_lotfi@yahoo.fr

[1]*Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Centre Universitaire Souk-Ahras, Algérie.*

[2]*Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Université de Biskra, Algérie.*

Résumé : *Le calcul de l'écoulement turbulent en conduit en charge, est fréquemment rencontré dans la vie pratique des ingénieurs hydrauliciens; ce type d'écoulement est gouverné par la relation fonctionnelle suivante:* $\varphi(Q,J,D,\varepsilon,\nu)=0$*, où Q est le débit volume; J est le gradient de la perte de charge, D est le diamètre interne de la conduite,* ε *est la hauteur moyenne des aspérité caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite et* ν *est la viscosité cinématique du liquide en écoulement. Parmi ces paramètres, seuls Q, D et J sont d'un intérêt pratique. La relation de Darcy-Weisbach, en s'appuyant sur la relation de Colebrook-White pour le calcul du Coefficient de frottement f, sont les relations de base pour modéliser l'écoulement turbulent dans une conduite. Le calcul du gradient de la perte de charge* $J=(Q,D,\varepsilon,\nu)$ *est implicite en vertu de la forme de l'équation de Colebrook-White; le but de cet article est de proposer une formule explicite pour déterminer le gradient de la perte de charge* $J=(Q,D,\varepsilon,\nu)$*, tout en couvrant tout le domaine du diagramme de Moody, en basant sur un modèle rugueux de référence.*

Mots-clefs **:** *Ecoulement turbulent, modélisation, modèle rugueux, formule explicite.*

Abstract: *The computation of turbulent pipe flow is frequently meeting in Hydraulic engineers life practice. This kind of flow is governed by the following relationship* $\varphi(Q,J,D,\varepsilon,\nu)=0$*, where Q is the discharge, J is the hydraulic energy slope, D is the interne pipe diameter,* ε *is the average roughness height and* ν *is knematic viscosite. Among these, only Q, D and J are of practical interest. The Darcy-Weisbach equation, thereby accounting for the friction factor f according to Colebrook-White relationship, are the principal equations to model the turbulent pipe flow. The computation of the energy slope* $J=(Q,D,\varepsilon,\nu)$ *is implicit in accordance with the form of Colebrook-White relation. The goal of this paper is to propose an explicit relation allow the computation of the energy slop J, covering the entire of Moody diagram, according to rough pipe flow model.*

Key-Words: *Turbulent flow, Modelization, Rough model, Explicit equation.*

1. Introduction

L'écoulement turbulent en charge dans une conduite est gouverné par la relation fonctionnelle :

$$\varphi(Q, D, J, \varepsilon, \nu) = 0 \qquad (1)$$

Où :
Q : est le débit.
D: diamètre intérieur de la conduite.
J: le gradient de la perte de charge.
ε : est la rugosité absolue de la conduite correspondant à la valeur moyenne des aspérités.
ν : est la viscosité cinématique du fluide en écoulement.
L'écoulement turbulent en charge dans une conduite est modélisé par la relation universellement connue de Darcy-Weisbach (Zeghadnia et Achour, 2007):

$$J = \frac{8fQ^2}{\pi^2 g D^5} \qquad (2)$$

Où g est l'accélération gravitationnelle, f est le coefficient de frottement (ou coefficient de résistance). Le calcul explicite du gradient J de la perte de charge est possible, une fois le coefficient f est déterminé tel que (Sinniger et Hager, 1989) :

$$f = \left[-2\log_{10}\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{R\sqrt{f}}\right)\right]^{-2} \qquad (3)$$

Tel que :

$$R = \frac{4Q}{\pi D \nu} \qquad (4)$$

R: est le nombre de Reynolds

2. Expression du coefficient de frottement

Il s'agit de proposer une relation explicite au calcul du coefficient de frottement f dans le cas où le gradient de perte de charge J est le paramètre inconnu du problème. Les variables connus sont le débit volume Q, le diamètre D de la conduite, la rugosité ε et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. En l'absence de la valeur du gradient de la perte de charge J, la relation (2) n'a aucune utilité pour l'évaluation du coefficient de frottement f. Le coefficient f a été déterminé expérimentalement par divers chercheurs, notamment les collaborateurs de prandtl. Moody a été le premier qui a représenté en abaque y relatif, et qui porte aujourd'hui son nom (Sinniger et Hager, 1989).

