



## CALCUL DE L'ÉCOULEMENT TURBULENT EN CHARGE DANS LES SYSTEMES HYDRAULIQUES

**Zeghadnia Lotfi<sup>1</sup>, Achour Bachir<sup>2</sup>, Djemili Lakhdar<sup>3</sup>**

*1*Maître assistant, Département de Génie Civil, Institut des Sciences et de la technique,

*Centre Universitaire de Souk Ahras, Algérie.*

*Zeghadnia\_lotfi@yahoo.fr*

*2* Professeur, Département d'Hydraulique, Faculté des Sciences et des sciences de l'ingénieur

*Universitaire de Biskra, Algérie.*

*3*Maître de conférence, Département d'hydraulique, Institut des Sciences de l'ingénieur,

*Universitaire Badji Mokhtar, Annaba, Algérie.*

### Résumé

Les écoulements dans les circuits hydrauliques sont généralement des écoulements turbulents en charge, la relation fonctionnelle suivante gouverne ces types d'écoulement, où  $Q$  est le débit,  $J$  est le gradient de perte de charge,  $D$  est le diamètre intérieur de la conduite,  $\varepsilon$  est la hauteur moyenne des aspérités caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite,  $\nu$  est la viscosité cinématique du liquide en écoulement. Parmi ces paramètres, seuls  $Q$ ,  $D$ ,  $J$  sont d'intérêt pratique. Cette étude a pour but, de résoudre le problème de calcul de l'écoulement en charge, et ce, à travers l'étude de l'approche de Hager, établit pour répondre à ces préoccupations, où nous irons montrer ces avantages et ces inconvénients.

Mots clés: Ecoulement turbulent, écoulement en charge, calcul explicite.

### 1. Introduction

L'écoulement en conduite est fréquemment rencontré, l'écoulement dans une conduite en charge est gouverné par la relation fonctionnelle :

$$\varphi(Q, J, D, \varepsilon, \nu) = 0 \quad (1)$$

Où :

•  $Q$  : est le débit,  $J$  est le gradient de perte de charge,  $D$  est le diamètre intérieur de la conduite,  $\varepsilon$  est la rugosité absolue de la conduite,  $\nu$  est la viscosité

cinématique du liquide en écoulement. Parmi ces paramètres influençant l'écoulement, seuls  $Q$ ,  $D$  et  $J$  présentent un intérêt pratique. L'écoulement turbulent dans une conduite est modélisé par la formule universellement connue de Darcy-Wisbach, dans laquelle le coefficient de frottement  $f$  est évalué par application de la relation de Colebrook-White. Ces relations s'écrivent :

$$J = \frac{8fQ^2}{\pi^2 g D^5} \quad (2)$$

Chlef le : 25 Septembre 2011

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left[ \frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{R\sqrt{f}} \right] \quad (3)$$

Où :

•  $g$  l'accélérateur de la pesanteur  $R$ : est le nombre de Reynolds défini par la relation :

$$R = \frac{4Q}{\pi D v} \quad (4)$$

La relation est valable pour les valeurs de  $R > 2300$  [1].

## 2. Calcul du débit

Le calcul explicite du débit est rendu possible à condition que,  $D$ ,  $\varepsilon$ , et  $v$  soient les paramètres connus du problème [2]. En effet, en éliminant le coefficient de frottement  $f$

Entre les relations (2) et (3), il est aisé de déduire que :

$$q = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log_{10} \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{N\sqrt{f}} \right) \quad (5)$$

Où les paramètres adimensionnels  $q$  et  $N$  s'expriment respectivement par :

$$q = \frac{Q}{\sqrt{gJ D^5}}, \quad N = \frac{\sqrt{gJ D^5}}{v}$$

Les trois paramètres  $q$ ,  $N$  et  $\varepsilon/D$  sont des paramètres adimensionnels; de point de vue physique, le paramètre  $q$  est un paramètre composé, et on peut écrire :

$$q = \frac{Q/\sqrt{gJ D^5}}{\sqrt{J}} = \frac{Q^*}{\sqrt{J}} \quad (6)$$

Où  $Q^*$  est un débit relatif et par suite  $q = \frac{Q^*}{\sqrt{J}}$  représente conductivité relative.

