

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
BADJI MOKHTAR UNIVERSITY



جامعة باجي مختار – عنابة –

Faculté des Sciences
de l'Ingénieur
Département d'Hydraulique

Année 2006/2007

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MAGISTER

Intitulé :

Calcul de l'écoulement turbulent dans les conduites en charge par la méthode du modèle rugueux de référence.

Option: Hydraulique urbaine et construction Hydraulique

par

Zeghadnia Lotfi

Directeur de Mémoire: Bachir ACHOUR Professeur Université de Biskra

Devant le jury

Président: Hammar Yahia M.C Université de Annaba
Examineurs: Remini Boualem Professeur Université de Blida
Debabeche Mahmoud M.C Université de Biskra
Djebbar Yacine M.C Centre Universitaire de Souk Ahras

ABSTRACT

Turbulent pipe flow is governed by the following functional relationship $\varphi(Q, J, D, \varepsilon, \nu) = 0$, where Q is the discharge, J is the hydraulic energy slope, D is the internal pipe diameter, ε is the average roughness height and ν is the kinematic viscosity. Among these, only Q , D and J are of practical interest.

Turbulent pipe flow is modelled by the well known Darcy-Weisbach formula, thereby accounting for the friction factor f according to Colebrook-White relationship. This is valid for Reynolds number up to 2300.

When Q , D , ε and ν are given, the Darcy-Weisbach relationship allows calculation of the energy slope J , once the friction factor f is determined from Colebrook-White formula, using however an iterative procedure. *Swamee* and *Jain* gave an approximate solution for Colebrook-White relation, established for the ranges $5 \times 10^3 < R < 10^8$ and $10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2}$ of Reynolds number and relative roughness respectively. The obtained relation must be used carefully since it occurs unacceptable deviation, depending on both R and ε/D .

A direct determination of the discharge Q is possible provided J , D , ε and ν are given. This was demonstrated by *Hager* when eliminating friction factor between Darcy-Weisbach and Colebrook-White relationships.

On the other hand, computation of the diameter D is more complex. It requires an iterative procedure according to the basic equations governing the turbulent pipe-flow, despite the fact that these were reduced by *Swamee* and *Jain* to a single equation presented in terms of non-dimensional parameters.

The main objective of this study is to propose a new approach for turbulent pipe-flow computation. The basic equations governing the turbulent pipe-flow are applied to a rough pipe model characterized by an arbitrarily assigned relative roughness value. This is a referential rough model from which the current pipe-flow characteristics are deduced. The flow is or supposed to be fully rough such that the friction factor is equal to 1/16 according to Colebrook-White equation for $R \rightarrow \infty$. Applying the Darcy-Weisbach relation, it is then possible to express the characteristics of the rough pipe-flow model, in particular the energy slope \bar{J} , the diameter \bar{D} , the discharge \bar{Q} and the *Reynolds* number \bar{R} .

Furthermore, computation of the three pipe-flow parameters of practical interest namely, $Q(D, J, \varepsilon, \nu)$, $D(Q, J, \varepsilon, \nu)$ and $J(Q, D, \varepsilon, \nu)$ are worked out using explicit relevant equations covering the entire range of Moody diagram. Computation is conducted conformably to the following steps:

- (i) Computation of the discharge $Q(D, J, \varepsilon, \nu)$ is conducted assuming the three following conditions namely, $Q \neq \bar{Q}$, $D = \bar{D}$ and $J = \bar{J}$. The *Reynolds* number \bar{R} is then well defined and the required discharge Q is given by the exact solution of the original implicit Colebrook's equation.
- (ii) Computation of the diameter $D(Q, J, \varepsilon, \nu)$ is conducted assuming the following conditions namely, $Q = \bar{Q}$, $D \neq \bar{D}$ and $J = \bar{J}$. The diameter \bar{D} and the *Reynolds* number \bar{R} are then both determined using explicit equations. Thus, the required diameter D is computed by a simple formulation, involving only 0.6% of maximum deviation.
- (iii) Computation of the energy slope $J(Q, D, \varepsilon, \nu)$ is conducted under the same conditions than those in (i), i.e. $Q \neq \bar{Q}$, $D = \bar{D}$ and $J = \bar{J}$. The *Reynolds* number \bar{R} is then well defined for the known values of ε/D and R . Furthermore, the required value of the energy slope J is thus immediately deduced.

SOMMAIRE

Introduction générale	1
Chapitre I : Etat des connaissances sur le calcul de l'écoulement turbulent en conduite circulaire en charge	4
I.1. Introduction	4
I.2. Equation fondamentale de l'écoulement dans les conduites circulaires sous pression	4
I.3. Formules usuelles de l'écoulement turbulent en conduite circulaire sous pression	10
I.3.1. Formule de Darcy-Weisbach	10
I.3.2. Formule de Colebrook-White et diagramme universel de Moody	11
I.3.3. Formule de Swamee et Jain	17
I.3.4. Formule de Achour et al	19
I.4. Méthodes de calcul de l'écoulement turbulent en conduite circulaire sous pression	21
I.4.1. Position du problème	21
I.4.2. Approche de Swamee et Jain	22
<i>Exemple d'application 1.1</i>	26
I.4.3. Approche de Hager	27
I.4.3.1. Calcul du débit	27
<i>Exemple d'application 1.2</i>	33
<i>Exemple d'application 1.3</i>	34
I.4.3.2. Calcul du diamètre dans le domaine de l'écoulement turbulent lisse	35
<i>Exemple d'application 1.4</i>	37
I.4.3.3. Calcul du diamètre dans le domaine pratiquement lisse	38
I.4.3.4. Calcul du diamètre dans le domaine rugueux	39
<i>Exemple d'application 1.5</i>	44
<i>Exemple d'application 1.6</i>	45
I.5. Synthèse des résultats et conclusions	47
Chapitre II : Nouvelle approche au calcul de l'écoulement turbulent en conduite circulaire en charge	51
II.1. Introduction	51
II.2. Modèle rugueux de référence	51

II.3. Calcul de l'écoulement turbulent par le modèle rugueux de référence.....	54
II.3.1. Le débit volume Q est inconnu.....	54
II.3.1.1. Expression du nombre de <i>Reynolds</i>	54
<i>Exemple d'application 2.1</i>	60
<i>Exemple d'application 2.2</i>	61
II.3.1.2. Expression du coefficient de frottement.....	63
<i>Exemple d'application 2.3</i>	63
II.3.1.3. Expression du débit volume.....	64
<i>Exemple d'application 2.4</i>	65
<i>Exemple d'application 2.5</i>	66
II.3.2. Le diamètre D est inconnu.....	67
II.3.2.1. Expression du nombre de <i>Reynolds</i>	67
<i>Exemple d'application 2.6</i>	72
<i>Exemple d'application 2.7</i>	74
II.3.2.2. Expression du coefficient de frottement.....	75
<i>Exemple d'application 2.8</i>	75
<i>Exemple d'application 2.9</i>	76
II.3.2.3. Expression du diamètre.....	78
<i>Exemple d'application 2.10</i>	78
<i>Exemple d'application 2.11</i>	80
II.3.3. Le gradient J de la perte de charge est inconnu.....	82
II.3.3.1. Expression du coefficient de frottement.....	82
<i>Exemple d'application 2.12</i>	83
<i>Exemple d'application 2.13</i>	85
II.3.3.2. Expression du gradient J de la perte de charge.....	85
<i>Exemple d'application 2.14</i>	86
<i>Exemple d'application 2.15</i>	87
II.4. Conclusion.....	88
Conclusion générale	90
Références bibliographiques	91
Liste des principales notations utilisées	92

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le calcul de l'écoulement en conduites est fréquemment rencontré dans la pratique de l'ingénieur hydraulicien. Les applications sont nombreuses et nous pouvons citer, à titre d'exemple, le cas de la conduite de refoulement depuis une station de pompage vers un réservoir d'alimentation d'une agglomération ou celui de la conduite gravitaire alimentant, pour des besoins énergétiques, une usine hydroélectrique.

L'écoulement dans une conduite en charge est gouverné par trois principales relations qui sont:

- i. La relation de *Darcy-Weisbach* (1845, 1854) qui exprime le gradient J de la perte de charge linéaire appelée aussi pente de frottement :

$$J = \frac{8f}{g\pi^2} \frac{Q^2}{D^5} \quad (1)$$

dans laquelle f désigne le coefficient de frottement, Q est le débit volume écoulé par la conduite, D est le diamètre de la conduite et g est l'accélération de la pesanteur.

- ii. La relation de *Colebrook-White* (1939), que le lecteur peut consulter dans l'excellent ouvrage de *Daily et Harleman* (1973) qui exprime le coefficient de frottement f de l'écoulement ou coefficient de résistance :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) \right]^{-2} \quad (2)$$

dans laquelle ε est la rugosité absolue de la paroi interne de la conduite et R est le nombre de *Reynolds*. Le rapport ε/D figurant dans la relation (2) correspond à la rugosité relative. L'expérience a montré que la relation (2) est applicable pour tout nombre de *Reynolds* R tel que $R > 2300$ (*Sinniger et Hager*, 1989) et couvre l'ensemble du domaine du diagramme de *Moody* (1944) pour lequel $0 \leq \varepsilon/D \leq 5.10^{-2}$. La relation (2) a été proposée pour être appliquée au cas des conduites de commerce où la répartition locale des éléments de rugosité est accidentelle, par opposition à une répartition artificielle (*Sinniger et Hager*, 1989).

- iii. L'expression du nombre de *Reynolds* R :

$$R = \frac{4Q}{\pi D \nu} \quad (3)$$

dans laquelle ν désigne la viscosité cinématique du liquide en écoulement. En réalité, le nombre de *Reynolds* R a été défini comme étant $R = VD/\nu$, où V est la vitesse moyenne de

l'écoulement, et exprime de ce fait le rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité. Lorsque les forces d'inertie sont prépondérantes, le nombre de *Reynolds* R prend des valeurs élevées, tandis que ses valeurs sont réduites lorsque les forces de viscosité prédominent.

L'écoulement turbulent est celui que l'on rencontre souvent en pratique et correspond à un nombre de *Reynolds* $R > 2300$.

Les relations (1), (2) et (3) constituent le système d'équations de base de l'écoulement turbulent dans les conduites en charge et s'appliquent à tout problème qui s'y rapporte.

Au regard des équations (1), (2) et (3), il ressort que l'écoulement turbulent dans une conduite en charge est influencé par cinq paramètres qui sont : le débit volume Q , le diamètre D de la conduite, le gradient J de la perte de charge, la rugosité absolue ε et la viscosité cinématique ν . Ces cinq paramètres forment la relation fonctionnelle :

$$\varphi(Q, D, J, \varepsilon, \nu) = 0 \quad (4)$$

Dans la plupart des applications pratiques, ce sont les paramètres Q , D et J qui présentent un intérêt. Le premier paramètre nous renseigne sur la capacité d'évacuation de la conduite, le second paramètre est indispensable au dimensionnement de la conduite et le troisième paramètre permet d'ajuster la pente de la conduite pour acheminer le débit Q . Trois catégories de problèmes peuvent être ainsi dégagées :

- i. Calculer le débit Q pour les valeurs données de D , J , ε et ν .
- ii. Calculer le diamètre de la conduite pour les valeurs données de Q , J , ε et ν .
- iii. Calculer le gradient de la perte de charge J pour les valeurs données de Q , D , ε et ν .

Pour la première catégorie de problème, une solution explicite a été proposée par le passé et permet la détermination directe du débit volume Q (Hager, 1987; Sinniger et Hager, 1989). La seconde catégorie de problème nécessite l'emploi de procédés itératifs ou graphiques (Chow, 1973) en raison de la forme implicite des équations de base (1), (2) et (3). La troisième catégorie de problème exige également une résolution itérative ou graphique en raison de la forme implicite de la relation (2).

Durant ces trente dernières années, des solutions approchées ont été proposées pour la résolution du système d'équations (1), (2) et (3). Les études les plus significatives sont certainement celles de Swamee et Jain (1976, 1977, 1978) et de Hager (1987). Les premiers auteurs proposent une relation explicite approchée en remplacement de la relation (2) de Colebrook-White, tandis que le second a établi des relations explicites applicables à la deuxième catégorie de problème que nous avons précédemment indiquée. Nous présenterons également la relation explicite de Achour et al., établie en 1997 et publiée en 2002, destinée

au calcul explicite du coefficient de frottement d'un écoulement turbulent en conduite circulaire sous pression, ainsi que celle plus récente de *Achour et Bedjaoui* publiée en 2006. Toutes ces approches seront exposées et largement discutées au cours des prochains paragraphes de cet ouvrage.

Nous nous intéresserons aussi à la résolution du système d'équations (1), (2) et (3) dans le but de répondre aux trois catégories de problèmes de l'écoulement turbulent dans les conduites en charge. Une nouvelle approche sera proposée pour le calcul du débit Q , du diamètre D et du gradient J de la perte de charge. Cette approche est basée sur la méthode du modèle rugueux de référence développée par le laboratoire de recherche en hydraulique souterraine et de surface (LARHYSS) de l'Université de Biskra. La méthode est extensible aux conduites sous pression de forme non circulaire.

Ce travail est subdivisé en deux grands chapitres. Le premier chapitre est consacré à un état des connaissances sur le calcul de l'écoulement turbulent dans les conduites en charge et à travers lequel nous passons en revue les relations les plus significatives. Le second chapitre constitue notre modeste contribution au calcul de l'écoulement turbulent dans les conduites en charge et permet au lecteur d'apprécier les fondements de la méthode préconisée. Des applications pratiques liées au dimensionnement de la conduite en charge de forme circulaire sont présentées et montrent la simplicité et la fiabilité des relations proposées.

CHAPITRE I :

ETAT DES CONNAISSANCES SUR LE CALCUL DE L'ÉCOULEMENT TURBULENT EN CONDUITE CIRCULAIRE EN CHARGE

I.1. Introduction

L'objectif principal du présent chapitre est de passer en revue les diverses approches connues destinées au calcul de l'écoulement turbulent dans une conduite en charge. Notre attention portera essentiellement sur la détermination des paramètres Q , D et J qui sont les trois principaux paramètres recherchés en pratique.

En se basant sur un schéma de définition, les caractéristiques de l'écoulement turbulent dans une conduite en charge seront présentées puis commentées, tout en mettant l'accent sur leur signification physique. C'est le cas en particulier du gradient J de la perte de charge, du coefficient de frottement f et du nombre de *Reynolds* R qui forment le système d'équations de base régissant l'écoulement.

I.2. Equation fondamentale de l'écoulement dans les conduites circulaires sous pression

La figure 1.1 montre les caractéristiques d'un écoulement dans une conduite circulaire en charge que l'on désigne aussi sous les termes de "conduite sous pression" ou de "conduite forcée" (*Cauvin et Guerrée, 1978*). La conduite étant cylindrique, il en résulte que les filets liquides y sont parallèles et que la pression varie de manière hydrostatique dans chacune des sections droites. La ligne piézométrique se situe au-dessus de la conduite puisque celle-ci est pleine. L'écoulement est supposé être en régime permanent impliquant que le débit Q est le même à chaque instant et dans toutes les sections.

La vitesse moyenne V de l'écoulement est liée au débit Q par la relation :

$$Q = VA \tag{1.1}$$

où A est l'aire de la section droite de la conduite et s'écrit :

$$A = \pi D^2 / 4 \tag{1.2}$$

Pour une conduite circulaire de diamètre donné, la relation (1.2) indique que $A = \text{constante}$. Ainsi, puisque $Q = \text{constante}$ car l'écoulement est permanent et que $A = \text{constante}$, la relation (1.1) montre que la vitesse moyenne $V = \text{constante}$. La vitesse moyenne V est donc la même dans toutes les sections de la conduite et l'écoulement qui s'y écoule est en régime permanent et uniforme.

Pour établir l'équation de ce régime, nous considérons la tranche de liquide comprise, à l'instant t , entre les deux sections droites AB et CD distantes d'une longueur L (figure 1.1).

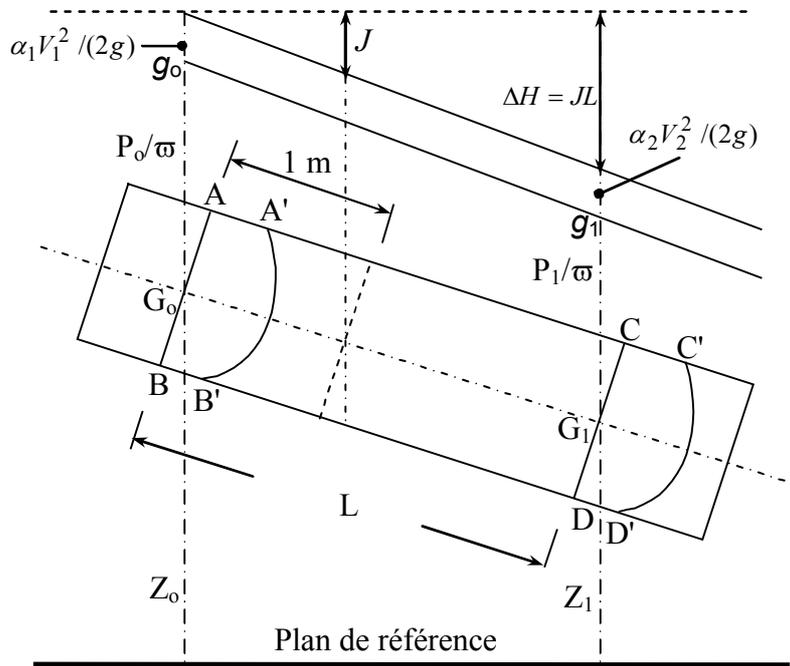


Figure 1.1 : Schéma de définition de l'écoulement dans une conduite circulaire en charge (Cauvin et Guerrée, 1978)

La ligne piézométrique est schématisée par la ligne g_0-g_1 , tandis que la ligne de charge totale correspond à ligne située au-dessus. Il apparaît que la ligne piézométrique et celle de la charge totale sont parallèles puisque :

$$V_0 = V_1 = V = \text{constante} \quad (1.3)$$

et que par conséquent :

$$\alpha_0 V_0^2 / (2g) = \alpha_1 V_1^2 / (2g) = \alpha V^2 / (2g) \quad (1.4)$$

où α est le facteur de Coriolis ou facteur de correction de l'énergie cinétique exprimée par la quantité $V^2 / (2g)$. Les identités indiquées par la relation (1.4) sont justifiées par le fait que l'aire des sections AB et CD sont identiques et que la répartition des vitesses est la même dans ces sections, impliquant que $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha$.

Pendant le temps dt qui suit l'instant t , la tranche de liquide ABCD subit un déplacement et vient en A'B'C'D'. Selon le théorème de l'énergie cinétique ou théorème de la force vive, l'accroissement de l'énergie cinétique de la masse liquide ABCD est égal à la somme des travaux de toutes les forces qui ont agi sur elle pendant le déplacement.

Soient :

- i. V_0 la vitesse dans la section AB d'aire A_0 dont le centre de gravité G_0 est situé à la cote Z_0 par rapport au plan de référence.
- ii. V_1 la vitesse dans la section CD d'aire A_1 dont le centre de gravité G_1 est situé à la cote Z_1 par rapport au plan de référence.
- iii. m la masse commune des éléments infiniment petits ABA'B' et CDC'D' et dont le volume est identique.

L'énergie cinétique du liquide situé dans la tranche ABA'B', à l'instant initial t , est :

$$E_o = \alpha \frac{mV_o^2}{2} \quad (1.5)$$

L'énergie cinétique du liquide situé dans la tranche ABCD est donc :

$$E_o' = E_o + E_t \quad (1.6)$$

où E_t est l'énergie cinétique du liquide occupant la tranche A'B'CD à l'instant t . Tenant compte de la relation (1.5), la relation (1.6) s'écrit :

$$E_o' = \alpha \frac{mV_o^2}{2} + E_t \quad (1.7)$$

A l'instant $(t + dt)$, le liquide situé dans l'espace ABCD est venu occuper la tranche A'B'C'D' et son énergie cinétique est :

$$E_1 = E_{t+dt} + \alpha \frac{mV_1^2}{2} \quad (1.8)$$

Dans la relation (1.8), la quantité E_{t+dt} est l'énergie cinétique du liquide occupant l'espace A'B'CD à l'instant $(t + dt)$, tandis que la quantité $mV_1^2 / 2$ correspond à l'énergie cinétique du liquide occupant l'espace CDC'D'.

Mais le régime de l'écoulement étant permanent, la vitesse en chaque point du liquide situé dans A'B'CD est restée constante. Il s'ensuit que toutes les particules de même masse m_p qui passent en un point où la vitesse est V ont toujours la même énergie cinétique $(\alpha m_p V^2 / 2)$.