3. Méthode graphique

En 1944 Lewis F. Moody, professeur à l'université de Princeton, publia *Friction factor for pipe flow* (Moody, 1944), le diagramme a été élaboré dans le but de déterminer par voie graphique la valeur du coefficient de frottement f, lorsque la rugosité relative ε/D de la conduite ainsi que le nombre de Reynolds R caractérisant l'écoulement sont donnés, tel que: $0 \leq \varepsilon/D \leq 5.10^{-2}$. Le diagramme permet non seulement la lecture graphique de la valeur du coefficient de frottement f mais aussi d'observer les trois domaines de l'écoulement turbulent avec le temps l'approche petit à petit est substituer par d'autres formules explicites.

4. Formules explicites

Parmi les formules explicites les plus significatives qui ont étés proposé durant ces trente dernières années, celle de Swamee et Jain, destinées au calcul explicite du coefficient de frottement f (Swamee et jain, 1976). Selon Swamee et Jain, la formule (3) peut être remplacée avec une bonne approximation par la relation suivante :

$$f = \left[-2log_{10}\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{5.74}{R^{0.9}}\right)\right]^{-2} \qquad (5)$$

Swamee et Jain indiquent que la relation (5) doit être appliqué dans les gammes des valeurs $10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2}$ de la rugosité relative et $5.10^{3} < R < 10^{8}$ du nombre de Reynolds.

5. Discussion

Afin de mieux apprécier la formule (5), nous allons la comparer avec la formule (3) de Colebrook-White. Un grand nombre de valeurs de la rugosité relative appartenant à la gamme $10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2}$ a été ainsi testé dans l'étude comparative des coefficients de frottement de Swamee -Jain et de Colebrook-White. Autant de courbes représentant la variation de l'écart $\left(\frac{\Delta f}{f}\right)$ en fonction du nombre de Reynolds R ont étés tracés. Nous représentons sur la figure 2 trois entre elles, qui nous paraissons significatives :

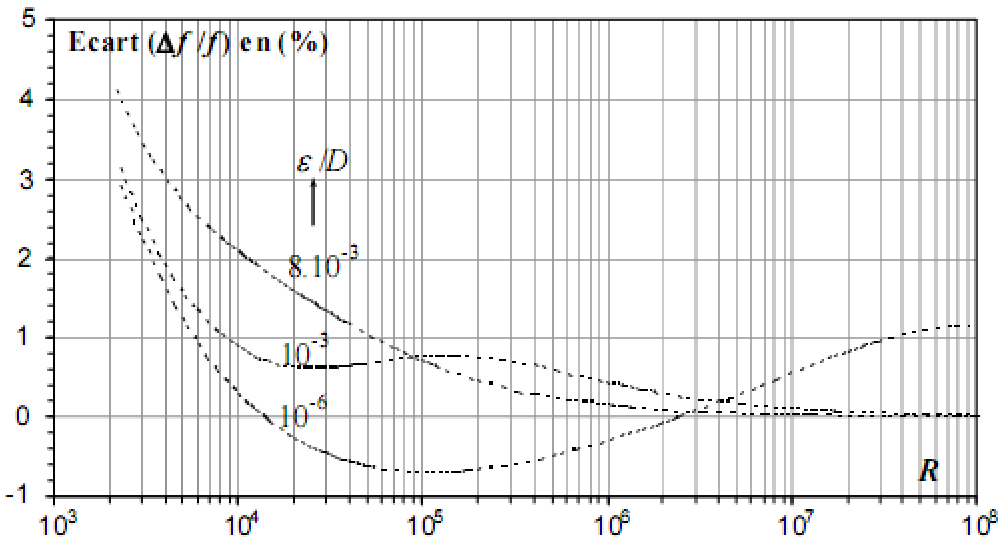

Figure 1 : Comparaison entre les relations de Colebrook-White (3) et de Swamee et Jain (4) pour quelques valeurs de la rugosité relative ε/D