La relation (5) est applicable pour l'ensemble du domaine de l'écoulement turbulent et couvre tout le diagramme de Moody, correspond à  $R > 2300$  et  $0 \leq \varepsilon/D \leq 0.05$

Et elle constitue la solution explicite de la formule de Colebrook-White destinée au calcul du débit. Pour l'écoulement turbulent lisse où la rugosité relative  $\varepsilon/D = 0$ , la relation (5) devient

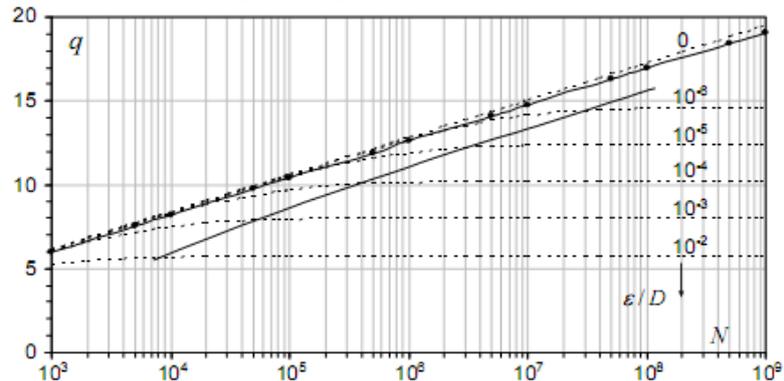
$$q = \frac{-\pi}{\sqrt{2}} \log_{10} \left( \frac{2.51}{N\sqrt{2}} \right) \quad (7)$$

Par contre, pour l'écoulement turbulent rugueux ou hydrauliquement rugueux correspond à  $R \rightarrow \infty$ , ou à

$v \rightarrow 0$ , au regard de la relation (4), la relation (5) devient :

$$q = \frac{-\pi}{\sqrt{2}} \log_{10} \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} \right) \quad (8)$$

Pour l'ensemble du domaine de l'écoulement est en régime turbulent, la relation (5) a été tracée graphiquement dans le système d'axe de coordonnées à divisions semi-logarithmique.



(—) Courbe  $q(N)$  correspondant à 1,5% d'écart par rapport au régime d'écoulement turbulent rugueux.

(—●—) Courbe  $q(N)$  correspondant à 1,5% d'écart par rapport au régime d'écoulement lisse.

Figure -1- : Variation de  $q(N)$  selon la relation (1.71) pour diverses valeurs de la rugosité relative  $\varepsilon/D$ .

Le diagramme de la figure montre que pour une valeur fixe de la rugosité relative  $\varepsilon/D$ , la conductivité relative  $q$  augmente avec l'accroissement du paramètre  $N$ . Les courbes obtenues, deviennent de plus en plus quasi-horizontale pour les valeurs élevées de la rugosité relative  $\varepsilon/D$ . La figure -1- montre que la conductivité relative  $q$  en régime de transition est inférieure à celle de l'écoulement rugueux, quelque soit la valeur du paramètre  $N$ .

Il est admis que si l'écartement entre la conductivité relative calculées selon les relation (5) et (7) est de 1,5%, le régime d'écoulement peut alors être considéré comme étant en régime turbulent rugueux.

Ce qui nous donne à la fois après certaine reformulation, l'équation suivante :

$$N = \frac{2.51}{\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} \right)^{1/1.015} - \frac{\varepsilon/D}{3.7} \right]^{-1} \quad (9)$$

Hager propose de substituer la relation (9) par une exelente approximation suivante soit :

$$\varepsilon/D = (0.01N)^{-10/9} \quad (10)$$

Donc, d"après l"équation (9) déduit que le régime d"écoulement, peut être considéré comme était en régime turbulent rugueux si :

$$\varepsilon/D \geq (0.01N)^{-10/9} \quad (11)$$

Idem, pour le cas du régime turbulent lisse, nous irons suivre les mêmes étapes, ce qui nous donne à la fin à obtenir, l"équation suivante :

$$\varepsilon/D = 3.7 \left[ \left( \frac{2.51}{\sqrt{2}N} \right)^{1/1.015} - \frac{2.51}{N\sqrt{2}} \right] \quad (12)$$

Selon Hager, l"équation (12) peut être remplacée par une bonne approximation, soit:

$$\frac{\varepsilon}{D} = (3.125N)^{-9/10} \quad (13)$$

Alors, l"écoulement peut être considéré un écoulement turbulent lisse si :

$$\frac{\varepsilon}{D} \leq (3.125N)^{-9/10} \quad (14)$$

Tenant compte des inéquations (11) et(14); on peut donc déduire que, l"écoulement peut être considéré en régime transitoire, si :

$$(0.01N)^{-10/9} < \frac{\varepsilon}{D} < (3.125N)^{-9/10} \quad (15)$$

Donc, pour évaluer le débit volume Q, écoulé par une conduite circulaire sans pression à partir des valeurs comme de  $D, J, \varepsilon$  et  $v$ , la relation (5) est à conseiller tout en respectant les étapes suivantes :