Ainsi, l'énergie cinétique du liquide, situé dans l'espace A'B'CD, est la même à l'instant final $(t+ dt)$ qu'à l'instant initial t , ce qui se traduit par l'égalité :

$$E_{t+dt} = E_t \quad (1.9)$$

L'accroissement de l'énergie cinétique du liquide situé dans la tranche ABCD, pendant l'intervalle de temps dt , est :

$$\Delta E = E_1 - E_o' \quad (1.10)$$

En tenant compte des relations (1.7) et (1.8), la relation (1.10) devient :

$$\Delta E = (E_{t+dt} + \alpha mV_1^2 / 2) - (E_t + \alpha mV_o^2 / 2) \quad (1.11)$$

Mais, compte tenu de la relation (1.9), la relation (1.11) se réduit à :

$$\Delta E = (\alpha m V_1^2 / 2) - (\alpha m V_0^2 / 2) \quad (1.12)$$

La relation (1.12) traduit le fait que l'accroissement de l'énergie cinétique du liquide contenu dans la tranche ABCD est égal à la différence entre l'énergie cinétique de CDC'D' et l'énergie cinétique de ABA'B'. Or, selon la relation (1.4), ces deux énergies sont égales et la relation (1.12) devient :

$$\Delta E = 0 \quad (1.13)$$

Ainsi, l'accroissement d'énergie cinétique du liquide situé dans la tranche ABCD, pendant son déplacement, est nul.

Les forces, tant extérieures qu'intérieures, agissant sur la tranche de liquide ABCD pendant l'intervalle de temps dt sont :

- i.* la pesanteur
- ii.* les forces de pression s'exerçant sur les faces amont et aval AB et CD respectivement
- iii.* la force s'exerçant sur la surface latérale qui se compose d'une part de la force normale à la paroi de la conduite et qui n'intervient nullement dans le déplacement de la tranche liquide considérée, et de la force tangentielle d'autre part qui n'est autre que la force de frottement
- iv.* les forces de frottement et tourbillons au sein de la masse liquide.

Il est à préciser que l'ensemble des frottements et tourbillons constitue ce que l'on appelle "la résistance de la conduite". Or l'expérience a permis d'établir que cette résistance est, pour un liquide déterminé :

- i.* proportionnelle à l'aire de la surface mouillée de la conduite
- ii.* fonction de la vitesse moyenne de l'écoulement
- iii.* fonction de la rugosité absolue de la conduite
- iv.* indépendante de la pression du liquide

Si λ est la force de résistance de la conduite rapportée à l'unité d'aire de surface mouillée et P est le périmètre mouillé, l'aire de la surface mouillée pour la tranche de liquide ABCD (figure 1.1) est donc PL . La résistance correspondante est par suite λPL . Le travail de cette résistance, pour le déplacement ($V \cdot dt$), s'écrit :

$$-\lambda PL \times V dt \quad (1.14)$$

Le centre de gravité de la partie commune A'B'CD étant invariable, le travail de la force de pesanteur est le même que si ABA'B' était directement venu en CDC'D'.

Ce travail s'écrit alors :

$$mg(Z_o - Z_1) \quad (1.15)$$

Si P_o est la pression unitaire agissant sur la section AB (figure 1.1) et calculée au centre de gravité G_o , cette section subit de la part du liquide, situé à sa gauche, une force de pression normale ($P_o A_o$) où A_o désigne l'aire de la section AB. Pendant l'intervalle de temps dt , cette force de pression engendre un travail lors du déplacement ($V_o dt$) du liquide entre les sections AB et A'B'. Ce travail s'écrit :

$$P_o A_o \times V_o dt \quad (1.16)$$

Or, nous pouvons écrire que :

$$A_o \times V_o dt = \text{Volume de } ABA'B' = \frac{mg}{\varpi}$$

où ϖ est le poids spécifique du liquide ou poids volumique.

Ainsi, le travail de la force de pression $P_o A_o$ est :

$$P_o \frac{mg}{\varpi} \quad (1.17)$$

Si P_1 est la pression unitaire agissant sur la section CD (figure 1.1) et calculée au centre de gravité G_1 , cette section subit, de la part du liquide situé à sa droite, une force de pression normale ($-P_1 A_1$) où A_1 désigne l'aire de la section CD, tandis que le signe négatif indique que la force est dirigée dans le sens inverse du déplacement. Pendant l'intervalle de temps dt , cette force de pression engendre un travail lors du déplacement ($V_1 dt$) du liquide entre les sections CD et C'D'. Ce travail s'écrit :

$$-P_1 A_1 \times V_1 dt \quad (1.18)$$

Or, nous pouvons écrire que :

$$A_1 \times V_1 dt = \text{Volume de } CDC'D' = \frac{mg}{\varpi}$$

Ainsi, le travail de la force de pression ($-P_1 A_1$) est :

$$-P_1 \frac{mg}{\varpi} \quad (1.19)$$

La somme des travaux de toutes les forces ainsi définies étant égale à l'accroissement de l'énergie cinétique ΔE de la tranche liquide ABCD, nous pouvons écrire en tenant compte des relations (1.13), (1.14), (1.15), (1.17) et (1.19) que :

$$0 = mg(Z_o - Z_1) + mg \frac{P_o}{\varpi} - mg \frac{P_1}{\varpi} - \lambda PLV dt \quad (1.20)$$

En divisant chacun des membres de l'équation (1.20) par (mg) et après réarrangement, la relation (1.20) s'écrit :

$$Z_o + \frac{P_o}{\varpi} - \left(Z_1 + \frac{P_1}{\varpi} \right) = \frac{\lambda PLVdt}{mg} \quad (1.21)$$

Etant donné que la quantité (mg) représente le poids du volume du liquide qui traverse une section droite quelconque de la conduite pendant le temps (dt), nous pouvons écrire que :

$$mg = \text{Poids spécifique} \times \text{Débit} \times dt = \varpi \times VA \times dt \quad (1.22)$$

En remplaçant la relation (1.22) dans (1.21), il vient que :

$$Z_o + \frac{P_o}{\varpi} - \left(Z_1 + \frac{P_1}{\varpi} \right) = \frac{\lambda PLVdt}{\varpi VA dt}$$

soit :

$$Z_o + \frac{P_o}{\varpi} - \left(Z_1 + \frac{P_1}{\varpi} \right) = \frac{\lambda P}{\varpi A} L \quad (1.23)$$

Or, en se référant à la figure 1.1, il apparaît que la quantité

$$Z_o + \frac{P_o}{\varpi} - \left(Z_1 + \frac{P_1}{\varpi} \right)$$

correspond à la dénivellation entre les deux niveaux piézométriques g_o et g_1 . Cette dénivellation est en outre égale à la perte de charge ΔH se produisant en les deux sections AB et CD, puisque la ligne piézométrique g_o-g_1 est parallèle à la ligne de charge. Ainsi, nous pouvons écrire :

$$Z_o + \frac{P_o}{\varpi} - \left(Z_1 + \frac{P_1}{\varpi} \right) = \Delta H \quad (1.24)$$

Tenant compte de (1.24), la relation (1.23) devient :

$$\Delta H = \frac{\lambda P}{\varpi A} L \quad (1.25)$$

Le périmètre mouillé P de la section circulaire de diamètre D est :

$$P = \pi D \quad (1.26)$$

En substituant les relations (1.2) et (1.26) dans la relation (1.25), il s'ensuit que :

$$\Delta H = \frac{\lambda}{\varpi} \frac{4}{D} L \quad (1.27)$$

d'où :

$$\frac{\Delta H}{L} = \frac{\lambda}{\varpi} \frac{4}{D} \quad (1.28)$$

La quantité ($\Delta H / L$) est désignée par J et représente le gradient de la perte de charge linéaire ou la perte de charge linéaire par unité de longueur de la conduite. Dans les calculs pratiques sur les conduites sous pression, l'unité de longueur est le mètre de sorte que J est exprimé en mètre par mètre. Il représente ainsi l'abaissement de la ligne de charge, ou du plan de charge, sur 1 mètre de longueur de conduite.

En tenant compte de la définition de $(\Delta H / L)$, la relation (1.28) s'écrit :

$$\frac{1}{4} DJ = \frac{\lambda}{\varpi} \quad (1.29)$$

La force de résistance λ rapportée à l'unité de surface mouillée, et donc le rapport (λ / ϖ) , dépend de la vitesse moyenne V . La relation (1.29) peut alors s'écrire :

$$\frac{1}{4} DJ = \phi(V) \quad (1.30)$$

La relation (1.30) correspond à l'équation fondamentale régissant l'écoulement dans les conduites sous pression.

La fonction $\phi(V)$ dépend de la rugosité de la paroi mais elle est indépendante de la pression du liquide. Divers auteurs ont tenté d'exprimer la forme de la fonction $\phi(V)$ en se basant sur des essais expérimentaux. Les formules obtenues ont été peu à peu abandonnées pour laisser places, entre autres, aux formules de *Darcy-Weisbach* (1854; 1845) et de *Colebrook-White* (1939). Ce sont ces relations qui seront longuement discutées dans le prochain paragraphe.

I.3. Formules usuelles de l'écoulement turbulent en conduite circulaire sous pression

I.3.1. Formule de Darcy-Weisbach

C'est d'abord *Weisbach* qui fut le premier en 1845 à établir la relation du gradient de la perte de charge dans les conduites circulaires. Indépendamment des travaux de *Weisbach*, *Darcy* effectua en 1854 des travaux sur les écoulements en conduites. Il en est ainsi résulté la formule suivante, portant le nom de *Darcy-Weisbach* :

$$J = \frac{f}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (1.31)$$

dans laquelle f est le coefficient de frottement ou coefficient de résistance, Q est le débit volume écoulé par la conduite de diamètre intérieur D et g est l'accélération de la pesanteur.

En tenant compte de la relation (1.1), la relation (1.31) s'écrit :

$$J = \frac{f}{D} \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (1.32)$$

La forme la plus usuelle de la relation (1.32) est celle que l'on obtient après y avoir inséré la relation (1.2), soit :

$$J = \frac{8f}{g\pi^2} \frac{Q^2}{D^5} \quad (1.33)$$

Nous pouvons ainsi constater que la perte de charge par unité de longueur de conduite est

proportionnelle au carré du débit que celle-ci écoule. La relation (1.33) peut s'écrire plus simplement :

$$J = \gamma Q^2 \quad (1.34)$$

où $\gamma = \frac{8f}{g\pi^2 D^5}$.

Dans tous les problèmes pratiques se rapportant à la conduite circulaire sous pression, c'est la relation (1.34) qui est largement appliquée. Cependant, elle peut nécessiter l'emploi d'un procédé graphique ou itératif en raison de la forme implicite du coefficient de résistance f . C'est aspect du problème sera présenté et commenté dans les prochains paragraphes.

1.3.2. Formule de Colebrook-White et diagramme universel de Moody

Etablie en 1939, la formule de *Colebrook-White* est celle qui est largement adoptée pour le calcul du coefficient de frottement f . Celui-ci s'exprime par :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) \right]^{-2} \quad (1.35)$$

où "log" désigne le logarithme décimal. Dans la relation (1.35), les paramètres ε , D et R correspondent respectivement à la rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite, au diamètre intérieur de celle-ci et au nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement. Celui-ci est par définition le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité, et s'écrit :

$$R = \frac{4Q}{\pi D v} \quad (1.36)$$

La relation (1.35) s'applique à l'écoulement turbulent pour peu que le nombre de *Reynolds* R soit tel que $R > 2300$ (*Sinniger et Hager, 1989*).

L'écoulement turbulent est non seulement caractérisé par la valeur du nombre de *Reynolds* R mais aussi par celle de la rugosité relative ε/D .

Selon les valeurs de ε/D et de R , l'écoulement turbulent peut être en régime pratiquement lisse correspondant à $\varepsilon/D \rightarrow 0$, ou en régime rugueux appelé aussi régime de pleine turbulence ou turbulent rugueux. Celui-ci correspond en règle générale aux valeurs élevées du nombre de *Reynolds* R . Ces deux régimes sont en réalité les deux états extrêmes de l'écoulement qui peut cependant se situer en zone intermédiaire dite zone de transition.

Dans le cas d'un régime d'écoulement pratiquement lisse ($\varepsilon/D \rightarrow 0$), la relation (1.35) montre que le coefficient de frottement f ne dépend que de la valeur du nombre de *Reynolds* R :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) \right]^{-2} \quad (1.37)$$

Dans le cas d'un régime d'écoulement turbulent rugueux, correspondant aux valeurs élevées du nombre de *Reynolds* R ($R \rightarrow \infty$), le terme $2,51/(R\sqrt{f})$ figurant dans la relation (1.35) tend alors vers zéro et le coefficient de frottement f est alors donné par :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \right]^{-2} \quad (1.38)$$

La rugosité relative ε/D est donc le seul paramètre dont dépend le coefficient de frottement f lorsque l'écoulement est en régime turbulent rugueux. La relation (1.38) est également connue sous le nom de formule de *Nikuradse* en hommage à son auteur.

Lorsque l'écoulement se situe en zone de transition, le coefficient de frottement f répond alors à la relation (1.35) et sa valeur dépend à la fois de celle de la rugosité relative ε/D et de celle du nombre de *Reynolds* R .

En admettant que les valeurs de ε/D et de R soient données, la relation (1.35) montre que la valeur du coefficient de frottement ne peut être explicitement déterminée. La relation (1.35) est en effet implicite vis-à-vis de f puisque celui est contenu à la fois dans les membres gauche et droit de la relation. La détermination du coefficient de frottement f nécessite donc un procédé itératif ou graphique dans le cas où la relation (1.35) est utilisée.

A ce sujet, un diagramme a été élaboré dans le but de déterminer par voie graphique la valeur du coefficient de frottement f , lorsque la rugosité relative ε/D de la conduite ainsi que le nombre de *Reynolds* R caractérisant l'écoulement sont donnés. Ce diagramme porte le nom de diagramme universel de *Moody* qui ne peut être dissocié de la relation (1.35) de *Colebrook-White*. En se basant sur les observations de *Nikuradse* et de *Colebrook-White* ainsi que sur un grand nombre d'expériences réalisées sur des conduites industrielles, *Moody* (1944) a élaboré un diagramme logarithmique dans lequel est représenté le coefficient de frottement f en fonction du nombre de *Reynolds* R pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D telle que $0 \leq \varepsilon/D \leq 5 \cdot 10^{-2}$. Ce diagramme est représenté sur la figure 1.2.

Sur ce diagramme, l'on a fait figurer aussi les observations de *Blasius* (1913) représentées par la courbe d'équation :

$$f = \frac{0,223}{R^{0,25}} \quad (1.39)$$

Cette relation est applicable à l'écoulement turbulent pratiquement lisse ($\varepsilon \rightarrow 0$) en conduite sous pression et dont la représentation graphique se traduit par une droite dans le système

d'axes de coordonnées logarithmiques de la figure 1.2. Tous les auteurs s'accordent à dire que la relation (1.39) ne serait valide que si le nombre de *Reynolds* R est compris entre 750 et $2,5 \cdot 10^4$. Cette restriction sur la valeur du nombre de *Reynolds* R pourrait constituer une sérieuse contrainte dans l'emploi de la formule (1.39) étant donné que, dans la plupart des cas pratiques, les valeurs de R sont nettement supérieures à $2,5 \cdot 10^4$.

Sur le diagramme de la figure 1.2 ont été également représentées les observations de *Prandtl-Nikuradse*, correspondant à des valeurs plus élevées du nombre de *Reynolds* R que celles issues des observations de *Blasius* (1913). En réalité, les observations de *Prandtl-Nikuradse* sont d'abord issues de celles de *Von Karman* (1935) qui a développé une relation généralisée du coefficient de frottement f , laquelle a été ensuite modifiée par *Prandtl* pour mieux être corrélée aux données obtenues par *Nikuradse*. C'est la raison pour laquelle ces observations portent le nom de *Prandtl-Nikuradse*. Le coefficient de frottement f se traduit par l'équation :

$$f = \left[2 \log \left(R \sqrt{f} \right) + 0,4 \right]^{-2} \quad (1.40)$$

Comme pour le cas de la formule de *Colebrook-White*, la relation (1.40) est implicite vis-à-vis du coefficient de frottement f .

Mais, la relation (1.35) de *Colebrook-White* pourrait à elle seule représenter et couvrir l'ensemble du diagramme de *Moody*, à l'exception du régime laminaire qui se traduit par la droite située à l'extrémité gauche du diagramme (figure 1.2). La relation (1.35) est en effet exclusivement destinée à l'écoulement turbulent.

Pour l'écoulement turbulent lisse, la courbe enveloppe inférieure du diagramme de la figure 1.2 correspondrait à la représentation graphique de la relation (1.37), tandis que les courbes en trait plein situées à droite du diagramme de la figure 1.2 occuperaient la zone de pleine turbulence. Cette zone s'étend au-delà de la courbe en trait discontinu. Les courbes appartenant à la zone de pleine turbulence apparaissent comme étant des lignes quasi horizontales, traduisant le fait que le coefficient de frottement f pourrait être considéré comme étant une constante exclusivement dépendante de la valeur de la rugosité relative ε/D . En réalité, ces lignes décroissent très lentement au fur et à mesure de l'accroissement du nombre de *Reynolds* R et quelle que soit la valeur de la rugosité relative ε/D . La valeur constante de f n'est théoriquement obtenue que pour $R \rightarrow \infty$ conformément à la relation (1.38).

La courbe en trait discontinu correspondant à l'enveloppe inférieure de la zone de pleine turbulence (figure 1.2) a été tracée en admettant un écart de 1,5% entre les valeurs du coefficient de frottement f calculées selon la relation (1.35) et celles issues de l'application de

la relation (1.38). Si tout couple de valeurs $(\varepsilon/D, R)$ indiquait un point situé au-dessus de la courbe en trait discontinu du diagramme de la figure 1.2, il serait alors admis que l'écoulement est en régime d'écoulement turbulent rugueux ou hydrauliquement rugueux.

L'équation de la courbe en trait discontinu du diagramme de la figure 1.2, délimitant par le bas la zone de pleine turbulence, peut donc être obtenue en écrivant que :

$$f_{\text{Colebrook-White}} = 1,015 \times f_{\text{Nikuradse}}$$

Rappelons que $f_{\text{Colebrook-White}}$ est donné par la relation (1.35), tandis que $f_{\text{Nikuradse}}$ est obtenu par la relation (1.38). Ainsi, nous pouvons écrire:

$$\left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) \right]^{-2} = 1,015 \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \right]^{-2} \quad (1.41)$$

Dans la relation (1.41), la quantité $(1/\sqrt{f})$ est exprimée par :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = (1,015)^{-1/2} \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \right] \quad (1.42)$$

En tenant compte des relations (1.41) et (1.42), nous pouvons écrire :

$$\log \left\{ \frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{R} \left[- (1,015)^{-1/2} \times 2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \right] \right\} = (1,015)^{-1/2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \quad (1.43)$$

Après simplifications et réarrangements, la relation (1.43) devient :

$$\frac{\varepsilon/D}{3,7} - \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right)^{0,992583} = \frac{4,982768}{R} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \quad (1.44)$$

ou bien :

$$R = 4,982768 \frac{\log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right)}{\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) - \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right)^{0,992583}} \quad (1.45)$$

Nous obtenons ainsi la relation $R(\varepsilon/D)$ qui traduit la courbe en trait discontinu de la figure 1.2. Selon Hager (1987), la relation (1.45) peut simplement s'écrire, avec une excellente approximation :

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{1050}{R} \quad (1.46)$$

Ainsi, en vertu de la relation (1.46), si le couple de valeurs $(\varepsilon/D, R)$ serait tel que :

$$\frac{\varepsilon}{D} R \geq 1050 \quad (1.47)$$

alors l'écoulement peut être considéré comme appartenant à la zone de pleine turbulence. Le régime de l'écoulement serait donc turbulent rugueux ou hydrauliquement rugueux.

Pour $R \geq 10^7$ et $\varepsilon/D < 10^{-6}$, le coefficient de frottement f est indépendant de la rugosité relative

ε/D et correspond au minimum possible. L'écoulement est en régime turbulent lisse. Les pertes de charge ne sont dues qu'à l'effet de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement.

Si la rugosité relative croît, tout en restant supérieure à 10^{-6} , l'écoulement se situe dans la zone de transition et les effets du nombre de *Reynolds* R et de la rugosité relative ε/D ont une influence sur la valeur du coefficient de frottement f .

En augmentant davantage la rugosité relative ε/D jusqu'à atteindre par exemple la valeur 10^{-2} , soit par l'augmentation de la rugosité absolue ε ou par la diminution du diamètre D , l'écoulement serait alors en régime turbulent rugueux.

Nous pouvons constater que pour $\varepsilon/D = 10^{-2}$ et $R \geq 3.10^5$, le coefficient de frottement f prend une valeur pratiquement constante et vaut $f \cong 0,038$.