Au regard du diagramme de la figure 2, il apparait clairement que pour les valeurs du nombre de Reynolds R tel que $5.10^{3} < R < 10^{8}$, l'écart relatif $\left(\frac{\Delta f}{f}\right)$ varie entre 0.3% à 2.8% (Zeghadnia et Achour,2007), et connu que $\frac{\Delta J}{J} = \frac{\Delta f}{f}$, donc on peut conclure que l'écart relatif sur le gradient de la perte de charge $\left(\frac{\Delta J}{J}\right)$ et entre 0.3% et 2.8% pour la même gamme du nombre de Reynolds R et la rugosité relative ε/D.

6. Modèle Rugueux de référence

Le modèle que nous considérons, est une conduite caractérisée par la rugosité relative $\overline{\varepsilon}/\overline{D} = 0.037$ arbitrairement choisie. L'écoulement est ou supposer être turbulent de telle sorte que le coefficient de frottement soit égale à $\overline{f} = 1/16$ en vertu de la relation (3) pour$R = \overline{R} \to \infty$. Ainsi, en appliquant la relation (2), le gradient de la perte de charge :

$$\overline{J} = \frac{\overline{Q^2}}{2g\pi^2\overline{D^2}} \tag{6}$$

En appliquant la relation (4) au modèle rugueux de référence, il en résulte que :

$$\overline{R} = \frac{4\overline{Q}}{\pi\overline{D}\nu} \tag{7}$$

7. Calcul du gradient J

Les paramètres, Q, D, ε et ν sont donnés, cela implique que le nombre de Reynolds R ainsi que la rugosité relative sont également connus. Il nous reste à établir la formule explicite du coefficient de frottement f.

7.1 Coefficient de frottement

Assumons les égalités suivantes $D = \overline{D}$ et $Q \neq \overline{Q}$ et bien évidement R$\neq \overline{R}$. Si en combinant les relations (2) et (6), il est aisé de montrer que :

Pour $J = \overline{J} \quad \Rightarrow \quad Q = \psi_Q \overline{Q}$ (8)

Où : $\psi_Q = \frac{1}{4\sqrt{f}}$ (9)

Au regard de l'équation (9), il apparait que le débit Q est égale au débit $\overline{Q}$ corrigé par l'effet de ψ_Q. Celui-ci peut être considérer comme le facteur de correction de débit.
Des équations(4) , (7) et (8), nous déduisons que : (10)

$R = \psi_Q \overline{R}$

En substituant d'une part les relations (9) et (10) dans l'équation (3) de Colebrook-White il vient que :

$$\psi_Q = -\frac{1}{2}\log_{10}\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{10.04}{\overline{R}}\right) \quad (11)$$

En insérant d'autre part la relation (11) dans l'équation (10) nous obtenons la formule du nombre de Reynolds R en fonction $\overline{R}$:

$$R = -\frac{1}{2}\overline{R}\log_{10}\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{10.04}{\overline{R}}\right) \quad (12)$$

Le nombre de Reynolds $\overline{R}$ est donné par la relation implicite (12), celle-ci peut être exprimée par une excellente relation approchée :

$$\overline{R} = 2R\left[-\log_{10}\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{5.5}{R^{0.9}}\right)\right]^{-1} \quad (13)$$

La relation explicite du coefficient de frottement peut être obtenu par la combinaison entre les équations (13) est (11) soit :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -\frac{1}{2}\log_{10}\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{10.04}{\overline{R}}\right) \quad (14)$$

En s'aidant de la relation (13), une comparaison a été faite entre les équations (3) est (14). Le résultat est reportée sur le graphique de la figure 2 à partir de laquelle nous pouvons observer que les écarts dépendent à la fois de R et ε/D, mais restent inférieurs à 0.4% pour $R > 2300$ *et* $0 < \varepsilon/D < 5.10^{-2}$, les écarts se réduit de moitié , soit 0.2% pour $R \geq 4000$ et dans toute la gamme de la rugosité relative $0 \leq \varepsilon/D \leq 0.05$(Zeghadnia et Achour, 2007).