- i. Les paramètres  $D, J, et v$  permettent de calculer le paramètre sans dimension N, soit :  $N = \frac{\sqrt{gJ}D^5}{v}$ .
- ii. Les valeurs connus de  $\varepsilon/D$  et N soit alors introduit dans la relation (5)

pour l"évaluation de la conductivité relative q , Soit :  $q = \frac{Q}{\sqrt{gJ}D^5}$ .

Le débit volume Q écoulé par la conduite est enfin déduit de la relation utilisée en étape ii.

### 3. Calcul du diamètre

L"approche de Hager, consiste à évaluer le diamètre "D" de la conduite circulaire sous pression pour chacun des domaines de l"écoulement turbulent. Cette approche vise à contourner la difficulté de proposer une solution unique à l"ensemble du domaine turbulent. L"approche de Hager est basée sur la reformulation de Swamee et Jain des trois équations (2), (3) et (4), soit :

$$v^* = \frac{D^{*3/2}}{1.776} \left[ 10^{-\sqrt{2}/(\pi D^{*5/2})} - \frac{\varepsilon^*}{3.7D^*} \right] \quad (16)$$

Où :

$v^* = vD_0/Q$  est un paramètre appelé " paramètre cinétique".

$D_0 = [Q^2/(gJ)]^{1/5}$  est un paramètre appelé " diamètre caractéristique".

$\varepsilon^* = \varepsilon/D$  est la rugosité relative.

#### 3.1 Calcul du diamètre dans le domaine lisse

Dans le domaine lisse, correspond à  $\varepsilon/D \rightarrow 0$  ou  $\varepsilon^* \rightarrow 0$ , l"écoulement est régi par la relation implicite :

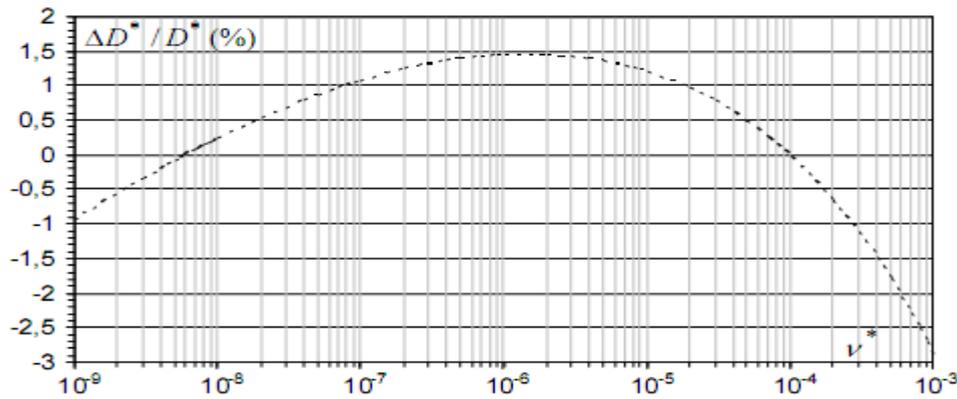
$$v^* = \frac{D^{*3/2}}{1.776} 10^{-\sqrt{2}/(\pi D^{*5/2})} \quad (17)$$

Hager suggère de calculer le diamètre D de la conduite après avoir d'abord évaluer le diamètre relatif  $D^*$  selon la relation explicite approchée :

$$D^* = \frac{2}{5} \log_{10} \left[ \frac{54.64}{\log_{10}(v^*)} \right] \quad (18)$$

Selon Hager la relation (18) peut être appliquée dans la gamme  $10^{-9} < v^* < 10^{-3}$

est le calcul à montrer que le diamètre relatif  $D^*$  varie dans l'intervalle  $0.3163 < D < 0.5187$ . Afin d'apprécier la fiabilité de relation approchée (18), nous l'avons comparé à la relation exacte (17) en calculant l"écart  $\frac{\Delta D^*}{D^*}$  obtenu sur le diamètre relatif [4].