1.3.3. Formule de Swamee et Jain

Etablie en 1976, la formule de *Swamee* et *Jain* est destinée au calcul du coefficient de frottement f de l'écoulement turbulent dans les conduites circulaires sous pression. Cette formule se veut être une solution approchée à la relation implicite (1.35) de *Colebrook-White*. Aucune méthode analytique n'a été proposée par les auteurs pour établir leur relation. Celle-ci a été déterminée après plusieurs tentatives basées sur un calcul laborieux. Selon *Swamee* et *Jain* (1976), la relation (1.35) de *Colebrook-White* peut être remplacée, avec une bonne approximation, par la relation approchée suivante :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{5,74}{R^{0,9}} \right) \right]^{-2} \quad (1.48)$$

Comme l'indique la relation (1.48), le coefficient de frottement peut être directement calculé à partir des valeurs connues du nombre de *Reynolds* R et de la rugosité relative ε/D .

Cependant, *Swamee* et *Jain* indiquent que la relation (1.48) doit être appliquée dans les gammes de valeurs $5.10^3 < R < 10^8$ du nombre de *Reynolds* R et $10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2}$ de la rugosité relative. La relation (1.48) est donc restrictive vis-à-vis notamment de la gamme de valeurs admise de la rugosité relative. Celle du nombre de *Reynolds* R paraît être suffisante tant elle couvre une large gamme pratique, bien que les valeurs de R inférieures à 5000 soient bien souvent rencontrées.

La relation (1.48) ne couvre donc pas l'ensemble du diagramme de *Moody*, mais elle est de nos jours la formule la plus largement adoptée en raison de sa simplicité. La formule historique (1.35) de *Colebrook-White* est ainsi peu à peu abandonnée au profit de la formule de *Swamee* et *Jain*, car elle nécessite le recours à un procédé itératif ou graphique tel que nous l'avons montré au paragraphe précédent.

Afin de mieux préciser la fiabilité de la relation (1.48) de *Swamee* et *Jain*, nous l'avons comparée à celle de *Colebrook-White*, prise comme référence, en admettant que celle-ci donne la valeur exacte du coefficient de frottement f . La comparaison a été effectuée selon la démarche suivante :

- i. Une valeur de la rugosité relative ε/D est arbitrairement choisie dans la gamme $10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2}$.
- ii. Le nombre de *Reynolds* R est varié dans la gamme $5.10^3 < R < 10^8$.
- iii. Pour chaque valeur fixée de la rugosité relative ε/D , le coefficient de frottement $f_{C.W}$ de *Colebrook-White* est calculé par un procédé itératif selon la relation (1.35), pour toute la série de valeurs choisies du nombre de *Reynolds* R .

- iv. Le coefficient de frottement $f_{S,J}$ de *Swamee et Jain* est ensuite évalué par application de la relation (1.48).
- v. L'écart $(\Delta f / f)$ en (%) entre les coefficients de frottement $f_{S,J}$ et $f_{C,W}$, respectivement de *Swamee et Jain* et de *Colebrook-White*, est alors aisément calculé selon la relation $[\Delta f / f = 100 \times (f_{S,J} - f_{C,W}) / f_{S,J}]$.
- vi. Pour chaque valeur de la rugosité relative ε / D choisie, l'écart $(\Delta f / f)$ en (%) est enfin représenté graphiquement dans un système d'axes de coordonnées à divisions semi logarithmiques, en fonction du nombre de *Reynolds* R .

Un grand nombre de valeurs de la rugosité relative ε / D , appartenant à la gamme $10^{-6} < \varepsilon / D < 10^{-2}$, a été ainsi testé dans l'étude comparative des coefficients de frottement de *Swamee et Jain* et de *Colebrook-White*. Autant de courbes représentant la variation de l'écart $(\Delta f / f)$ en fonction du nombre de *Reynolds* R ont été tracées. Nous représentons sur la figure 1.3 trois d'entre elles qui nous paraissent significatives.

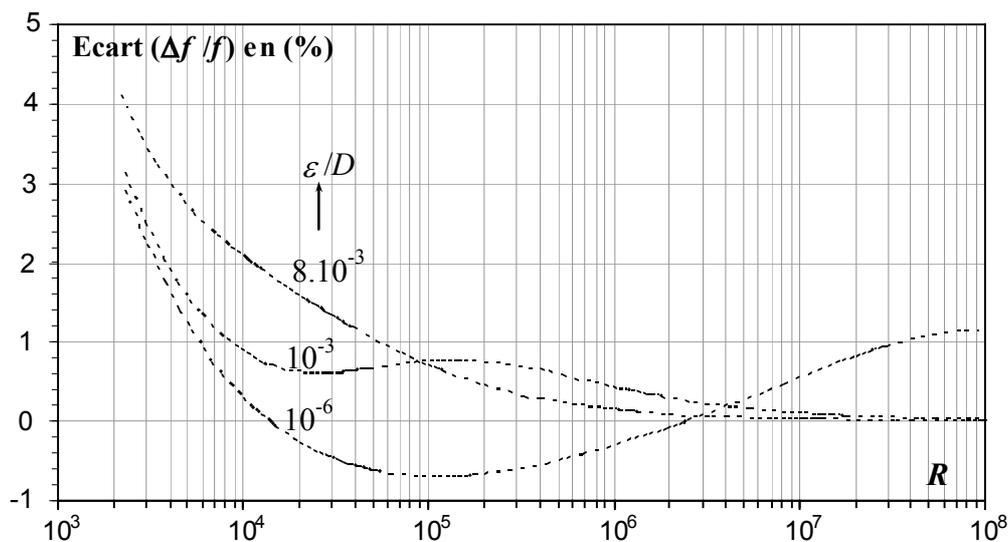


Figure 1.3 : Comparaison entre les relations de *Colebrook-White* (1.35) et de *Swamee et Jain* (1.48) pour quelques valeurs de la rugosité relative ε / D

Bien que la rugosité relative $\varepsilon / D = 10^{-6}$ n'appartienne pas à la gamme de validité de la relation (1.48) de *Swamee et Jain*, nous l'avons cependant considérée car elle est représentative de l'écoulement hydrauliquement lisse.

Au regard du diagramme de la figure 1.3, il apparaît clairement que pour les valeurs du nombre de *Reynolds* R tel que $5.10^3 \leq R \leq 10^4$, l'écart relatif $(\Delta f / f)$ varie entre 0,3% à 2,8%. Les forts écarts sont observés pour les plus faibles valeurs du nombre de *Reynolds* R . Au-delà de la valeur $R = 10^4$, les écarts relatifs $(\Delta f / f)$ sont tout à fait acceptables car ils restent dans

tous les cas inférieurs ou à la limite égaux à 1%.

En d'autres termes, la relation (1.48) de *Swamee* et *Jain* doit être appliquée avec beaucoup de précaution dans la gamme $5 \cdot 10^3 \leq R \leq 10^4$, puisque des écarts relatifs ($\Delta f / f$) de 2,8% peuvent être obtenus et seraient inacceptables dans certaines applications pratiques. Cet aspect peut être illustré par la formule (1.33) de *Darcy-Weisbach* qui permet d'écrire que :

$$\frac{\Delta J}{J} = \frac{\Delta f}{f}$$

en admettant cependant qu'aucun écart relatif n'est observé ni dans l'évaluation du débit volume Q ni dans celle du diamètre intérieur D de la conduite. Ainsi, un écart de 2,8% sur le coefficient de frottement f engendrerait le même écart dans l'évaluation du gradient J de la perte de charge.

En insérant la relation (1.48) de *Swamee* et *Jain* dans la relation (1.33), le gradient J de la perte de charge s'écrit alors :

$$J = \frac{2Q^2}{g\pi^2 D^5} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{5.74}{R^{0.9}} \right) \right]^{-2} \quad (1.49)$$

1.3.4. Formule de *Achour et al.*

Dans le but de faciliter le calcul du coefficient de frottement f dans tout le domaine de l'écoulement turbulent en conduite sous pression, *Achour et al.* (2002) proposent de remplacer la formule (1.35) de *Colebrook-White* par la relation approchée suivante :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{4,5}{R} \log \frac{R}{6,97} \right) \right]^{-2} \quad (1.50)$$

Pour la large gamme de valeurs $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$ de la rugosité relative, les auteurs préconisent l'usage de la formule (1.50) pour les valeurs du nombre de *Reynolds* R tel que $R \geq 10^4$. L'écart maximal observé entre les valeurs de f calculées selon les relations (1.35) et (1.50) ne dépasserait guère 2%.

Les forts écarts sont obtenus pour les fortes rugosités relatives et correspondent à l'état de l'écoulement en régime turbulent rugueux ou hydrauliquement rugueux.

Pour mieux préciser ces écarts, nous avons procédé à une comparaison graphique entre la relation (1.35) de *Colebrook-White*, prise comme référence, et celle (1.50) de *Achour et al.* L'étude comparative a suivi la même démarche que celle indiquée dans le paragraphe précédent et nous avons représenté sur la figure 1.4 les résultats obtenus à l'issue de cette comparaison.

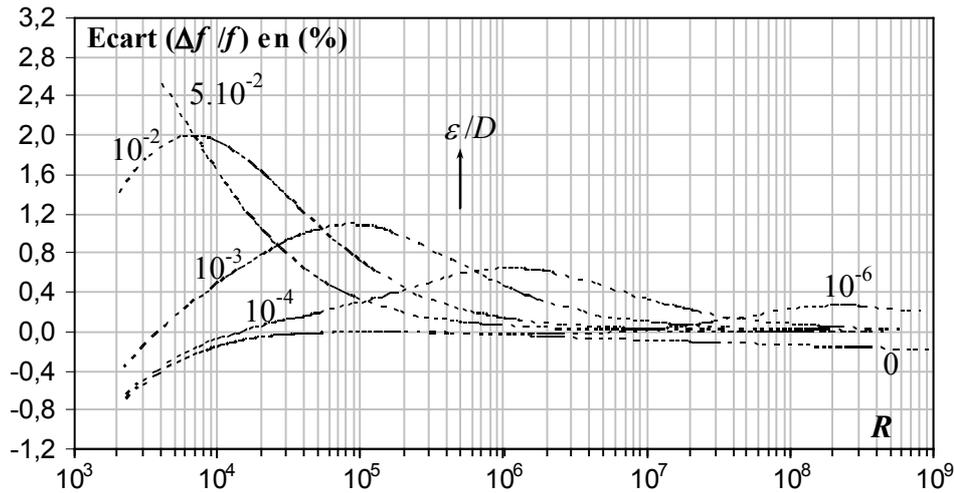


Figure 1.4 : Comparaison entre les relations de *Colebrook-White* (1.35) et de *Achour et al.* (1.50) pour quelques valeurs de la rugosité relative ϵ/D

Nous pouvons ainsi observer, au regard du diagramme de la figure 1.4, que l'écart relatif $(\Delta f/f)$ du coefficient de frottement calculé selon les formules de *Colebrook-White* et de *Achour et al.* dépend à la fois de la valeur du nombre de *Reynolds* R et de celle de la rugosité relative ϵ/D . Dans la gamme de rugosités $0 \leq \epsilon/D \leq 0,05$, la valeur maximale observée de $(\Delta f/f)$ est de 2% et s'obtient pour $R = 7000$.

Au fur et à mesure de l'augmentation du nombre de *Reynolds* R , l'écart $(\Delta f/f)$ diminue sensiblement pour atteindre des valeurs inférieures à 1,2% pour $R \geq 10^5$ et $0 \leq \epsilon/D \leq 0,05$.

En restreignant la gamme de valeurs de la rugosité relative telle que $0 \leq \epsilon/D \leq 10^{-3}$, nous pouvons observer que les écarts $(\Delta f/f)$ sont également inférieurs à 1,2% pour toute valeur de $R \geq 2300$.

Il est particulièrement intéressant de noter que pour l'écoulement turbulent lisse ou pratiquement lisse correspondant à $\epsilon/D \rightarrow 0$, l'écart $(\Delta f/f)$ reste insignifiant pour toutes les valeurs du nombre de *Reynolds* R supérieures à 2300. Pour cet état de l'écoulement, la relation (1.50) permet d'écrire que le coefficient de frottement f est donné par :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{4,5}{R} \log \frac{R}{6,97} \right) \right]^{-2} \quad (1.51)$$

I.4. Méthodes de calcul de l'écoulement turbulent en conduite circulaire sous pression

I.4.1. Position du problème

Le présent paragraphe s'intéresse aux méthodes de calcul de l'écoulement turbulent en conduite sous pression ou en charge. Les méthodes les plus utilisées actuellement seront exposées et commentées en montrant leurs avantages et leurs inconvénients. Ces méthodes ont été développées au cours de ces trente dernières années et ont remplacé les solutions graphiques classiques. Celles-ci ne seront pas présentées au cours de ce chapitre car elles ne présentent à l'heure actuelle aucun intérêt pratique.

Le calcul de l'écoulement turbulent en conduite sous pression touche plus particulièrement trois classes ou catégories de problèmes, comme nous l'avons déjà mentionné.

L'écoulement turbulent en conduite sous pression est gouverné par les relations (1.33), (1.35) et (1.36) qui sont respectivement, pour rappel, les relations de *Darcy-Weisbach*, de *Colebrook-White* et du nombre de *Reynolds*.

Au regard de ces relations, nous pouvons énoncer que cinq paramètres influencent l'écoulement turbulent en conduite sous pression. Il s'agit en effet :

1. du gradient J de la perte de charge.
2. du débit volume Q écoulé par la conduite.
3. de la dimension linéaire de la conduite représentée par son diamètre D .
4. de la rugosité absolue ε caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite.
5. de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement.

Dans la plupart des cas pratiques, il est extrêmement rare de rencontrer un problème lié au calcul de la rugosité ε ou à la détermination de la valeur de la viscosité ν du liquide en écoulement. Seuls les paramètres Q , D et J présentent un réel intérêt et chacun de ces paramètres représente une classe de problème. Il existe donc trois classes de problèmes qui se résument ainsi :

- i.* Connaissant D , J , ε et ν , quel serait le débit Q écoulé par la conduite ? Il s'agit donc de déterminer la capacité d'évacuation de la conduite après avoir défini la relation fonctionnelle F telle que :

$$Q = F(D, J, \varepsilon, \nu)$$

- ii. Connaissant Q , J , ε et ν , quel serait le diamètre D de la conduite ? Cette catégorie de problème répond à un besoin de dimensionnement, après avoir déterminé la relation fonctionnelle F telle que :

$$D = F(Q, J, \varepsilon, \nu)$$

- iii. Connaissant Q , D , ε et ν , quel serait la valeur du gradient J de la perte de charge ? Ce paramètre nous renseigne sur les pertes de charges linéaires ainsi que sur l'état de la ligne piézométrique. La relation fonctionnelle F à définir est telle que :

$$J = F(Q, D, \varepsilon, \nu)$$

I.4.2. Approche de Swamee et Jain

En introduisant de nouveaux paramètres adimensionnels, *Swamee et Jain* (1976; 1977; 1978) regroupent les relations de base (1.33), (1.35) et (1.36), régissant l'écoulement en conduite sous pression, en une seule relation.

La première étape consiste à écrire, à partir de la relation (1.33) de *Darcy-Weisbach*, que :

$$f = \frac{\pi^2}{8} \frac{D^5}{Q^2 / (gJ)} \quad (1.52)$$

La quantité $[Q^2 / (gJ)]^{1/5}$ ayant la dimension d'une longueur, *Swamee et Jain* l'identifient par le symbole D_o et lui donnent la signification d'un diamètre caractéristique :

$$D_o = \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \quad (1.53)$$

Aucune signification physique n'est donnée au diamètre caractéristique D_o .

Pourtant, si D_o désignait physiquement un diamètre particulier d'une conduite sous pression, alors la relation (1.52) s'écrirait :

$$f = \frac{\pi^2}{8} \frac{D_o^5}{Q^2 / (gJ)}$$

soit, en tenant compte de la relation (1.53) :

$$f = \pi^2 / 8 \cong 1,2337$$

Ce résultat est bien évidemment physiquement impossible, puisque le coefficient de frottement devrait être nettement inférieur à l'unité.

Les relations (1.52) et (1.53) permettent d'écrire que :

$$f = \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{D}{D_o} \right)^5 \quad (1.54)$$

En introduisant le paramètre adimensionnel :

$$D^* = D / D_o \quad (1.55)$$

la relation (1.54) s'écrit alors plus simplement :

$$f = \frac{\pi^2}{8} D^{*5}$$

soit :

$$\sqrt{f} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} D^{*5/2} \quad (1.56)$$

La seconde étape consiste à transformer la relation (1.36) définissant le nombre de Reynolds R . En multipliant et en divisant par D_o le dénominateur du membre droit de la relation (1.36), il vient que :

$$R = \frac{4Q}{\pi D v \frac{D_o}{D_o}}$$

Cette dernière relation peut également s'écrire :

$$R = \frac{4}{\pi} \frac{1}{(D/D_o)(vD_o/Q)} \quad (1.57)$$

La quantité adimensionnelle (vD_o/Q) est désignée par le symbole v^* , appelé "paramètre cinétique". Aucune signification physique n'est donnée par *Swamee* et *Jain* au paramètre cinétique v^* . Soit :

$$v^* = \frac{vD_o}{Q} \quad (1.58)$$

En tenant compte des relations (1.55) et (1.58), la relation (1.57) s'écrit :

$$R = \frac{4}{\pi D^* v^*} \quad (1.59)$$

La troisième étape consiste à écrire que la rugosité relative ε/D est telle que :

$$\varepsilon/D = (\varepsilon/D_o)/(D/D_o)$$

Dans cette dernière relation, la quantité ε/D_o représente la rugosité absolue ε rapportée au diamètre caractéristique D_o . Nous la désignerons par le symbole ε^* , soit :

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{D_o} \quad (1.60)$$

En tenant compte des relations (1.55) et (1.60), la rugosité relative ε/D peut alors s'écrire :

$$\varepsilon/D = \frac{\varepsilon^*}{D^*} \quad (1.61)$$

La quatrième étape consiste enfin à substituer dans la formule (1.35) de *Colebrook-White*, les relations (1.56), (1.59) et (1.61). Il vient que :

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi D^{*5/2}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon^* / D^*}{3,7} + \frac{2 \times \sqrt{2} \times 2,51 \times v^*}{4 D^{*3/2}} \right)$$

Cette dernière relation s'écrit après simplifications et réarrangements :

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi D^{*5/2}} = -\log \left(\frac{\varepsilon^*}{3,7 D^*} + \frac{2,51 v^*}{\sqrt{2} D^{*3/2}} \right) \quad (1.62)$$

Nous pouvons déduire de la relation (1.62) que :

$$10^{-\frac{\sqrt{2}}{\pi D^{*5/2}}} = \frac{\varepsilon^*}{3,7 D^*} + \frac{2,51 v^*}{\sqrt{2} D^{*3/2}}$$

soit :

$$v^* = \frac{\sqrt{2} D^{*3/2}}{2,51} \left[10^{-\frac{\sqrt{2}}{\pi D^{*5/2}}} - \frac{\varepsilon^*}{3,7 D^*} \right] \quad (1.63)$$

Trois variables adimensionnelles composent donc la relation (1.63) et qui sont v^* , D^* et ε^* .

Cette relation a l'avantage de regrouper toutes les variables influençant l'écoulement turbulent en conduite sous pression, sous forme de paramètres adimensionnels de validité générale.

Le coefficient de frottement f a été éliminé et ne figure pas dans la relation (1.62) tel un paramètre influençant l'écoulement. En définitive, la relation (1.63) remplace la relation (1.33) de *Darcy-Weisbach*.

Il apparaît ainsi que la détermination du diamètre D de la conduite, variable intervenant dans le paramètre adimensionnel D^* , ne peut s'effectuer de manière explicite. Il serait alors nécessaire d'avoir recours à un procédé itératif ou graphique.

Nous avons représenté sur la figure 1.5, dans un système d'axes de coordonnées à divisions semi logarithmiques, la relation (1.63) et plus particulièrement la variation de $D^*(v^*)$ pour diverses valeurs de la rugosité relative $\varepsilon^* = \varepsilon / D_o$.

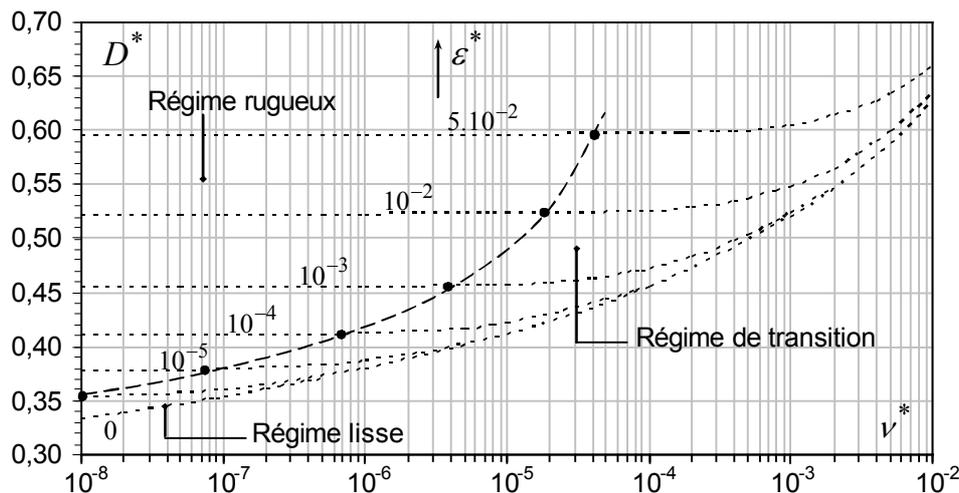


Figure 1.5 : Variation de $D^*(\nu^*)$ pour diverses valeurs de ε^* selon la relation (1.63).