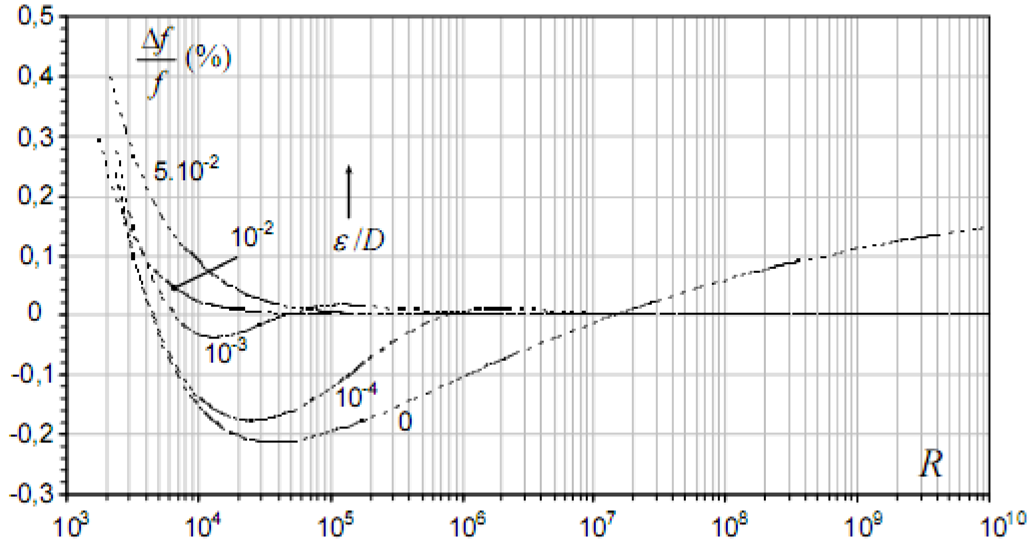

Figure 2 : Comparaison entre la relation de Colebrook-White et la relation (14),

en fonction du nombre de Reynolds R et pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D.

La relation (14) est applicable pour tout le domaine de l'écoulement turbulent correspondant à $R > 2300$. En combinant les relations (2) et (14) on obtient l'expression explicite du gradient de la perte de charge J est :

$$J = \frac{8Q^2}{\pi^2 g D^5}\left[-2\log_{10}\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{10.04}{\bar{R}}\right)\right]^{-1} \qquad (15)$$

La relation (15) est applicable pour $R > 2300$, couvrant tout le domaine du diagramme de Moody.

8. Conclusion

Le gradient de la perte de charge est calculé par une nouvelle approche basée sur un modèle rugueux de référence, celle-ci est caractérisée par une rugosité relative $\bar{\varepsilon}/\bar{D} = 0.037$.Le régime d'écoulement est ou supposé turbulent rugueux de sorte que le coefficient de frottement égale à $\bar{f} = \frac{1}{16}$ en vertu de la relation de Colebrook-White. En applique la relation de Darcy-Weisbach, il a été alors possible de calculer explicitement le gradient de la perte de charge $J(Q, D, \varepsilon, \nu)$ et cela après l'exploitation de la relation de Colebrook-White.

9. Bibliographie

Moody, L. F. 1944. *Friction factors for pipe flow*. Trans. ASME, 66:671-678.

Sinniger, R.O., Hager, W.H. 1989. *Constructions hydrauliques*, Traité de Génie Civil, Ed. Presses Polytechniques Romandes, Vol.15, Suisse.

Swamee, P.K., Jain, A.K. 1976. *Explicit equations for pipe-flow problems*, Proc. ASCE, J. Hydraulics division, Vol.102, HY5.657-664.

Zeghadnia L, (2007). *Computation of the pressurized turbulent flow in circular pipe. Magister thesis Badji Mokhtar university-Algeria.*