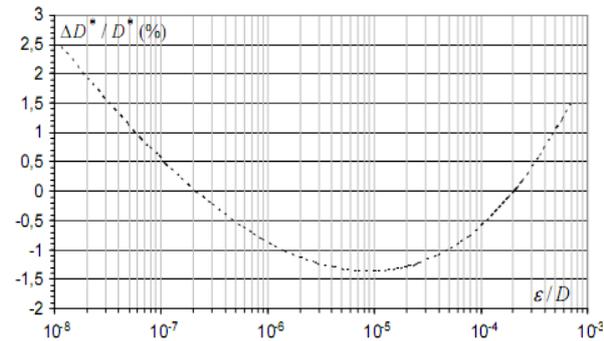


**Figure 2-** Comparaison entre les relations (17) et (18) pour  $10^{-9} < v^* < 10^{-3}$

D'après la figure 2, l'erreur relative sur le diamètre relatif peut être atteindre 3%. Cette dernière constitue l'écart maximal que pourrait occasionner l'application de la relation approchée (18) proposé par Hager. Pour réduire l'écart à 1.5% en valeur absolue, on propose de limiter le domaine à  $10^{-9} \leq v^* \leq 4 \cdot 10^{-4}$ , correspond à  $0.3163 \leq D^* \leq 0.4896$ . Le calcul du diamètre D de la conduite dans le domaine turbulent lisse s'effectue selon les étapes suivantes :

- i. Etant donné Q, J, et  $v^*$  le diamètre caractéristique  $D_0$  est calculée en application de la relation  $D_0 = [Q^2 / (gJ)]^{1/5}$ .
- ii. A partir des valeurs connus des paramètres Q,  $D_0$  et  $v$  on calcul  $v^*$ , où :  $v^* = vD_0 / Q$ .
- iii. Une fois  $v^*$  calculée, le diamètre relatif  $D^*$  est obtenu par application de la relation (18).
- iv. Les valeurs ainsi calculées de  $D_0$  et  $D^*$  permettent de déduire le diamètre D recherché selon la relation  $D = D^* D_0$ .

3.2 Calcul du diamètre dans le domaine rugueux  
 Dans le domaine turbulent rugueux, l'effet du nombre de Reynolds R sur les caractéristiques de



l'écoulement, tel que le coefficient de frottement  $f$ , le gradient J de la perte de charge ou même le diamètre D de la conduite, n'est pas significative, et cela correspond à  $R \rightarrow \infty$  ou par  $v \rightarrow 0$ , ainsi tenant compte de la relation  $v^* = vD_0 / Q$ . Si  $v \rightarrow 0 \Rightarrow v^* \rightarrow 0$ , le diamètre relatif  $D^*$  est alors régi par la relation (16) pour  $v^* \rightarrow 0$ , soit :

$$10^{\frac{-\sqrt{2}}{\pi D^{*5/2}}} - \frac{\varepsilon^*}{3.7D^*} = 0$$

Ou bien :

$$\varepsilon^* = 3.7D^* \times 10^{\frac{-\sqrt{2}}{\pi D^{*5/2}}} \tag{19}$$

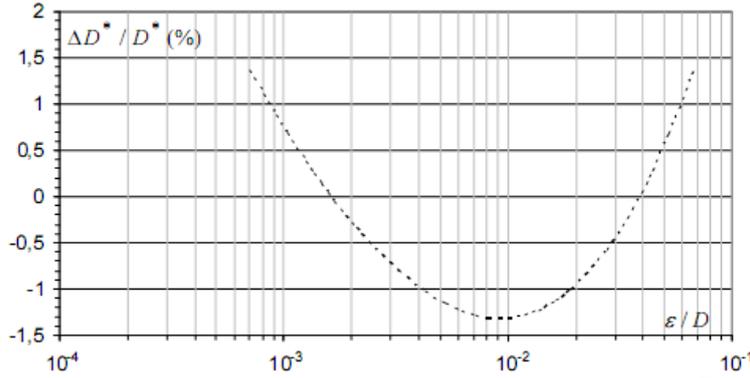
La détermination du diamètre relatif nécessite un procédé itératif, selon Hager, les solutions approchées de l'équation implicite de l'équation (19) sont :

$$D^* = \frac{\varepsilon^{*0.03}}{1.853} \text{ pour } 10^{-8} < \varepsilon^* / D^* = \varepsilon / D < 7 \cdot 10^{-4} \tag{20}$$

$$D^* = \frac{\varepsilon^{*1/16}}{1.422} \text{ pour } 7 \cdot 10^{-4} < \varepsilon^* / D^* = \varepsilon / D < 7 \cdot 10^{-2} \tag{21}$$

Selon l'intervalle des valeurs de la rugosité relative  $\varepsilon^*$  ou  $\varepsilon / D$ , les relations (20) et (21), nous l'avons comparées chacune dans son domaine de validité à la relation exacte (19).