(--●--) courbe limitant la zone correspondant à $D^* = \text{constante}$.

Le tracé du diagramme de la figure 1.5 révèle, comme pour le cas du diagramme de *Moody*, l'existence de trois zones distinctes.

La première zone se réduit à une courbe unique correspondant à $\varepsilon^* = 0$. Il s'agit de l'écoulement en régime lisse pour lequel la variation $D^*(\nu^*)$ répond à la relation :

$$\nu^* = \frac{\sqrt{2}D^{*3/2}}{2,51} 10^{-\frac{\sqrt{2}}{\pi D^{*5/2}}} \quad (1.64)$$

La relation (1.64) est également implicite vis-à-vis du paramètre adimensionnel D^* et par conséquent du diamètre D de la conduite.

La seconde zone se situe à droite du diagramme de la figure 1.5 et correspond à la zone de l'écoulement en régime de transition. Le paramètre adimensionnel D^* dépend à la fois des variables ν^* et ε^* , selon la relation (1.63). Pour une valeur fixée de la rugosité relative ε^* , le paramètre adimensionnel D^* augmente au fur et à mesure de l'accroissement du paramètre cinétique ν^* .

La troisième zone se situe à gauche du diagramme de la figure 1.5 et correspond à la zone de l'écoulement turbulent rugueux ou hydrauliquement rugueux. Le paramètre adimensionnel D^* est, dans cette zone, indépendant du paramètre cinétique ν^* , c'est-à-dire indépendant de la viscosité cinématique du liquide en écoulement. Pour une rugosité relative ε^* fixée, la valeur du paramètre D^* demeure constante jusqu'à une valeur limite supérieure du paramètre cinétique ν^* . Les courbes $D^*(\nu^*)$ se réduisent alors à des lignes quasi horizontales de telle sorte que $D^*(\varepsilon^*) = \text{constante}$.

Exemple d'application 1.1 :

Soit à déterminer le diamètre D d'une conduite circulaire sous pression de rugosité absolue $\varepsilon = 0,001 \text{ m}$, écoulant un débit volume $Q = 10 \text{ m}^3 / \text{s}$ sous un gradient de la perte de charge $J = 0,01$, d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 1,15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$.

La solution d'un tel problème peut être trouvée en respectant les étapes suivantes :

- i. Le diamètre caractéristique D_o se calcule par application de la relation (1.53), soit :

$$D_o = \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} = \left(\frac{10^2}{9,81 \times 0,01} \right)^{1/5} = 3,99637 \text{ m} \cong 4 \text{ m}$$

- ii. Le paramètre cinétique ν^* est évalué par la relation (1.58), soit :

$$\nu^* = \frac{\nu D_o}{Q} = \frac{1,15 \cdot 10^{-6} \times 4}{10} = 4,6 \cdot 10^{-7}$$

- iii. Selon la relation (1.60), la rugosité relative ε^* est :

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{D_o} = \frac{0,001}{4} = 2,5 \cdot 10^{-4}$$

- iv. Avec les valeurs ainsi calculées de ν^* et de ε^* , le paramètre adimensionnel D^* peut être graphiquement estimé, après interpolation, en utilisant le diagramme de la figure 1.5, ou bien évalué par application de la relation (1.63) par l'usage d'un procédé itératif.

Le calcul indique que $D^* = 0,426377$.

- v. Or, selon la relation (1.55), le paramètre D^* est par définition $D^* = D / D_o$, ce qui permet d'écrire que :

$$D = D^* \times D_o = 0,426377 \times 4 = 1,7055 \text{ m}$$

- vi. La présente étape procède à la vérification du régime de l'écoulement, en se référant au diagramme de la figure 1.5. Le couple de valeurs ($\varepsilon^* = 2,5 \cdot 10^{-4}$; $\nu^* = 4,6 \cdot 10^{-7}$) indique un point situé dans la zone correspondant au régime d'écoulement turbulent rugueux.

Mais, ce résultat peut être vérifié en ayant recours à l'inégalité (1.47) qui stipule que si

$\frac{\varepsilon}{D} R \geq 1050$, alors le régime de l'écoulement est turbulent rugueux. A partir des valeurs de Q , D et ν , le nombre de Reynolds R peut être évalué en vertu de la relation (1.36), soit :

$$R = \frac{4Q}{\pi D \nu} = \frac{4 \times 10}{\pi \times 1,7055 \times 1,15 \cdot 10^{-6}} = 6491731,58 \cong 6,5 \cdot 10^6$$

La rugosité relative ε / D est :

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,001}{1,7055} = 0,00058634$$

Ainsi :

$$\frac{\varepsilon}{D} R = 0,00058634 \times 6,5 \cdot 10^6 = 3806,351 > 1050$$

L'inégalité (1.47) est donc bien vérifiée, ce qui confirme le caractère turbulent rugueux du régime de l'écoulement.

I.4.3. Approche de Hager

I.4.3.1 Calcul du débit

En 1987, *Hager* transforme le système d'équations de base (1.31), (1.35) et (1.36) régissant l'écoulement turbulent en conduite sous pression, en une relation unique permettant le calcul explicite du débit volume Q à partir des valeurs connues du diamètre D de la conduite, du gradient J de la perte de charge, de la rugosité absolue ε et de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement.

Cette transformation a été rendue possible par la combinaison, dans un premier temps, des relations (1.33) et (1.35). La relation (1.33) de *Darcy-Weisbach* permet d'écrire que :

$$\sqrt{f} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{gJD^5}}{Q} \quad (1.65)$$

et la relation (1.35) de *Colebrook-White* s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) \quad (1.66)$$

En introduisant la relation (1.65) dans la relation (1.66), nous pouvons écrire que :

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{Q}{\sqrt{gJD^5}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{R \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{gJD^5}}{Q}} \right)$$

Après simplifications et réarrangements, la relation précédente s'écrit plus simplement :

$$\frac{Q}{\sqrt{gJD^5}} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51 \times 2 \times \sqrt{2}}{\pi R} \frac{Q}{\sqrt{gJD^5}} \right) \quad (1.67)$$

Dans un second temps, la relation (1.36) exprimant le nombre de *Reynolds* R est insérée dans la relation (1.67). Nous obtenons :

$$\frac{Q}{\sqrt{gJD^5}} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51 \times 2 \times \sqrt{2}}{\pi} \frac{4Q}{\pi D \nu} \frac{Q}{\sqrt{gJD^5}} \right)$$

soit, après simplifications et réarrangements :

$$\frac{Q}{\sqrt{gJD^5}} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{\sqrt{2}} \frac{\nu}{\sqrt{gJD^3}} \right) \quad (1.68)$$

La quantité sans dimension $Q/\sqrt{gJD^5}$ est désignée par q , soit :

$$q = \frac{Q}{\sqrt{gJD^5}} \quad (1.69)$$

tandis que la quantité sans dimension $\sqrt{gJD^3}/\nu$ est désignée par N , soit :

$$\frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} = N \quad (1.70)$$

Tenant compte des relations (1.69) et (1.70), la relation (1.68) s'écrit plus simplement :

$$q = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{\sqrt{2}N} \right) \quad (1.71)$$

Ainsi, trois paramètres adimensionnels composent la relation (1.71) : q , ε/D et N . D'un point de vue physique, le paramètre q , exprimé par la relation (1.69) est lui-même une variable composée. En effet, la relation (1.69) peut s'écrire :

$$q = \frac{Q/\sqrt{gD^5}}{\sqrt{J}} = \frac{Q^*}{\sqrt{J}} \quad (1.72)$$

où $Q^* = Q/\sqrt{gD^5}$ est un débit relatif et par suite $q = Q^*/\sqrt{J}$ représente une conductivité relative. La relation (1.71) est applicable à l'ensemble du domaine de l'écoulement turbulent et couvre tout le digramme de *Moody* correspondant à $R > 2300$ et $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$. Aucune restriction n'est donc imposée lors de l'application de la relation (1.72) qui constitue la solution explicite de la formule de *Colebrook-White* destinée au calcul du débit.

Pour l'écoulement turbulent lisse ou pratiquement lisse, caractérisé par une rugosité relative telle que $\varepsilon/D \rightarrow 0$, la relation (1.71) devient :

$$q = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log \left(\frac{2,51}{\sqrt{2}N} \right) \quad (1.73)$$

Par contre, pour l'écoulement turbulent rugueux ou hydrauliquement rugueux correspondant à $R \rightarrow \infty$, nous pouvons alors écrire que $\nu \rightarrow 0$ en vertu de la relation (1.36). Ceci implique, au regard de la relation (1.70), que $N \rightarrow \infty$ et que $[2,51/(\sqrt{2}N)] \rightarrow 0$.

La relation (1.71) devient alors :

$$q = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right) \quad (1.74)$$

La relation (1.74) indique clairement que la conductivité relative q dépend exclusivement de la rugosité relative ε/D lorsque l'écoulement est en régime turbulent rugueux.

Pour l'ensemble du domaine de l'écoulement turbulent, la relation (1.71) a été tracée graphiquement dans le système d'axes de coordonnées à divisions semi logarithmiques de la figure (1.6).

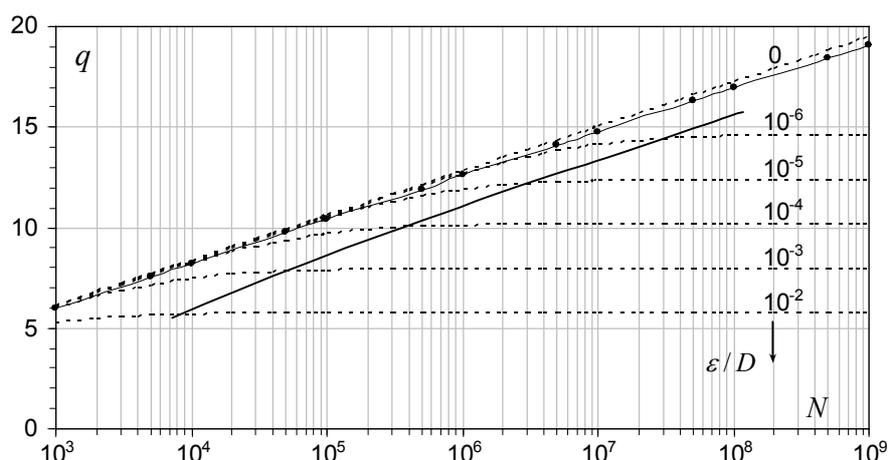


Figure 1.6 : Variation de $q(N)$ selon la relation (1.71) pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D .

- (—) Courbe $q(N)$ correspondant à 1,5% d'écart par rapport au régime d'écoulement turbulent rugueux.
- (—●—) Courbe $q(N)$ correspondant à 1,5% d'écart par rapport au régime d'écoulement lisse.

Le diagramme de la figure 1.6 montre que, pour une valeur fixée de la rugosité relative ε/D , la conductivité relative q augmente avec l'accroissement du paramètre N . Cet accroissement est d'autant plus rapide que la rugosité relative ε/D diminue. Il s'atténue au fur et à mesure que la rugosité relative ε/D augmente. Les courbes obtenues deviennent de plus en plus quasi horizontales pour les valeurs élevées de la rugosité relative ε/D .

Le diagramme de la figure 1.6 est limité dans sa partie supérieure par la courbe $\varepsilon/D = 0$, correspondant à l'écoulement turbulent lisse. Cette courbe répond donc à la relation (1.73).

Pour une valeur fixée de la rugosité relative, le diagramme de la figure 1.6 montre que la conductivité relative en régime d'écoulement de transition est inférieure à celle de l'écoulement en régime turbulent rugueux, quelle que soit la valeur du paramètre N .

Il est admis que si l'écart entre les conductivités relatives calculées selon les relations (1.71) et (1.74) est de 1,5% , le régime d'écoulement peut alors être considéré comme étant en régime

turbulent rugueux. Ceci se traduit par la relation suivante :

$$-1,015 \times \frac{\pi}{\sqrt{2}} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{\sqrt{2N}}\right) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right)$$

Après simplifications et réarrangements, la relation précédente s'écrit :

$$1,015 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{\sqrt{2N}}\right) = \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right)$$

ou bien :

$$\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{\sqrt{2N}} = \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right)^{1/1,015}$$

soit :

$$N = \frac{2,51}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right)^{1/1,015} - \frac{\varepsilon/D}{3,7} \right]^{-1} \quad (1.75)$$

Nous obtenons ainsi la relation $N(\varepsilon/D)$ correspondant à un écart de 1,5% entre les conductivités relatives en régimes d'écoulement de transition et turbulent rugueux. La combinaison des relations (1.71) et (1.75) permet de calculer, pour une rugosité relative ε/D donnée, la valeur de la conductivité relative q .

Pour les valeurs de ε/D figurant dans le diagramme de la figure 1.6, à l'exception de la rugosité $\varepsilon/D = 0$, le tableau 1.1 regroupe les valeurs de q calculées selon les relations (1.71) et (1.75).

Tableau 1.1 : Valeurs de N et q calculées selon les relations (1.71) et (1.75).

ε/D	N	q
10^{-6}	26220198,1	14,375247
10^{-5}	3147826,38	12,1866347
10^{-4}	390464,815	9,99802241
10^{-3}	50867,1462	7,80941013
10^{-2}	7190,76931	5,62079784

La courbe traduisant les valeurs figurant dans le tableau 1.1 a été graphiquement représentée, en trait continu, sur le diagramme de la figure 1.6. Elle a été quelque peu extrapolée au-delà de la courbe correspondant à la rugosité $\varepsilon/D = 10^{-6}$.

Ainsi, tout point, de coordonnées (N, q) , situé sur la courbe ou à droite de la courbe en trait continu du diagramme de la figure 1.6, correspondrait à un régime d'écoulement turbulent rugueux. De même que tout point, de coordonnées $(\varepsilon/D, N)$, situé sur la courbe ou à droite de la courbe en trait continu du diagramme de la figure 1.6, correspondrait à un écoulement en régime turbulent rugueux. Selon Hager (1987), la courbe de variation $\varepsilon/D = \varphi(N)$ se traduit,

avec une excellente approximation, par la relation :

$$\varepsilon / D = (0,01N)^{-10/9} \quad (1.76)$$

Ainsi, le régime de l'écoulement dans une conduite circulaire sous pression de rugosité absolue ε , écoulant un débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique ν sous un gradient de perte de charge J , peut être considéré comme étant en régime turbulent rugueux si :

$$\varepsilon / D \geq (0,01N)^{-10/9} \quad (1.77)$$

Le paramètre adimensionnel N est calculé en application de la relation (1.70), puisque D , J et ν sont les variables connues du problème.

Sur le diagramme de la figure 1.6 a été également représentée la courbe en trait continu doté de cercles pleins (—●—) proche de la courbe du régime d'écoulement turbulent lisse. Cette courbe correspond à un écart de 1,5% entre les conductivités relatives q en régime d'écoulement lisse et de transition. Ceci se traduit par l'égalité suivante :

$$1.015 \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,7} + \frac{2,51}{\sqrt{2N}} \right) = \log \left(\frac{2,51}{\sqrt{2N}} \right) \quad (1.78)$$

soit :

$$\frac{\varepsilon}{D} = 3,7 \left[\left(\frac{2,51}{\sqrt{2N}} \right)^{1/1,015} - \frac{2,51}{\sqrt{2N}} \right] \quad (1.79)$$

En utilisant simultanément les relations (1.71) et (1.79), il est possible d'obtenir les valeurs de la conductivité relative q pour une valeur fixée du paramètre N . Ces valeurs sont regroupées dans le tableau 1.2.

Tableau 1.2 : Valeurs de q et ε / D calculées selon les relations (1.71) et (1.79) pour N donné.

N	ε / D	q
10^3	$7,1554.10^{-4}$	6,01105326
5.10^3	$1,681.10^{-4}$	7,54736192
10^4	$9,0081.10^{-5}$	8,20825739
5.10^4	$2,1162.10^{-5}$	9,74086781
10^5	$1,1341.10^{-5}$	10,4000269
5.10^5	$2,6642.10^{-6}$	11,928253
10^6	$1,4277.10^{-6}$	12,5853663
5.10^6	$3,354.10^{-7}$	14,1084618
10^7	$1,7974.10^{-7}$	14,7631984
5.10^7	$4,2224.10^{-8}$	16,2803812
10^8	$2,2627.10^{-8}$	16,9324014
5.10^8	$5,3157.10^{-9}$	18,4428884
10^9	$2,8486.10^{-9}$	19,0918616

Selon Hager (1987), la variation ε/D en fonction du paramètre N issue de la combinaison des relations (1.71) et (1.79) peut s'exprimer, avec une bonne approximation, par la relation approchée :

$$\frac{\varepsilon}{D} = (3,125N)^{-9/10} \quad (1.80)$$

Ainsi, si la rugosité relative ε/D d'une conduite circulaire sous pression est telle que :

$$\frac{\varepsilon}{D} \leq (3,125N)^{-9/10} \quad (1.81)$$

alors l'écoulement peut être considéré, avec suffisamment de précision, comme étant en régime lisse. La conductivité relative q peut alors être évaluée par application de la relation (1.73).

Tenant compte des inégalités (1.77) et (1.81), il est donc possible d'écrire que si la rugosité relative ε/D est telle que :

$$(0,01N)^{-10/9} < \varepsilon/D < (3,125N)^{-9/10} \quad (1.82)$$

l'écoulement dans la conduite circulaire sous pression peut être considéré comme étant en régime de transition.

Comme le montre clairement le diagramme de la figure 1.6, la zone de transition s'étend sur un espace relativement réduit, comparé à celui du régime d'écoulement turbulent rugueux. Ceci permet de conclure que dans la plupart des applications pratiques, l'écoulement turbulent serait le plus souvent en régime lisse ou en régime turbulent rugueux.

Pour évaluer le débit volume Q écoulé par une conduite circulaire sous pression à partir des valeurs connues de D , J , ε et ν , la relation (1.71) est à conseiller tout en respectant les étapes suivantes :

- i. Les paramètres D , J et ν permettent de calculer le paramètre sans dimension N , en application de la relation (1.70).
- ii. Les valeurs connues de ε/D et de N sont alors introduits dans la relation (1.71) pour l'évaluation de la conductivité relative q .
- iii. Le débit volume Q écoulé par la conduite est enfin déduit de la relation (1.69), sachant que D et J sont connus, soit $Q = q\sqrt{gJD^5}$.

Exemple d'application 1.2 :

Reprenons les données de l'exemple d'application 1.1 pour évaluer le débit écoulé par la conduite. Ces données sont : diamètre $D = 1,7055 \text{ m}$, gradient de la perte de charge $J = 0,01$, rugosité absolue $\varepsilon = 0,001 \text{ m}$ et viscosité cinématique $\nu = 1,15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Le calcul doit être mené selon les étapes suivantes :

- i. Le paramètre sans dimension N est, en vertu de la relation (1.70) :

$$N = \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} = \frac{\sqrt{9,81 \times 0,01 \times 1,7055^3}}{1,15 \cdot 10^{-6}} = 606616,542$$

- ii. La rugosité relative ε/D est :

$$\varepsilon/D = 0,001/1,7055 = 0,00058634, \text{ valeur déjà calculée lors de l'exemple d'application 1.}$$

- iii. La relation (1.71) permet ainsi le calcul de la conductivité relative q , soit :

$$q = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log\left(\frac{0,00058634}{3,7} + \frac{2,51}{\sqrt{2} \times 606616,542}\right) = 8,42394657 \cong 8,424$$

- iv. Selon la relation (1.69), le débit volume Q recherché est :

$$Q = q\sqrt{gJD^5} = 8,424 \times \sqrt{9,81 \times 0,01 \times 1,7055^5} = 10,0226 \text{ m}^3/\text{s} \cong 10 \text{ m}^3/\text{s}. \text{ Nous retrouvons ainsi, la valeur du débit volume de l'exemple d'application 1.1.}$$

- v. La nature du régime d'écoulement peut être connue soit en situant le point de coordonnées (N, q) sur le diagramme de la figure 1.6, ou en vérifiant l'inégalité (1.77). Pour l'exemple que nous venons de considérer, le couple de valeurs $(N = 606616,542 ; q = 8,424)$ se situe à droite de la courbe en trait continu du diagramme de la figure 1.6. Nous pouvons donc affirmer que l'écoulement est en régime turbulent rugueux. Ceci peut être vérifié par le calcul, en vérifiant l'inégalité (1.77), soit :

$$\varepsilon/D = 0,001/1,7055 = 0,00058634 > (0,01N)^{-10/9} = (0,01 \times 606616,542)^{-10/9} = 0,000062627$$

L'inégalité est en effet vérifiée et l'écoulement est donc en régime turbulent rugueux.

Ainsi, la conductivité relative q aurait donc pu être calculée en application de la relation (1.74), soit :

$$q = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log\left(\frac{0,00058634}{3,7}\right) = 8,44159$$

- vi. Cette dernière valeur de la conductivité relative q , comparée à la valeur exacte obtenue selon la relation (1.71), conduit ainsi un écart très acceptable correspondant à :

$$\frac{\Delta q}{q} = 100 \times \frac{8,44159 - 8,424}{8,44159} = 0,2084 \cong 0,21\%$$

Exemple d'application 1.3 :

Quel serait le débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ écoulé par une conduite circulaire sous pression de diamètre $D = 1,5 \text{ m}$, caractérisée par une rugosité absolue $\varepsilon = 10^{-5} \text{ m}$ et sachant que le gradient de la perte de charge est $J = 0,01$?

- i. Au regard de la faible rugosité absolue qui caractérise la paroi de la conduite, l'écoulement qui s'y écoule pourrait se situer dans le domaine lisse. Ceci peut être vérifié par l'inégalité (1.81) dans laquelle le paramètre N est, selon la relation (1.70) :

$$N = \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} = \frac{\sqrt{9,81 \times 0,01 \times 1,5^3}}{10^{-6}} = 5,75402 \cdot 10^5$$

Ainsi, le membre droit $(3,125N)^{-9/10}$ de l'inégalité (1.81) est :

$$(3,125N)^{-9/10} = (3,125 \times 5,75402 \cdot 10^5)^{-9/10} = 2,3478 \cdot 10^{-6}$$

D'autre part, la rugosité relative ε / D est :

$$\varepsilon / D = 10^{-5} / 1,5 = 6,66667 \cdot 10^{-7}$$

Nous pouvons donc conclure que l'inégalité (1.81) est bien satisfaite et que l'écoulement peut être étudié avec suffisamment de précision dans le domaine lisse ($\varepsilon / D = 0$).

- ii. En considérant donc l'écoulement comme étant lisse, la conductivité relative q s'exprime par la relation (1.73), soit :

$$q = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log\left(\frac{2,51}{\sqrt{2}N}\right) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log\left(\frac{2,51}{\sqrt{2} \times 5,75402 \cdot 10^5}\right) = 12,241978 \cong 12,242$$

- iii. Compte tenu de la relation (1.69), le débit volume Q recherché est :

$$Q = q\sqrt{gJD^5} = 12,242 \times \sqrt{9,81 \times 0,01 \times (1,5)^5} = 10,556 \text{ m}^3 / \text{s}$$

- iv. Cette étape vise à comparer la conductivité relative q calculée en (ii) à celle exacte issue de la relation (1.71). Celle-ci donne :

$$q = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log\left(\frac{\varepsilon / D}{3,7} + \frac{2,51}{\sqrt{2}N}\right) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log\left(\frac{6,66667 \cdot 10^{-7}}{3,7} + \frac{2,51}{\sqrt{2} \times 5,75402 \cdot 10^5}\right) = 12,187$$

Ainsi, en ayant admis que l'écoulement pouvait être considéré comme étant lisse, l'erreur relative commise sur le calcul de la conductivité relative q est :

$$\frac{\Delta q}{q} = 100 \times \frac{12,242 - 12,187}{12,242} = 0,4474 \cong 0,45\%$$

Ce faible écart conforte bien l'hypothèse selon laquelle l'écoulement peut être étudié dans le domaine lisse.

I.4.3.2. Calcul du diamètre dans le domaine de l'écoulement turbulent lisse

L'approche de *Hager* (1987) consiste à évaluer le diamètre D de la conduite circulaire sous pression pour chacun des domaines de l'écoulement turbulent. Cette approche vise à contourner la difficulté de proposer une solution unique à l'ensemble du domaine turbulent, en raison de la forme implicite de la relation (1.63) de *Swamee* et *Jain* (1976).

Ainsi, dans le domaine de l'écoulement en régime lisse, correspondant à $\varepsilon/D \rightarrow 0$ et régi par la relation implicite (1.64), *Hager* (1987) suggère de calculer le diamètre D de la conduite après avoir d'abord évalué le diamètre relatif D^* selon la relation explicite approchée :

$$D^* = \frac{2}{5} \log \left[- \frac{54,64}{\log(\nu^*)} \right] \quad (1.83)$$

Selon *Hager*, la relation approchée (1.83) peut être appliquée dans la gamme $10^{-9} < \nu^* < 10^{-3}$.

Le calcul a montré que dans la gamme ainsi indiquée de ν^* , le diamètre relatif D^* varie dans l'intervalle $0,3163 < D^* < 0,5187$. Ainsi, compte tenu de la relation (1.59), le nombre de *Reynolds* R varie donc dans la gamme :

$$\frac{4}{\pi \times 0,5187 \times 10^{-3}} < R < \frac{4}{\pi \times 0,3163 \times 10^{-9}}$$

soit $2450 < R < 4.10^9$.

Le paramètre adimensionnel ν^* figurant dans la relation (1.83) est calculé par application de la relation (1.58), sachant que Q , J et ν sont les variables connues du problème. Une fois D^* calculé selon la relation (1.83), le diamètre D recherché est immédiatement déduit de la relation (1.55) tel que nous l'avons indiqué lors de l'exemple d'application 1.1.

Afin d'apprécier la fiabilité de la relation approchée (1.83), nous l'avons comparée à la relation exacte (1.64) en calculant les écarts $\Delta D^* / D^*$ obtenus sur le diamètre relatif D^* . Le paramètre ν^* a été varié dans la gamme indiquée par *Hager*, soit $10^{-9} < \nu^* < 10^{-3}$. Les résultats issus de cette comparaison ont été représentés graphiquement dans le système d'axes de coordonnées à divisions semi logarithmiques de la figure 1.7.

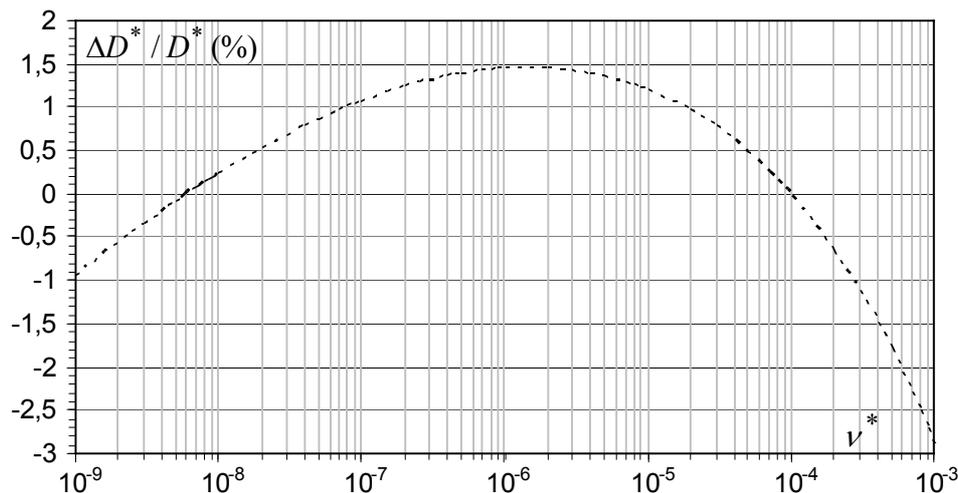


Figure 1.7 : Comparaison entre les relations (1.64) et (1.83) pour $10^{-9} < v^* < 10^{-3}$

La figure 1.7 montre une courbe en cloche constituée d'une branche ascendante atteignant la valeur approximative $\Delta D^* / D^* = 1,5\%$, et d'une branche descendante tendant vers la valeur approximative $|\Delta D^* / D^*| = 3\%$. Cette dernière valeur constitue ainsi l'écart maximal sur le diamètre relatif D^* que pourrait occasionner l'application de la relation approchée (1.83) proposée par Hager (1987).

L'écart se réduit à environ 1,5% en valeur absolue, si l'application de la relation (1.83) était limitée au domaine $10^{-9} \leq v^* \leq 4.10^{-4}$, correspondant à $0,3163 \leq D^* \leq 0,4896$ et à :

$$\frac{4}{\pi \times 0,4896 \times 4.10^{-4}} \leq R \leq \frac{4}{\pi \times 0,3163 \times 10^{-9}}$$

soit $6500 \leq R \leq 4.10^9$.

Le calcul du diamètre D de la conduite dans le domaine turbulent lisse s'effectue selon les étapes suivantes :

- i. Etant donnés Q , J et ν , le diamètre caractéristique D_o est calculé en application de la relation (1.53), soit $D_o = [Q^2 / (gJ)]^{1/5}$.
- ii. A partir des valeurs connues des paramètres Q , D_o et ν , la relation (1.58) permet le calcul du paramètre v^* , soit $v^* = \nu D_o / Q$.
- iii. Une fois v^* calculé, le diamètre relatif D^* est obtenu par application de la relation (1.83).
- iv. Les valeurs ainsi calculées de D_o et D^* permettent de déduire le diamètre D recherché selon la relation (1.55), soit $D = D^* D_o$.

Exemple d'application 1.4 :

Soit à déterminer le diamètre D d'une conduite circulaire lisse sous pression, écoulant un débit volume $Q = 4,8 \text{ m}^3 / \text{s}$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ sous un gradient de perte de charge $J = 0,001$.

- i. Selon la relation (1.53), le diamètre caractéristique D_o est :

$$D_o = \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} = \left(\frac{4,8^2}{9,81 \times 0,001} \right)^{1/5} \approx 4,7224 \text{ m}$$

- ii. Le paramètre adimensionnel ν^* est, en vertu de la relation (1.58) :

$$\nu^* = \frac{\nu D_o}{Q} = \frac{10^{-6} \times 4,7224}{4,8} = 0,9838 \cdot 10^{-6}$$

- iii. La relation (1.83) permet d'évaluer le diamètre relatif D^* , soit :

$$D^* = \frac{2}{5} \log \left[-\frac{54,64}{\log(\nu^*)} \right] = \frac{2}{5} \log \left[-\frac{54,64}{\log(0,9838 \cdot 10^{-6})} \right] = 0,38357$$

- iv. Le diamètre D recherché est donc, en vertu de la relation (1.55) :

$$D = D^* D_o = 0,38357 \times 4,7224 = 1,811 \text{ m}$$

- v. Rappelons que le diamètre que nous venons de calculer est un diamètre approché, selon l'approche de *Hager*. La valeur exacte du diamètre relatif D^* peut être calculée par application de la relation (1.64), en utilisant cependant un procédé itératif.

Pour la valeur de ν^* ci-dessus calculée, la relation (1.64) a permis de conclure que la valeur exacte de D^* est $D^* = 0,378$. Le diamètre exact recherché est par conséquent :

$$D = D^* D_o = 0,378 \times 4,7224 = 1,785 \text{ m}$$

Nous pouvons donc observer que l'écart $(\Delta D / D)$ entre la valeur exacte du diamètre D et celle approchée de *Hager* est :

$$\frac{\Delta D}{D} = 100 \times \frac{1,811 - 1,785}{1,811} = 1,43\%$$

Cet écart aurait pu être déterminé, avec une bonne approximation, par lecture directe sur la figure 1.7, puisque selon la relation (1.55) $(\Delta D / D) = (\Delta D^* / D^*)$, en admettant toutefois qu'aucun écart n'est observé sur le diamètre caractéristique D_o qui ne dépend que du débit volume Q et du gradient J de la perte de charge.

I.4.3.3. Calcul du diamètre dans le domaine pratiquement lisse

Un écoulement turbulent se produisant dans une conduite circulaire sous pression caractérisée par un diamètre D et une rugosité absolue ε , peut être considéré comme étant en régime pratiquement lisse si l'effet de la rugosité relative ε/D sur le diamètre D , sur le gradient J de la perte de charge ou sur le débit volume Q est inférieur à 1,5% par rapport à $\varepsilon/D = 0$ correspondant au régime lisse ou hydrauliquement lisse.

Autrement dit, si le calcul du diamètre D effectué selon les relations (1.63) et (1.64), donne un écart de 1,5%, alors l'écoulement peut être considéré comme étant pratiquement lisse sans pour autant que la rugosité relative réelle de la conduite soit égale à zéro.

Selon la relation (1.55), un écart de 1,5% sur le diamètre D correspond au même écart sur le diamètre relatif D^* . Ainsi, nous pouvons traduire cet écart de 1,5% en écrivant que :

$$D^* = 1,015D_l^* \quad (1.84)$$

où D_l^* correspond au diamètre relatif correspondant au régime lisse et régi par la relation (1.64), soit :

$$\nu^* = \frac{\sqrt{2}D_l^{*3/2}}{2,51} - \frac{\sqrt{2}}{\pi D_l^{*5/2}} \quad (1.85)$$

En remplaçant le diamètre relatif D^* figurant dans la relation (1.63) par la relation (1.84), nous pouvons alors écrire que :

$$\nu^* = \frac{\sqrt{2}(1,015D_l^*)^{3/2}}{2,51} \left[10 \frac{-\frac{\sqrt{2}}{\pi (1,015D_l^*)^{5/2}}}{3,7(1,015D_l^*)} - \frac{\varepsilon^*}{3,7(1,015D_l^*)} \right] \quad (1.86)$$

En égalant les relations (1.85) et (1.86), la relation $\varepsilon^*(D_l^*)$ est ainsi obtenue :

$$\frac{\sqrt{2}D_l^{*3/2}}{2,51} - \frac{\sqrt{2}}{\pi D_l^{*5/2}} = \frac{\sqrt{2}(1,015D_l^*)^{3/2}}{2,51} \left[10 \frac{-\frac{\sqrt{2}}{\pi (1,015D_l^*)^{5/2}}}{3,7(1,015D_l^*)} - \frac{\varepsilon^*}{3,7(1,015D_l^*)} \right] \quad (1.87)$$

Cette dernière relation devient, après simplifications :

$$0,9779 \times 10 \frac{-0,4501}{D_l^{*5/2}} - 10 \frac{-0,4337}{D_l^{*5/2}} + \frac{\varepsilon^*}{3,7555D_l^*} = 0 \quad (1.88)$$

Pour une valeur fixée de la rugosité relative ε^* , la relation (1.88) permet le calcul du diamètre relatif D_l^* en utilisant un procédé itératif. Une fois D_l^* calculé, la relation (1.86) donne la valeur du paramètre adimensionnel ν^* . Le même procédé est répété pour les valeurs usuelles

de la rugosité relative ε^* , ce qui permet d'obtenir la variation de $\varepsilon^*(\nu^*)$. Selon *Hager* (1987), la variation $\varepsilon^*(\nu^*)$ issue des relations (1.86) et (1.88) répondrait à l'équation :

$$\varepsilon^* = (1,31\nu^*)^{8/9} \quad (1.89)$$

Cependant, nos propres vérifications ont montré que la relation (1.89) doit être utilisée avec précaution.

En admettant la validité de la relation (1.89), *Hager* (1987) conclut que si la rugosité relative ε/D d'une conduite circulaire sous pression est telle que :

$$\varepsilon^* \leq (1,31\nu^*)^{8/9} \quad (1.90)$$

alors l'écoulement qui s'y écoule peut être étudié, avec suffisamment de précision, dans le domaine pratiquement lisse.

Le diamètre relatif D^* de la conduite est alors être évalué en application de la relation (1.83), et le diamètre recherché D est déterminé selon la démarche que nous indiquée au cours de l'exemple d'application 1.4.

I.4.3.4. Calcul du diamètre dans le domaine rugueux

Dans le domaine turbulent rugueux, l'effet du nombre de *Reynolds* R sur les caractéristiques de l'écoulement, telles que le coefficient de frottement f , le gradient J de la perte de charge ou même le diamètre D de la conduite, n'est pas significatif. De plus, les valeurs du nombre de *Reynolds* R sont souvent élevées, ce qui se traduit, d'un point de vue théorique, par $R \rightarrow \infty$ ou par $\nu \rightarrow 0$. Ainsi, compte tenu de la relation (1.58), nous pouvons écrire que si $\nu \rightarrow 0$ alors $\nu^* \rightarrow 0$. Le diamètre relatif D^* est alors régi par la relation (1.63) pour $\nu^* \rightarrow 0$, soit :

$$10 \frac{\sqrt{2}}{\pi D^{*5/2}} - \frac{\varepsilon^*}{3,7D^*} = 0$$

ou bien :

$$\varepsilon^* = 3,7D^* \times 10 \frac{\sqrt{2}}{\pi D^{*5/2}} \quad (1.91)$$

La relation (1.91) traduit ainsi la variation $\varepsilon^*(D^*)$ pour le régime d'écoulement turbulent rugueux. Elle est implicite vis-à-vis du diamètre relatif D^* dont la détermination nécessite un procédé itératif.

Nous avons regroupé dans le tableau 1.3 les valeurs de D^* en fonction de ε^* , calculées selon la

relation (1.91). En outre, ces valeurs ont servi au tracé de la courbe montrant la variation $D^*(\varepsilon^*)$ que nous avons représentée dans le système d'axes de coordonnées semi logarithmiques de la figure 1.8.

Tableau 1.3 : Valeurs de D^* en fonction de ε^* , selon la relation (1.91)

ε^*	10^{-8}	5.10^{-8}	10^{-7}	5.10^{-7}	10^{-6}	5.10^{-6}	10^{-5}	5.10^{-5}	10^{-4}	5.10^{-4}
D^*	0,3152	0,3266	0,3320	0,3456	0,3522	0,3691	0,3774	0,3992	0,4100	0,4396
ε^*	10^{-3}	5.10^{-3}	10^{-2}	5.10^{-2}						
D^*	0,4548	0,4984	0,5220	0,5956						

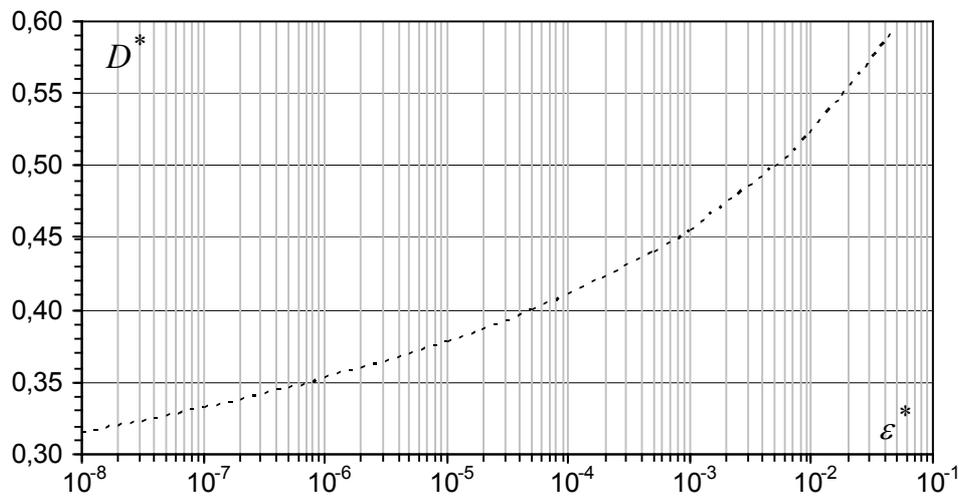


Figure 1.8 : Variation $D^*(\varepsilon^*)$ selon la relation (1.91)

La figure 1.8 montre que le diamètre relatif D^* augmente au fur et à mesure de l'accroissement de la rugosité relative ε^* . Dans la gamme usuelle $10^{-8} \leq \varepsilon^* \leq 5.10^{-2}$, le diamètre relatif D^* varie dans l'intervalle $0,315 \leq D^* \leq 0,595$.

Selon Hager (1987), les solutions approchées de l'équation implicite (1.91) sont :

$$D^* = \frac{\varepsilon^{*0,03}}{1,853} \text{ pour } 10^{-8} < \varepsilon^* / D^* = \varepsilon / D < 7.10^{-4} \quad (1.92)$$

$$D^* = \frac{\varepsilon^{*1/16}}{1,422} \text{ pour } 7.10^{-4} < \varepsilon^* / D^* = \varepsilon / D < 7.10^{-2} \quad (1.93)$$

Ainsi, selon l'intervalle de valeur de la rugosité relative ε^* ou ε/D , les relations (1.92) et (1.93) permettent le calcul explicite du diamètre relatif D^* et, par conséquent, celui du diamètre D recherché de la conduite en application de la relation (1.55).