**Figure 3-** Comparaison entre la relation exacte (19) et celle approchée (20) dans l'intervalle  $10^{-8} < \varepsilon / D < 7 \cdot 10^{-4}$ .



**Figure 4-**  
Comparaison entre  
la relation exacte (19) et celle approchée (21) dans  
l'intervalle  $7.10^{-4} < \varepsilon/D < 7.10^{-2}$

La figure-3- montre que l'écart relatif pourra atteindre 2.5%; pour un écart relatif maximal 1.5% sur le diamètre relatif  $D^*$  la relation (20) doit être appliquée dans le domaine  $3.10^{-8} < \varepsilon/D < 7.10^{-4}$  de la rugosité relative. De même la figure -4- montre que l'application de la relation approchée (21) dans le domaine  $7.10^{-4} < \varepsilon/D < 7.10^{-2}$  conduit à un écart maximal de l'ordre de 1.5% sur le calcul du diamètre relatif  $D^*$ .

#### 4. Calcul du gradient J

Le calcul du gradient J de perte de charge peut être résolu une fois le coefficient de frottement  $f$  est déterminé. Alors peut se calculer selon l'équation (2).

##### 4.1 Écoulement turbulent lisse

Pour un régime d'écoulement turbulent lisse l'équation (3) se simplifiée et devient :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10} \left( \frac{2.51}{R\sqrt{f}} \right) \quad (22)$$

Qui est une relation implicite, selon Swamee et Jain [3], la solution explicite de l'équation (22) est :

$$f = \left[ -2\log_{10} \left( \frac{5.74}{R^{0.9}} \right) \right]^{-2} \quad (23)$$

La relation (23) est valable pour :

$$5.10^3 < R < 10^8 \quad \text{et} \quad 10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2}$$

Si en remplaçant la relation (23) dans l'équation (2) le gradient de la perte de charge devient:

$$J = \frac{8Q^2}{\pi^2 g D^5} \left( -2\log_{10} \left( \frac{5.74}{R^{0.9}} \right) \right)^{-2} \quad (24)$$

##### 4.2 Ecoulement turbulent rugueux

Théoriquement il correspond à  $R \rightarrow \infty$  ou  $\nu \rightarrow 0$ , alors la relation (3) devient :

$$f = \left[ -2\log_{10} \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} \right) \right]^{-2} \quad (25)$$

##### 4.3 Ecoulement transitoire

L'explicitation de la relation dépend de l'explicitation de la formule (3); Selon Swamee et Jain la relation (3) peut être remplacé par la relation approchée suivante

$$f = \left[ -2\log_{10} \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{5.74}{R^{0.9}} \right) \right]^{-2} \quad (26)$$

Donc la formule (2) devient :

$$J = \frac{8Q^2}{\pi^2 g D^5} \left[ -2\log_{10} \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{5.74}{R^{0.9}} \right) \right]^{-2} \quad (27)$$

#### 5. Conclusion

L'approche de Hager constitue de nos jours la meilleure approche susceptible de répondre au problème que pose aussi bien le calcul explicite du débit volume Q écoulé par la conduite que celui du diamètre D et le gradient de la perte de charge J. Le calcul explicite du débit volume Q est possible par les équations (5) et (6), pour celui du diamètre, peut être réalisé en fonction le régime d'écoulement par les équation approchées (18) ,(20) et (21). Le calcul explicite du gradient de la perte de charge J, est possible après l'utilisation de la formule approchée de Swamee et Jain, pour évaluer le coefficient de frottement  $f$ , valable pour :  $5.10^3 < R < 10^8$  et  $10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2}$ ..

#### 4. References

- [1] HAGER, W.H. (1987). Computation of turbulent conduit flows, 3R-International, Vol.26, 116-121.
- [2] SINNIGER, R.O., HAGER, W.H. (1989). Constructions hydrauliques, Traité de Génie

---

Civil, Ed. Presses Polytechniques Romandes,  
Vol.15, Suisse.

- [3] SWAMEE, P.K., JAIN, A.K. (1976). Explicit equations for pipe-flow problems, Proc. ASCE, J. Hydraulics Division, Vol.102, HY5.657-664.
- [4] ZEGHADNIA, L. (2007). Computation of the pressurized turbulent flow in circular pipe. Magister thesis Badji Mokhtar university-Algeria..