Pour mieux apprécier la fiabilité des relations (1.92) et (1.93), nous les avons comparées, chacune dans son domaine de validité, à la relation exacte (1.91). Le calcul a porté sur l'écart

relatif $\Delta D^* / D^*$ que ces relations pouvaient occasionner. Les résultats de cette comparaison ont été graphiquement représentés dans le système d'axes de coordonnées à divisions semi logarithmiques des figures 1.9 et 1.10 qui montrent la variation de $\Delta D^* / D^*$ en fonction de la rugosité relative ε / D .

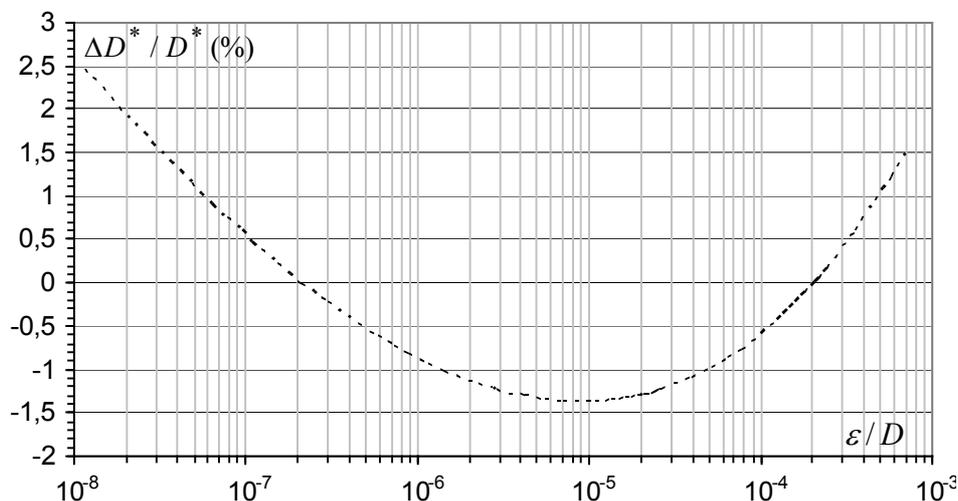


Figure 1.9 : Comparaison entre la relation exacte (1.91) et celle approchée (1.92) de *Hager* (1987) dans l'intervalle $10^{-8} < \varepsilon / D < 7.10^{-4}$

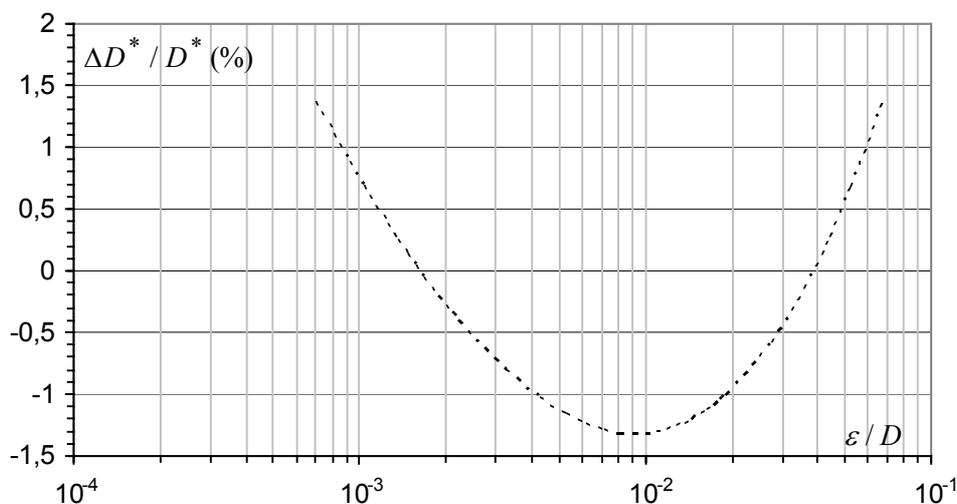


Figure 1.10 : Comparaison entre la relation exacte (1.91) et celle approchée (1.93) de *Hager* (1987) dans l'intervalle $7.10^{-4} < \varepsilon / D < 7.10^{-2}$

La figure 1.9 montre que dans le domaine de validité de la relation approchée (1.92), l'écart relatif que celle-ci pourrait occasionner sur le calcul de D^* peut atteindre 2,5% pour les valeurs de ε / D proches de 10^{-8} . Si l'on admet comme acceptable un écart relatif maximal de 1,5% sur le diamètre relatif D^* , la relation approchée (1.92) doit être appliquée dans le domaine $3.10^{-8} < \varepsilon / D < 7.10^{-4}$ de la rugosité relative.

De même, la figure 1.10 montre que l'application de la relation approchée (1.93) dans le

domaine $7.10^{-4} < \varepsilon/D < 7.10^{-2}$ conduit à un écart maximal de l'ordre de 1,5% sur le calcul du diamètre relatif D^* .

L'inconvénient majeur des relations (1.92) et (1.93) est qu'elles ne permettent pas de conclure a priori sur la nature rugueuse du régime de l'écoulement. Celle-ci ne peut être vérifiée qu'après avoir calculé le diamètre D de la conduite.

Afin de prévoir la nature rugueuse du régime de l'écoulement, *Hager* (1987) suggère que si les relations (1.63) et (1.91) donnent un écart de 1,5% sur le calcul du diamètre relatif D^* , alors le régime de l'écoulement peut être considéré, avec suffisamment de précision, comme étant turbulent rugueux. Cet écart peut donc se traduire par l'égalité suivante :

$$D_T^* = 1,015D_R^* \quad (1.94)$$

où D_T^* représente le diamètre relatif correspondant au régime d'écoulement de transition, tandis que D_R^* désigne le diamètre relatif correspondant au régime d'écoulement turbulent rugueux. Il est nécessaire de rappeler que D_T^* est régi par la relation implicite (1.63) et que D_R^* est donné par la relation également implicite (1.91). Les valeurs de D_R^* sont celles qui ont été reportées dans le tableau 3 pour différentes valeurs de la rugosité relatif ε^* .

En substituant la relation (1.94) dans la relation (1.63), nous pouvons alors écrire que :

$$v^* = \frac{\sqrt{2}(1,015D_R^*)^{3/2}}{2,51} \left[10^{-\frac{\sqrt{2}}{\pi(1,015D_R^*)^{5/2}}} - \frac{\varepsilon^*}{3,7(1,015D_R^*)} \right] \quad (1.95)$$

La relation (1.95) prend la même forme que celle de la relation (1.86) pour $D_l^* = D_R^*$.

En tenant compte des valeurs du couple $(\varepsilon^*; D^* = D_R^*)$ données par le tableau 3, l'application de la relation (1.95) permet d'obtenir la variation $D^*(v^*)$.

Les valeurs de D^* et v^* sont reportées dans le tableau 1.4, en fonction des valeurs de ε^* limitées cependant à l'intervalle pratique $10^{-6} \leq \varepsilon^* \leq 10^{-2}$.

Les valeurs consignées dans le tableau 1.4 ont permis le tracé de la courbe en trait continu doté de cercles pleins (—●—), représentée dans le système d'axes de coordonnées à divisions logarithmiques de la figure 1.11. Elle a été cependant extrapolée au-delà de la valeur $\varepsilon^* = 10^{-2}$. En fait, la courbe a été tracée dans un graphique identique à celui représenté par la figure 1.5. Comparativement à celle-ci, la figure 1.11 offre un domaine plus étendu à l'écoulement en régime turbulent rugueux au dépend du domaine de l'écoulement en régime de transition.

Tableau 1.4 : Valeurs de D^* et ν^* pour quelques valeurs de ε^* , calculées selon les relations (1.91) et (1.95)

ε^*	$D^* = D_R^*$	ν^*
10^{-6}	0,3522	$6,3534 \cdot 10^{-8}$
$5 \cdot 10^{-6}$	0,3691	$2,8133 \cdot 10^{-7}$
10^{-5}	0,3774	$5,3228 \cdot 10^{-7}$
$5 \cdot 10^{-5}$	0,3992	$2,3188 \cdot 10^{-6}$
10^{-4}	0,4100	$4,3508 \cdot 10^{-6}$
$5 \cdot 10^{-4}$	0,4396	$1,8511 \cdot 10^{-5}$
10^{-3}	0,4548	$3,4299 \cdot 10^{-5}$
$5 \cdot 10^{-3}$	0,4984	$1,4061 \cdot 10^{-4}$
10^{-2}	0,5220	$2,5521 \cdot 10^{-4}$

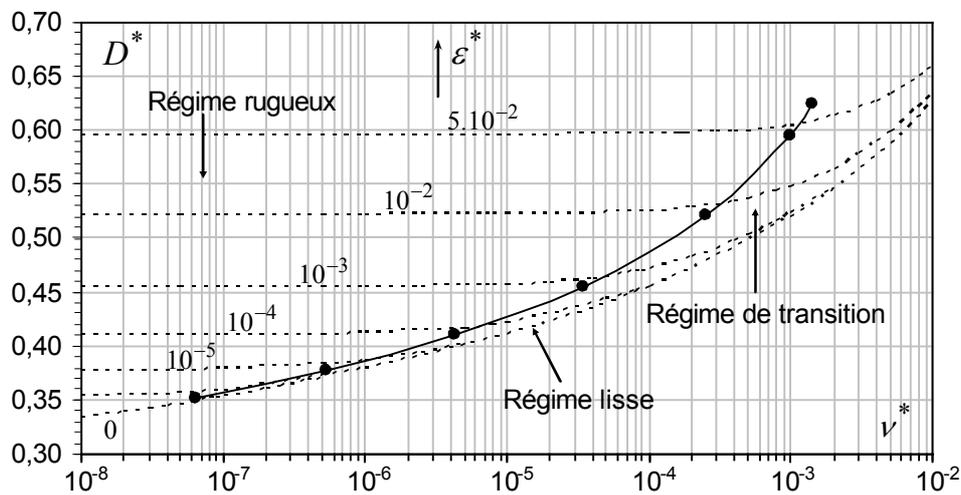


Figure 1.11 : Variation de $D^*(\nu^*)$ pour diverses valeurs de la rugosité relative ε^* .

(—●—) Courbe limite entre les domaines des régimes d'écoulement turbulent rugueux et de transition, tracée selon le tableau 1.4.

Selon Hager (1987), la courbe limite pratique entre les domaines de l'écoulement turbulent rugueux et de transition, représentée sur la figure 1.11, répond à la relation :

$$\varepsilon^* = (60\nu^*)^{10/9} \quad (1.96)$$

Nous pouvons ainsi conclure qu'un écoulement se produisant dans une conduite circulaire en charge peut être considéré comme étant en régime turbulent rugueux si la rugosité relative ε^* est telle que :

$$\varepsilon^* \geq (60\nu^*)^{10/9} \quad (1.97)$$

Rappelons que le diamètre caractéristique D_o et le paramètre adimensionnel ν^* sont donnés respectivement par les relations (1.53) et (1.58). D'autre part, en tenant compte des relations (1.90) et (1.97), nous pouvons écrire que si la rugosité relative ε^* est telle que :

$$(60\nu^*)^{10/9} < \varepsilon^* < (1,31\nu^*)^{8/9} \quad (1.98)$$

alors l'écoulement turbulent se situe dans le domaine de transition.

Le calcul du diamètre D d'une conduite circulaire sous pression, caractérisée par une rugosité absolue ε et écoulant, en régime turbulent rugueux, un débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique ν sous un gradient J de la perte de charge, est mené selon les étapes suivantes. A partir des valeurs connues des paramètres Q , J , ε et ν :

- i. Calculer le diamètre caractéristique D_o par application de la relation (1.53).
- ii. Calculer la valeur de la rugosité relative par application de la relation (1.60), soit $\varepsilon^* = \varepsilon / D_o$.
- iii. Calculer la valeur du paramètre adimensionnel ν^* par application de la relation (1.58).
- iv. Vérifier l'inégalité (1.97) afin de confirmer la nature rugueuse du régime de l'écoulement. Celle-ci peut être également confirmée sur le diagramme de la figure 1.11.
- v. Calculer la valeur du diamètre relatif D^* en choisissant dans un premier temps la relation (1.92).
- vi. Déduire le diamètre D recherché par application de la relation (1.55), soit $D = D^* D_o$.
- vii. Calculer la valeur de la rugosité relative ε / D et vérifier son appartenance au domaine de validité de la relation (1.92).
- viii. Si, au cours de l'étape vii, la valeur calculée de la rugosité relative ε / D n'appartient pas au domaine de validité de la relation (1.92), recalculer le diamètre relatif D^* par la relation (1.93), puis déduire le diamètre D recherché de la relation (1.55).
- ix. Vérifier le domaine de validité de la relation (1.93).

Exemple d'application 1.5 :

Soit à déterminer le diamètre d'une conduite circulaire sous pression caractérisée par une rugosité absolue $\varepsilon = 10^{-3} \text{ m}$, écoulant un débit volume $Q = 8 \text{ m}^3 / \text{s}$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ sous un gradient de la perte de charge $J = 9.10^{-3}$.

- i. Selon la relation (1.53), le diamètre caractéristique D_o est :

$$D_o = \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} = \left(\frac{8^2}{9,81 \times 9.10^{-3}} \right)^{1/5} = 3,73296305 \text{ m} \cong 3,733 \text{ m}$$

- ii. La rugosité relative ε^* est, selon la relation (1.60) :

$$\varepsilon^* = \varepsilon / D_o = 10^{-3} / 3,733 = 2,6788.10^{-4}$$

iii. En application de la relation (1.58), le paramètre adimensionnel ν^* est :

$$\nu^* = \frac{\nu D_o}{Q} = \frac{10^{-6} \times 3,733}{8} = 4,6662.10^{-7}$$

iv. Avec les valeurs ainsi calculées de ε^* et ν^* , l'inégalité (1.97) est bien satisfaite, ce qui confirme la nature rugueuse du régime de l'écoulement. En effet :

$$\varepsilon^* = 2,6788.10^{-4} > (60\nu^*)^{10/9} = (60 \times 4,6662.10^{-7})^{10/9} = 8,734.10^{-6}$$

La nature rugueuse du régime de l'écoulement peut être également vérifiée sur le diagramme de la figure 1.11, en y reportant le couple de valeurs $(\varepsilon^*; \nu^*)$.

v. La nature rugueuse du régime de l'écoulement étant confirmée, calculons le diamètre relatif D^* par application de la relation (1.92), soit :

$$D^* = \frac{\varepsilon^{*0,03}}{1,853} = \frac{(2,6788.10^{-4})^{0,03}}{1,853} \cong 0,4217$$

vi. Le diamètre D recherché est, selon la relation (1.55) :

$$D = D^* D_o = 0,4217 \times 3,733 \cong 1,574 \text{ m}$$

vii. Avec la valeur donnée de la rugosité absolue ε et celle calculée du diamètre D , la rugosité relative ε / D est donc :

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{10^{-3}}{1,574} \cong 6,35.10^{-4}$$

Ainsi, il est établi que la rugosité relative ε / D appartient bien à l'intervalle de validité de la relation (1.92), soit $10^{-8} < \varepsilon / D < 7.10^{-4}$. La valeur du diamètre D de la conduite est bien celle calculée à l'étape vi, soit $D = 1,574 \text{ m}$.

Exemple d'application 1.6 :

Soit à déterminer le diamètre d'une conduite circulaire sous pression caractérisée par une rugosité absolue $\varepsilon = 10^{-3} \text{ m}$, écoulant un débit volume $Q = 4 \text{ m}^3 / \text{s}$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ sous un gradient de la perte de charge $J = 9.10^{-3}$.

i. Le diamètre caractéristique D_o est, en application de la relation (1.53) :

$$D_o = \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} = \left(\frac{4^2}{9,81 \times 9.10^{-3}} \right)^{1/5} = 2,829 \text{ m}$$

ii. La rugosité relative ε^* est, selon la relation (1.60) :

$$\varepsilon^* = \varepsilon / D_o = 10^{-3} / 2,829 \cong 3,535.10^{-4}$$

iii. Le paramètre adimensionnel ν^* est, en vertu de la relation (1.58) :

$$\nu^* = \frac{\nu D_o}{Q} = \frac{10^{-6} \times 2,829}{4} = 7,0726 \cdot 10^{-7}$$

viii. Les valeurs ainsi calculées de ε^* et ν^* confirment bien la nature rugueuse du régime de l'écoulement, puisqu'elles vérifient l'inégalité (1.97) :

$$\varepsilon^* = 3,535 \cdot 10^{-4} > (60\nu^*)^{10/9} = (60 \times 7,0726 \cdot 10^{-7})^{10/9} = 1,386 \cdot 10^{-5}$$

iv. Calculons le diamètre relatif D^* en appliquant la relation (1.92) :

$$D^* = \frac{\varepsilon^{*0,03}}{1,853} = \frac{(3,535 \cdot 10^{-4})^{0,03}}{1,853} \cong 0,4252$$

v. La relation (1.55) permet alors le calcul du diamètre recherché D , soit :

$$D = D^* D_o = 0,4252 \times 2,829 \cong 1,203 \text{ m}$$

vi. La rugosité relative ε/D est donc :

$$\varepsilon/D = 10^{-3} / 1,203 = 8,31 \cdot 10^{-4}$$

vii. Nous pouvons ainsi conclure que la valeur calculée de la rugosité ε/D n'appartient pas au domaine de validité de la relation (1.92) qui a permis d'évaluer le diamètre relatif D^* à l'étape iv. Celui-ci doit être recalculé en utilisant la relation (1.93), soit :

$$D^* = \frac{\varepsilon^{*1/16}}{1,422} = \frac{(3,535 \cdot 10^{-4})^{1/16}}{1,422} \cong 0,4279$$

viii. Le diamètre D recherché est, selon la relation (1.55) :

$$D = D^* D_o = 0,4279 \times 2,829 \cong 1,21 \text{ m}$$

ix. La nouvelle valeur de la rugosité relative ε/D est par suite :

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{10^{-3}}{1,21} = 8,26 \cdot 10^{-4}$$

La valeur ainsi calculée de la rugosité relative ε/D appartient bien à l'intervalle de validité de la relation (1.93), soit $7 \cdot 10^{-4} < \varepsilon/D < 7 \cdot 10^{-2}$. La valeur du diamètre D de la conduite est donc celle calculée à l'étape viii, soit $D = 1,21 \text{ m}$.

I.5. Synthèse des résultats et conclusions

Le chapitre précédent a eu pour principal objectif la synthèse des études antérieures les plus significatives destinées au calcul de l'écoulement turbulent dans les conduites circulaires sous pression.

Dans un premier temps, l'équation fondamentale de l'écoulement est démontrée selon l'approche énergétique de *Cauvin et Guerrée* (1978). Mais, le lecteur pourra consulter d'autres ouvrages tels que *Sinniger et Hager* (1989), *Graf et Altinakar* (1995), *Lencastre* (1996) dont les approches mènent au même résultat.

En se basant sur un schéma de définition ainsi que sur le bilan des forces intérieures et extérieures agissant sur une tranche liquide de l'écoulement, le développement théorique aboutit à l'équation fondamentale (1.30). Ceci a permis de définir la notion de gradient de perte de charge linéaire représenté par J et qui correspond à la perte de charge linéaire par unité de longueur de conduite. Nous avons indiqué que le gradient de la perte de charge J est en règle générale estimé selon la relation de *Darcy-Weisbach* dont l'application à l'écoulement en conduite circulaire sous pression mène à la relation (1.33). Cette relation montre clairement que le gradient de la perte de charge J dépend du débit volume Q écoulé par la conduite, du diamètre de celle-ci et d'un coefficient appelé coefficient de frottement et représenté par f .

Dans un second temps, notre étude s'est intéressée au coefficient de frottement f et aux paramètres dont il dépend. Nous avons affirmé en particulier que, dans le cas de la conduite circulaire sous pression, le coefficient de frottement f est déterminé selon la relation bien connue de *Colebrook-White* [Equation(1.35)]. Au regard de cette relation, nous pouvons relever que le coefficient de frottement f dépend de la rugosité relative ε/D et du nombre de *Reynolds* R qui caractérise l'écoulement. Celui-ci est défini par la relation (1.36).

La relation (1.35) est applicable pour $R > 2300$ et dans tous les domaines de l'écoulement turbulent, c'est-à-dire dans les domaines lisse, de transition et rugueux. Dans les domaines de l'écoulement lisse ($\varepsilon/D = 0$) et turbulent rugueux ($R \rightarrow \infty$ ou $\nu \rightarrow 0$), le coefficient de frottement f s'exprime par les relations (1.37) et (1.38) respectivement. L'écoulement turbulent peut être considéré comme étant dans le domaine rugueux si le produit de la rugosité relative ε/D et du nombre de *Reynolds* R est supérieur ou à la limite égal à 1050 [Inégalité (1.47)].

En ce qui concerne la détermination du coefficient de frottement $f(\varepsilon/D, R)$ par application de la relation (1.35), un procédé itératif ou graphique est nécessaire en raison du fait que f soit contenu à la fois dans les membres gauche et droit de la relation.

Le procédé graphique le plus célèbre est celui proposé par *Moody* (Figure 1.2). Le diagramme

obtenu est connu sous le nom de diagramme universel de *Moody*. Sur ce diagramme sont rapportées en ordonnées les valeurs du coefficient de frottement f et en abscisses celles du nombre de *Reynolds* R . Le diagramme est composé de courbes, correspondant chacune à une valeur fixée de la rugosité relative ε/D . Le diagramme permet non seulement la lecture graphique du coefficient de frottement f mais aussi d'observer les trois domaines de l'écoulement turbulent.

Parmi les relations destinées à l'évaluation du coefficient de frottement f et qui constituent des solutions approchées à l'équation implicite (1.35), nous avons cité la formule de *Swamee* et *Jain* [Relation (1.48)]. Il s'agit d'une relation explicite mais dont l'application est limitée aux gammes $5 \cdot 10^3 < R < 10^8$ et $10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2}$, pour lesquelles, selon les auteurs, un écart de 1,5% est obtenu sur le calcul de f . Cependant, notre étude a pu conclure (Figure 1.3) que la relation (1.48) doit être appliquée avec précaution dans la gamme $5 \cdot 10^3 \leq R \leq 10^4$ puisque l'écart relatif sur f peut varier entre 2% et 2,8%, notamment pour la rugosité relative $\varepsilon/D = 8 \cdot 10^{-3}$.

Nous avons également présenté la relation de *Achour et al.* [Relation (1.50)] destinée à faciliter le calcul du coefficient de frottement f . Cette relation se veut être aussi une solution approchée à la relation implicite (1.35) de *Colebrook-White*. Pour $R > 2300$, la relation de *Achour et al.* occasionne un écart relatif maximal de 1,2% sur le coefficient de frottement f , pour peu que la gamme $0 \leq \varepsilon/D \leq 10^{-3}$ soit respectée.

Le premier chapitre s'est poursuivi par la présentation des méthodes de calcul de l'écoulement turbulent en conduite sous pression. Après avoir posé le problème, il en est ressorti que cinq paramètres fondamentaux influencent l'écoulement. Il s'agit du débit volume Q écoulé par la conduite, du diamètre interne D de celle-ci, du gradient de la perte de charge J , de la rugosité absolue ε caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite et de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Nous avons indiqué que, parmi ces cinq paramètres, seuls les trois premiers cités présentent un intérêt pratique. Nous avons donc porté notre attention sur les méthodes de calcul du débit volume Q , du diamètre D et du gradient J de la perte de charge.

Parmi les méthodes les plus récentes, destinées au calcul de ces paramètres, nous avons cité et présenté celle de *Swamee* et *Jain*. Les trois relations de base de l'écoulement turbulent en conduite sous pression, qui sont les relations (1.33), (1.35) et (1.36), sont transformées et regroupées en une seule relation présentée en termes adimensionnelles [Relation (1.63)]. Celle-ci est applicable dans tout le domaine de l'écoulement turbulent et couvre ainsi l'ensemble du diagramme de *Moody*. Elle est par ailleurs représentée graphiquement dans le système d'axes de coordonnées à divisions logarithmiques de la figure 1.5, à travers laquelle

apparaissent clairement les trois domaines de l'écoulement turbulent qui sont les domaines lisse, de transition et turbulent rugueux. Nous avons noté en particulier que la relation (1.63) est implicite vis-à-vis du diamètre relatif D^* et que le diagramme de la figure 1.5 peut être utilisé pour sa détermination. Un exemple d'application est présenté et explique les étapes à respecter pour le calcul de la valeur du diamètre relatif D^* et celle du diamètre D recherché par application de la relation (1.55).

Le calcul du gradient J de la perte de charge, selon *Swamee* et *Jain*, est un calcul approché basé sur l'application de la relation (1.49). L'écart relatif que cette relation occasionne sur le calcul de J correspond à celui induit par la relation approchée (1.48) sur le calcul du coefficient de frottement f .

L'approche de *Hager* a été longuement présentée et discutée. Elle constitue de nos jours la meilleure approche susceptible de répondre au problème que pose aussi bien le calcul du débit volume Q écoulé par la conduite que celui du diamètre D ce celle-ci.

Le calcul du débit volume Q passe par la transformation des équations de base (1.33), (1.35) et (1.36) régissant l'écoulement turbulent. Ces relations sont judicieusement transformées pour être réduites à la seule relation (1.71). Celle-ci exprime, de manière explicite et suivant une loi logarithmique, la variation de la conductivité relative q en fonction de la rugosité relative ε/D et du paramètre adimensionnel $N(D, J, \nu)$ qui est bien défini par la relation (1.70). Ainsi, à partir des valeurs connues de D , J , ε et ν , la relation (1.71) permet le calcul de la conductivité relative q et le débit volume Q est par suite déduit de l'application de la relation (1.69). Applicable pour $R > 2300$, la relation (1.71) couvre l'ensemble du domaine de l'écoulement turbulent, englobant ainsi les trois régimes lisse, de transition et turbulent rugueux. Ces trois régimes sont par ailleurs mis en évidence par la représentation graphique de la relation (1.71) dans le système d'axes de coordonnées à divisions logarithmiques de la figure 1.6. Le diagramme obtenu permet en outre de se prononcer sur la nature du régime de l'écoulement dans la conduite étudiée. Mais, l'étude de la relation (1.71) a permis surtout d'établir les conditions d'un écoulement turbulent rugueux et celles d'un écoulement turbulent lisse, qui se traduisent par les inégalités (1.77) et (1.81) respectivement. Pour mieux éclairer le lecteur sur l'utilité des relations (1.71), (1.77) et (1.81), celles-ci sont appliquées à des exemples pratiques (Exemples d'application 1.2 et 1.3).

En ce qui concerne le diamètre D de la conduite, *Hager* suggère de le calculer pour chacun des régimes d'écoulement lisse, pratiquement lisse et turbulent rugueux, après les avoir préalablement identifiés. Le premier régime d'écoulement est facilement identifiable par la valeur nulle de la rugosité relative. Le diamètre D recherché est déduit de la relation (1.55),

après avoir évalué le diamètre relatif D^* par application de la relation (1.83). Le second régime d'écoulement est tel que l'inégalité (1.90) soit satisfaite. Le calcul du diamètre D de la conduite suit alors les mêmes étapes que celles précédemment indiquées. La relation (1.83) reste donc en vigueur. Le troisième régime d'écoulement est tel que l'inégalité (1.97) soit respectée. La valeur du diamètre D de la conduite est déduite de celle du diamètre relatif D^* calculé en application de l'une des deux relations (1.92) et (1.93). Le domaine de validité de ces relations et plus précisément le domaine de variation de la rugosité relative ε/D doit être vérifié à l'issue du calcul du diamètre D . Les exemples d'application 1.4, 1.5 et 1.6 sont proposés pour mieux préciser les étapes à suivre pour le calcul du diamètre D de la conduite, lorsque celle-ci est le siège d'un écoulement turbulent lisse, pratiquement lisse ou turbulent rugueux. Le calcul du diamètre relatif D^* dans le domaine de l'écoulement en régime de transition doit être calculé, soit par la voie graphique en utilisant le diagramme de la figure 1.5, soit par un procédé itératif appliqué à la relation implicite (1.63). Le diamètre recherché D de la conduite est alors déduit de la relation (1.55). Aucune relation explicite, même approchée, n'a encore été proposée en remplacement de la relation (1.63).

Le prochain chapitre sera consacré au calcul de l'écoulement turbulent en conduite sous pression par une approche nouvelle, basée sur un modèle de conduite rugueuse. L'attention sera plus particulièrement portée sur le calcul du débit volume Q , du diamètre D et du gradient J de la perte de charge.

CHAPITRE II :

NOUVELLE APPROCHE AU CALCUL DE L'ÉCOULEMENT TURBULENT EN CONDUITE CIRCULAIRE EN CHARGE

II.1. Introduction

Après avoir passé en revue les méthodes les plus significatives destinées au calcul de l'écoulement turbulent en conduite circulaire sous pression, le présent chapitre propose une nouvelle approche basée sur la méthode du modèle rugueux de référence. Elle a été élaborée pour répondre aux trois problèmes principaux que pose le calcul de l'écoulement en conduite rectiligne sous pression, qui sont le calcul du débit volume Q écoulé par la conduite, le calcul du diamètre interne D de celle-ci et le calcul du gradient J de la perte de charge.

Dans un premier temps, la méthode sera exposée aussi clairement que possible en mettant l'accent sur les principaux fondements sur lesquels elle repose.

Dans un second temps, la méthode sera appliquée à la conduite circulaire en charge et les relations régissant les caractéristiques de l'écoulement seront alors déduites.

Les divers paramètres mis en jeu seront identifiés, tout en mettant en exergue leur signification physique.

Des exemples d'applications pratiques seront enfin proposés et serviront à mieux apprécier l'intérêt de la méthode préconisée.

II.2. Modèle rugueux de référence

Le modèle rugueux de référence que nous considérons est en fait une conduite circulaire également sous pression, caractérisée par un diamètre \bar{D} , une rugosité absolue $\bar{\varepsilon}$, écoulant un débit volume \bar{Q} d'un liquide de viscosité cinématique ν , sous un gradient de la perte de charge \bar{J} . Le nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement est \bar{R} et le coefficient de frottement est \bar{f} .

On affecte à cette conduite une forte rugosité relative, arbitrairement choisie égale à $\bar{\varepsilon}/\bar{D} = 3,7 \cdot 10^{-2}$, de telle sorte que l'écoulement turbulent qui s'y produit soit en régime turbulent rugueux ou soit supposé être comme tel.

La rugosité relative arbitrairement choisie $\bar{\varepsilon}/\bar{D} = 3,7 \cdot 10^{-2}$ est obtenue pour diverses valeurs de la rugosité absolue $\bar{\varepsilon}$ et du diamètre \bar{D} .

Puisque l'écoulement est ou supposé être en régime turbulent rugueux, le coefficient de frottement \bar{f} est donc régi par une relation de même forme que celle de la relation (1.38), avec

$\varepsilon/D = \bar{\varepsilon}/\bar{D}$ et $f = \bar{f}$, soit :

$$\bar{f} = \left[-2 \log \left(\frac{\bar{\varepsilon}/\bar{D}}{3,7} \right) \right]^{-2} \quad (2.1)$$

En substituant dans la relation (2.1) la valeur choisie $\bar{\varepsilon}/\bar{D} = 3,7 \cdot 10^{-2}$, le coefficient de frottement \bar{f} prend alors la valeur constante :

$$\bar{f} = \left[-2 \log \left(\frac{3,7 \cdot 10^{-2}}{3,7} \right) \right]^{-2} = (4)^{-2} = \frac{1}{16}$$

soit :

$$\bar{f} = \frac{1}{16} \quad (2.2)$$

L'écoulement turbulent rugueux se produisant dans la conduite de référence est donc caractérisé par un coefficient de frottement constant égal à $1/16$.

L'écoulement se produisant dans la conduite rugueuse de référence est également régi par des relations de même forme que celle des équations de base (1.33) et (1.36), exprimant respectivement le gradient de la perte de charge selon *Darcy-Weisbach* et le nombre de *Reynolds* de l'écoulement.

Appliquée à la conduite rugueuse de référence, la relation (1.33) s'écrit :

$$\bar{J} = \frac{8\bar{f}}{g\pi^2} \frac{\bar{Q}^2}{\bar{D}^5} \quad (2.3)$$

En substituant la relation (2.2) dans la relation (2.3), il vient que :

$$\bar{J} = \frac{\bar{Q}^2}{2g\pi^2 \bar{D}^5} \quad (2.4)$$

Nous pouvons déduire de la relation (2.4) que le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est :

$$\bar{D} = \left(2\pi^2 \right)^{-1/5} \left(\frac{\bar{Q}^2}{g\bar{J}} \right)^{1/5} \quad (2.5)$$

La relation (2.5) traduit le fait que :

$$\bar{D} = \text{constante} \times \left(\frac{\bar{Q}^2}{g\bar{J}} \right)^{1/5} \quad (2.6)$$

où constante = $(2\pi^2)^{-1/5}$.

Si la conduite rugueuse de référence écoulait un débit $\bar{Q} = Q$ sous un gradient de la perte de charge $\bar{J} = J$, alors, en comparant les relations (1.53) et (2.6), nous pouvons écrire que :

$$\bar{D} = \text{constante} \times D_o \quad (2.7)$$

Nous pouvons ainsi énoncer que le diamètre caractéristique D_o de *Swamee* et *Jain* correspond en fait, à une constante près, au diamètre de la conduite rugueuse de référence lorsque celle-ci écoule un débit volume $\bar{Q} = Q$ sous un gradient de la perte de charge $\bar{J} = J$. Nous donnons ainsi la signification physique du diamètre caractéristique.

Appliquée à la conduite rugueuse de référence, la relation (1.36) s'écrit :

$$\bar{R} = \frac{4\bar{Q}}{\pi\bar{D}\nu} \quad (2.8)$$

En éliminant le diamètre \bar{D} entre les relations (2.5) et (2.8), nous obtenons :

$$\bar{R} = \left(\frac{2048}{\pi^3}\right)^{1/5} \frac{(g\bar{J}\bar{Q}^3)^{1/5}}{\nu} \quad (2.9)$$

La relation (2.9) peut s'écrire :

$$\bar{R} = \text{constante} \times \frac{(g\bar{J}\bar{Q}^3)^{1/5}}{\nu} \quad (2.10)$$

avec $\text{constante} = \left(2048/\pi^3\right)^{-1/5}$.

En comparant les relations (1.55) et (1.58) avec la relation (2.10), il apparaît que l'inverse du paramètre cinétique ν^{*-1} de *Swamee* et *Jain* correspond bien, à une constante près, au nombre de *Reynolds* \bar{R} défini par la relation (2.9) lorsque $\bar{Q} = Q$ et $\bar{J} = J$.

Nous pouvons donc énoncer que l'inverse du paramètre cinétique ν^{*-1} de *Swamee* et *Jain*, correspond, à une constante près, au nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans la conduite rugueuse de référence lorsque celle-ci écoule un débit $\bar{Q} = Q$ sous un gradient de la perte de charge $\bar{J} = J$.

D'autre part, en éliminant le débit \bar{Q} entre les relations (2.5) et (2.8), nous obtenons :

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g\bar{J}\bar{D}^3}}{\nu} \quad (2.11)$$

La relation (2.11) peut s'écrire :

$$\bar{R} = \text{constante} \times \frac{\sqrt{g\bar{J}\bar{D}^3}}{\nu} \quad (2.12)$$

En comparant les relations (1.70) et (2.12), nous pouvons alors énoncer que le paramètre adimensionnel N de *Hager* correspond, à une constante près, au nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans la conduite rugueuse de référence lorsque celle-ci écoule un débit $\bar{Q} = Q$ sous un gradient de la perte de charge $\bar{J} = J$.

En définitive, le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans la conduite rugueuse de référence s'exprime selon les trois relations (2.8), (2.9) et (2.11), respectivement en fonction de (\bar{Q}, \bar{D}) , (\bar{Q}, \bar{J}) et (\bar{D}, \bar{J}) .

Le tableau 2.1 résume les caractéristiques géométriques de la conduite rugueuse de référence et hydrauliques de l'écoulement qui s'y produit.

Tableau 2.1 : Caractéristiques géométriques de la conduite rugueuse de référence et hydrauliques de l'écoulement

Paramètre	Symbole	Relation
Diamètre	\bar{D}	(2.5)
Rugosité absolue	$\bar{\varepsilon}$	-
Gradient de la perte de charge	\bar{J}	(2.4)
Débit	\bar{Q}	-
Coefficient de frottement	\bar{f}	1/16
Nombre de <i>Reynolds</i>	\bar{R}	(2.8), (2.9), (2.11)

II.3. Calcul de l'écoulement turbulent par le modèle rugueux de référence

Dans le présent paragraphe, l'écoulement turbulent en conduite sous pression est calculé en ayant recours aux caractéristiques de l'écoulement dans la conduite rugueuse de référence.

Il s'agit d'établir principalement les relations permettant de déterminer le débit volume Q écoulé par une conduite circulaire sous pression, le diamètre interne D de celle-ci ainsi que le gradient de la perte de charge J . Il s'agit donc de répondre aux trois classes de problèmes de l'écoulement turbulent. Cependant, des relations intéressantes seront également proposées pour le calcul des caractéristiques de l'écoulement telles que le nombre de *Reynolds* R et le coefficient de frottement f , lorsque l'un des trois paramètres Q , D et J n'est pas connu.

II.3.1. Le débit volume Q est inconnu

II.3.1.1. Expression du nombre de *Reynolds*

Il s'agit d'établir l'expression du nombre de *Reynolds* R caractérisant l'écoulement turbulent dans une conduite circulaire sous pression écoulant un débit volume Q inconnu. Les paramètres connus du problème sont le diamètre D de la conduite, le gradient J de la perte de charge, la rugosité absolue ε et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement.

Assumons les égalités suivantes : $D = \bar{D}$ et $J = \bar{J}$. Autrement dit, nous affectons au modèle

rugueux de référence le même diamètre que celui de la conduite ainsi que le même gradient de la perte de charge. La relation (2.4) devient alors :

$$J = \frac{\bar{Q}^2}{2g\pi^2 D^5} \quad (2.13)$$

En comparant les relations (1.33) et (2.13), nous pouvons conclure que $Q \neq \bar{Q}$. Le modèle rugueux de référence écoule donc un débit volume différent de celui de la conduite.

D'autre part, la relation (2.8) devient, pour $D = \bar{D}$:

$$\bar{R} = \frac{4\bar{Q}}{\pi D \nu} \quad (2.14)$$

De même que la relation (2.11) s'écrit, pour $D = \bar{D}$ et $J = \bar{J}$:

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJ\bar{D}^3}}{\nu} \quad (2.15)$$

En comparant les relations (1.36) et (2.14), nous pouvons conclure que $R \neq \bar{R}$. Ainsi, le nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement turbulent dans le modèle rugueux de référence est différent de celui caractérisant l'écoulement dans la conduite considérée.

En égalant les relations (1.33) et (2.13), nous pouvons écrire :

$$\frac{8f}{g\pi^2} \frac{Q^2}{D^5} = \frac{\bar{Q}^2}{2g\pi^2 D^5}$$

soit :

$$Q = \frac{1}{4\sqrt{f}} \bar{Q} \quad (2.16)$$

Désignons par ψ_Q la quantité $[1/(4\sqrt{f})]$ figurant dans la relation (2.16), soit :

$$\psi_Q = \frac{1}{4\sqrt{f}} \quad (2.17)$$

La combinaison des relations (2.16) et (2.17) permet d'écrire que :

$$Q = \psi_Q \bar{Q} \quad (2.18)$$

La relation (2.18) indique que le débit volume Q écoulé par une conduite circulaire sous pression est égal au débit \bar{Q} écoulé par le modèle rugueux de référence corrigé par un facteur ψ_Q . Celui-ci peut donc être considéré comme étant le facteur de correction des débits.

D'autre part, le rapport entre les relations (1.36) et (2.14) mène à écrire que :

$$\frac{R}{\bar{R}} = \frac{Q}{\bar{Q}}$$

Or, selon la relation (2.18), le rapport Q/\bar{Q} n'est autre que le facteur de correction des débits ψ_Q . Ainsi :

$$R = \psi_Q \bar{R} \quad (2.19)$$

La relation (2.19) traduit le fait que le nombre de *Reynolds* R caractérisant l'écoulement dans une conduite circulaire sous pression est égal au nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, corrigé par les effets du facteur de correction des débits ψ_Q .

En remplaçant dans la relation (1.35) de *Colebrook-White* le coefficient de frottement f ainsi que le nombre de *Reynolds* R par leur expression respective (2.17) et (2.19), il vient que :

$$\frac{1}{16\psi_Q^2} = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51 \times 4\psi_Q}{\psi_Q \bar{R}} \right) \right]^{-2}$$

d'où :

$$\psi_Q = -\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \quad (2.20)$$

Nous pouvons conclure que le facteur de correction des débits ψ_Q est fonction de la rugosité relative ε/D de la conduite et du nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence.

La relation (2.20) est applicable dans tous les domaines de l'écoulement turbulent (lisse, de transition et rugueux), pour toute valeur de $R > 2300$ et $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$.

Pour le domaine de l'écoulement lisse correspondant à $\varepsilon/D = 0$ ou pour celui de l'écoulement pratiquement lisse correspondant à $\varepsilon/D \rightarrow 0$, la relation (2.20) s'écrit :

$$\psi_Q = -\frac{1}{2} \log \left(\frac{10,04}{\bar{R}} \right) \quad (2.21)$$

Par contre, pour le domaine turbulent rugueux correspondant à $\nu \rightarrow 0$ ou, au regard de la relation (2.15), à $\bar{R} \rightarrow \infty$, la relation (2.20) devient :

$$\psi_Q = -\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \quad (2.22)$$

La relation (2.20) est représentée graphiquement dans le système d'axes de coordonnées logarithmiques de la figure 2.1. Le diagramme obtenu présente la même allure que celle du diagramme de la figure 1.6.

Nous pouvons clairement observer, de gauche vers la droite, sur le diagramme de la figure 2.1, les trois domaines de l'écoulement turbulent : le domaine lisse représentée par la courbe correspondant à $\varepsilon/D = 0$, le domaine de transition et le domaine turbulent rugueux correspondant à une variation quasi horizontale de $\psi_Q(\bar{R})$. Dans le domaine lisse, le facteur de correction des débits ψ_Q augmente avec l'accroissement du nombre de *Reynolds* \bar{R} . Dans le

domaine de transition, ψ_Q augmente également avec l'accroissement de \bar{R} , pour une valeur fixée de la rugosité relative ε/D . Par contre, ψ_Q diminue avec l'accroissement de ε/D , pour une valeur fixée du nombre de Reynolds \bar{R} .

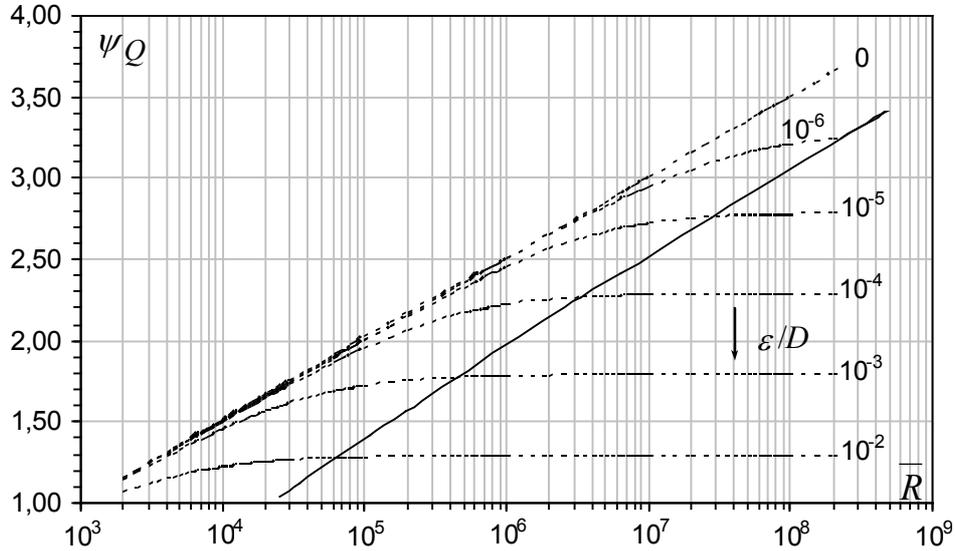


Figure 2.1 : Variation du facteur de correction des débits ψ_Q en fonction du nombre de Reynolds \bar{R} , pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D .
(—) Courbe limite pratique entre les domaines de transition et turbulent rugueux

Sur le diagramme de la figure 2.1, nous avons fait figurer la courbe limite pratique séparant les domaines de transition et turbulent rugueux. La courbe est représentée en trait continu et a été tracée en admettant que si les relations (2.20) et (2.22) donnent 1% d'écart entre les valeurs calculées de ψ_Q , alors l'écoulement peut être étudié avec suffisamment de précision dans le domaine turbulent rugueux. Ceci peut se traduire par l'égalité suivante :

$$\psi_{Q,Rugueux} = 1,01 \times \psi_{Q,Transition} \quad (2.23)$$

Le facteur de correction $\psi_{Q,Rugueux}$ figurant dans le membre gauche de la relation (2.23) est donné par la relation (2.22), tandis que $\psi_{Q,Transition}$ figurant dans le membre droit de la relation (2.23) est donné par la relation (2.20). Ainsi :

$$-\frac{1}{2} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right) = -1,01 \times \frac{1}{2} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}}\right)$$

Après simplifications et réarrangements, l'égalité précédente conduit à écrire que :

$$\bar{R} = \frac{10,04}{\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right)^{1/1,01} - \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right)} \quad (2.24)$$

La courbe limite pratique entre les domaines d'écoulement de transition et turbulent rugueux a alors été tracée après avoir effectué les calculs suivants :

- i. Une valeur de la rugosité relative ε/D est fixée.
- ii. Le nombre de *Reynolds* \bar{R} est alors calculé selon la relation (2.24).
- iii. Avec les valeurs données de ε/D et de \bar{R} , la relation (2.20) permet de calculer le facteur de correction des débits ψ_Q .

Nous avons regroupé dans le tableau 2.2 les valeurs de ψ_Q obtenues selon les étapes de calcul précédemment indiquées, pour quelques valeurs arbitrairement choisies de la rugosité relative ε/D .

Tableau 2.2 : Valeurs du facteur ψ_Q et de \bar{R} calculées selon les relations (2.24) et (2.20) respectivement, pour quelques valeurs de ε/D

ε/D	\bar{R}	ψ_Q
10^{-2}	$6,16.10^4$	1,271
10^{-3}	$4,38.10^5$	1,766
10^{-4}	$3,38.10^6$	2,261
10^{-5}	$2,74.10^7$	2,756
10^{-6}	$2,3.10^8$	3,251

Selon la relation (2.24), si le nombre de *Reynolds* \bar{R} est tel que :

$$\bar{R} \geq \frac{10,04}{\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right)^{1/1,01} - \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right)} \quad (2.25)$$

alors l'écoulement peut être étudié, avec suffisamment de précision dans le domaine turbulent rugueux. Autrement dit, si l'inégalité (2.25) est satisfaite, alors le couple de valeurs $(\varepsilon/D, \bar{R})$ sera matérialisé par un point situé sur la courbe ou à droite de la courbe limite pratique séparant les domaines de transition et turbulent rugueux (Figure 2.1).

Pour déterminer l'expression recherchée du nombre de *Reynolds* R , il faut éliminer le facteur de correction ψ_Q entre les relations (2.19) et (2.20), soit :

$$R = -\frac{1}{2} \bar{R} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}}\right) \quad (2.26)$$

Nous obtenons ainsi l'expression du nombre de *Reynolds* R caractérisant l'écoulement turbulent dans une conduite circulaire sous pression, en fonction de la rugosité relative ε/D de celle-ci et du nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence.

La relation (2.26) est évidemment applicable dans tout le domaine de l'écoulement turbulent correspondant à $R > 2300$ et $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$.

Pour le domaine lisse ou pratiquement lisse, correspondant à $\varepsilon/D = 0$ ou à $\varepsilon/D \rightarrow 0$, la relation (2.26) s'écrit :

$$R = -\frac{1}{2} \bar{R} \log\left(\frac{10,04}{\bar{R}}\right) \quad (2.27)$$

Pour le domaine turbulent rugueux, correspondant à $\nu \rightarrow 0$ ou à $\bar{R} \rightarrow \infty$, la relation (2.26) devient :

$$R = -\frac{1}{2} \bar{R} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right) \quad (2.28)$$

Nous avons représenté dans le système de coordonnées à divisions logarithmiques de la figure 2.2, la variation de R en fonction de \bar{R} selon la relation (2.26), pour les valeurs extrêmes $\varepsilon/D = 0$ et $\varepsilon/D = 0,05$ de la rugosité relative.

Les courbes obtenues sont donc des courbes enveloppes extrêmement plates, entre lesquelles se situent les courbes qui correspondent aux valeurs de la rugosité relative ε/D comprises dans l'intervalle $0 < \varepsilon/D < 0,05$.

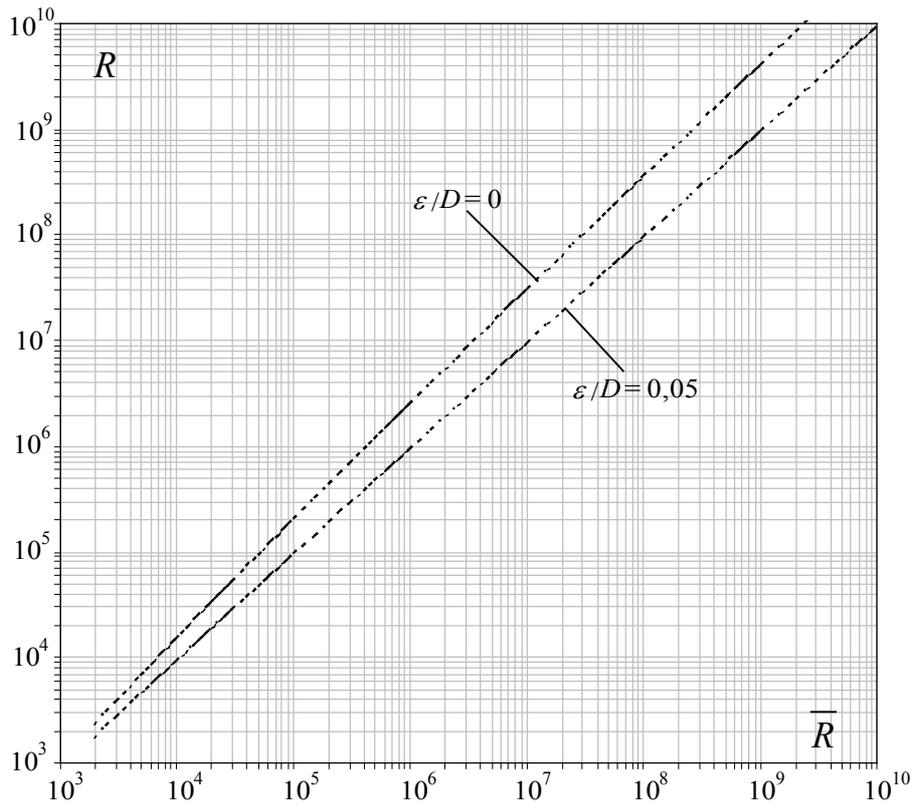


Figure 2.2. : Variation de $R(\bar{R})$ selon la relation (2.26), pour les valeurs extrêmes $\varepsilon/D = 0$ et $\varepsilon/D = 0,05$ de la rugosité relative.

Les étapes suivantes indiquent la voie à suivre pour calculer le nombre de Reynolds R , même si le débit volume Q écoulé par la conduite est inconnu. Les données du problème sont : diamètre D de la conduite, gradient J de la perte de charge, rugosité absolue ε et viscosité

cinématique ν du liquide en écoulement.

- i. A partir des valeurs connues de ε et de D , calculer la rugosité relative ε/D .
- ii. Les valeurs connues des paramètres D , J et ν permettent le calcul du nombre de Reynolds \bar{R} par application de la relation (2.15).
- iii. Les valeurs ainsi déterminées de ε/D et de \bar{R} mènent au calcul aisé du nombre de Reynolds R de l'écoulement par application de la relation (2.26).
- iv. Le couple de valeurs calculées de ε/D et de \bar{R} se matérialise, sur la figure 2.1, par un point qui permet de se prononcer sur la nature du régime de l'écoulement.

Exemple d'application 2.1.

Soit une conduite circulaire en charge de diamètre interne $D=1m$, caractérisée par une rugosité absolue $\varepsilon=0,0001m$ et écoulant un débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique $\nu=10^{-6} m^2/s$ sous un gradient de la perte de charge $J=3.10^{-4}$.

Quelle est la nature du régime de l'écoulement ? Calculer la valeur du nombre de Reynolds R . Quelle est la valeur du facteur de correction des débits ψ_Q ? Déduire la valeur du coefficient de frottement f .

- i. Avec les valeurs données de ε et D , la rugosité relative ε/D est donc :

$$\varepsilon/D = \frac{0,0001}{1} = 10^{-4}$$

- ii. Les valeurs données des paramètres D , J et ν permettent le calcul aisé du nombre de Reynolds \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, en application de la relation (2.15), soit :

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 1^3}}{10^{-6}} \cong 3,07.10^5$$

- iii. En reportant les valeurs ($\varepsilon/D=10^{-4}$; $\bar{R}=3,07.10^5$) sur le diagramme de la figure 2.1, nous obtenons un point situé dans le domaine de transition. L'écoulement turbulent qui se produit dans la conduite considérée est donc en régime de transition.
- iv. Le nombre de Reynolds R recherché est donc, selon la relation (2.26) :

$$R = -\frac{1}{2} \bar{R} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}}\right) = -\frac{1}{2} \times 3,07.10^5 \times \log\left(\frac{10^{-4}}{3,7} + \frac{10,04}{3,07.10^5}\right) \cong 6,48.10^5$$

- v. Le facteur de correction des débits ψ_Q peut être calculé, soit par application de la relation (2.20) ou par la relation (2.19). En appliquant celle-ci, il vient que :

$$\psi_Q = \frac{R}{R} = \frac{6,48 \cdot 10^5}{3,07 \cdot 10^5} = \frac{6,48}{3,07} = 2,1107$$

vi. Le coefficient de frottement est déduit de la relation (2.17), soit :

$$f = \frac{1}{16\psi_Q^2} = \frac{1}{16 \times 2,1107^2} = 0,014$$

Exemple d'application 2.2.

Soit une conduite circulaire en charge de diamètre interne $D = 1,5 \text{ m}$, caractérisée par une rugosité absolue $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ et écoulant un débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ sous un gradient de la perte de charge $J = 2,5 \cdot 10^{-2}$.

Quelle est la nature du régime de l'écoulement ? Calculer la valeur du nombre de Reynolds R . Quelle est la valeur du facteur de correction des débits ψ_Q ? Déduire la valeur du coefficient de frottement f .

i. La rugosité relative ε / D est :

$$\varepsilon / D = \frac{1,5 \cdot 10^{-4}}{1,5} = 10^{-4}$$

ii. Selon la relation (2.15), le nombre de Reynolds \bar{R} de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est :

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 2,5 \cdot 10^{-2} \times 1,5^3}}{1,15 \cdot 10^{-6}} \cong 4475262$$

iii. Sur le diagramme de la figure 2.1, le couple de valeurs ($\varepsilon / D = 10^{-4}$; $\bar{R} = 4475262$) se matérialise par un point situé légèrement à droite de la courbe limite pratique entre les domaines de transition et turbulent rugueux. L'écoulement en présence peut donc être considéré, avec suffisamment de précision, comme étant en régime turbulent rugueux. La nature rugueuse du régime de l'écoulement est par ailleurs confirmée par l'inégalité (2.25). En effet :

$$\bar{R} = 4475262 > \frac{10,04}{\left(\frac{10^{-4}}{3,7}\right)^{1/1,01} - \left(\frac{10^{-4}}{3,7}\right)} = 3384423$$

iv. Etant donné que l'écoulement est en régime turbulent rugueux, le nombre de Reynolds R est donné par la relation (2.28), soit :

$$R = -\frac{1}{2} \bar{R} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right) = -\frac{1}{2} \times 4475262 \times \log\left(\frac{10^{-4}}{3,7}\right) \cong 10221950$$

La valeur exacte du nombre de *Reynolds* R peut être calculée par la relation (2.26), soit :

$$R = -\frac{1}{2} \bar{R} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{R}\right) = -\frac{1}{2} \times 4475262 \times \log\left(\frac{10^{-4}}{3,7} + \frac{10,04}{4475262}\right) \cong 10144457$$

En optant pour la relation (2.28), le calcul de la valeur du nombre de *Reynolds* R est donc entaché d'une erreur relative égale à :

$$\frac{\Delta R}{R} = 100 \times \frac{10221950 - 10144457}{10221950} = 0,758\% \cong 0,76\%$$

v. Le facteur de correction des débits ψ_Q est, selon la relation (2.22) :

$$\psi_Q = -\frac{1}{2} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right) = -\frac{1}{2} \times \log\left(\frac{10^{-4}}{3,7}\right) = 2,2841$$

Cette valeur aurait pu être obtenue en considérant la relation (2.19), soit :

$$\psi_Q = \frac{R}{\bar{R}} = \frac{10221950}{4475262} = 2,2841$$

La valeur exacte de ψ_Q est, selon la relation (2.20) :

$$\psi_Q = -\frac{1}{2} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{R}\right) = -\frac{1}{2} \times \log\left(\frac{10^{-4}}{3,7} + \frac{10,04}{4475262}\right) \cong 2,2668$$

En optant pour la relation (2.22), le calcul du facteur ψ_Q est donc entaché d'une erreur relative égale à :

$$\frac{\Delta \psi_Q}{\psi_Q} = 100 \times \frac{2,2841 - 2,2668}{2,2841} = 0,757\% \cong 0,76\%$$

L'erreur relative sur le facteur ψ_Q est évidemment la même que celle commise sur le calcul du nombre de *Reynolds* R , puisque, selon la relation (2.19) $(\Delta R)/R = (\Delta \psi_Q)/\psi_Q$.

vi. Le coefficient de frottement f est déduit de la relation (2.17), soit :

$$f = \frac{1}{16\psi_Q^2} = \frac{1}{16 \times 2,2841^2} \cong 0,01198$$

La valeur exacte de f est obtenue en insérant dans la relation (2.17) la valeur exacte du facteur de correction ψ_Q , soit :

$$f = \frac{1}{16\psi_Q^2} = \frac{1}{16 \times 2,2668^2} \cong 0,01216$$

L'erreur relative commise sur le coefficient de frottement f est donc :

$$\frac{\Delta f}{f} = 100 \times \frac{0,01216 - 0,01198}{0,01216} = 1,48\% \cong 1,5\%$$

Ce résultat était prévisible car, selon la relation (2.17), nous pouvons écrire que :

$$\frac{\Delta f}{f} = 2 \frac{\Delta \psi_Q}{\psi_Q}, \text{ soit :}$$

$$\frac{\Delta f}{f} = 2 \times 0,76\% = 1,52\%$$

Cet exemple montre, si besoin est, que si le coefficient de frottement f est calculé en application de la relation (2.17), il est recommandé d'utiliser la valeur exacte du coefficient de correction des débits ψ_Q .

II.3.1.2. Expression du coefficient de frottement

Même si la valeur du débit volume Q n'est pas une donnée du problème, la valeur exacte du coefficient de frottement f peut être calculée, à condition que les paramètres D , J , ε et ν soient connus. Pour établir l'expression du coefficient de frottement f , il suffit d'éliminer le facteur de correction des débits ψ_Q entre les relations (2.17) et (2.20), soit :

$$\frac{1}{4\sqrt{f}} = -\frac{1}{2} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{R}\right)$$

ou bien :

$$f = \left[-2 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{R}\right) \right]^{-2} \quad (2.29)$$

La relation (2.29) est applicable dans tout le domaine de l'écoulement turbulent, pour $R > 2300$ et $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$. Le nombre de Reynolds \bar{R} est calculé selon la relation (2.15) pour les valeurs connues des paramètres D , J et ν .

Exemple d'application 2.3.

Reprenons les données de l'exemple d'application 2.2 qui sont :

$$D = 1,5 \text{ m}, J = 2,5 \cdot 10^{-2}, \varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}, \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Quelle est la valeur du coefficient de frottement f ?

- i. La rugosité relative a été déjà calculée et vaut :

$$\varepsilon/D = \frac{1,5 \cdot 10^{-4}}{1,5} = 10^{-4}$$

ii. De même que le nombre de Reynolds \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence a été évalué, compte de la relation (2.15), à :

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 2,5 \cdot 10^{-2} \times 1,5^3}}{1,15 \cdot 10^{-6}} \cong 4475262$$

iii. Ainsi, le coefficient de frottement f est, selon la relation (2.29) :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \right]^{-2} = \left[-2 \times \log \left(\frac{10^{-4}}{3,7} + \frac{10,04}{4475262} \right) \right]^{-2} \cong 0,01216$$

Il s'agit bien de la valeur exacte du coefficient de frottement f calculée lors de l'exemple d'application 2.2, à l'étape vi.

II.3.1.3. Expression du débit volume

L'expression du débit volume Q écoulé par une conduite sous pression peut être déterminée après avoir éliminé le facteur de correction des débits ψ_Q entre les relations (2.18) et (2.20), soit :

$$Q = -\frac{\bar{Q}}{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \quad (2.30)$$

Dans la relation (2.30), le débit volume \bar{Q} est donné par la relation (2.13), soit :

$$\bar{Q} = \pi \sqrt{2} \sqrt{gJD^5} \quad (2.31)$$

Le débit volume \bar{Q} est donc bien défini par les seuls paramètres D et J .

Les relations (2.30) et (2.31) permettent d'écrire que :

$$Q = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{gJD^5} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \quad (2.32)$$

En termes adimensionnels, la relation (2.32) peut être écrite sous la forme :

$$\frac{Q}{\sqrt{gJD^5}} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \quad (2.33)$$

Or, la quantité $Q/\sqrt{gJD^5}$ figurant dans la relation (2.33) est par définition la conductivité relative q de la conduite. Par suite, la relation (2.33) s'écrit :

$$q = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \quad (2.34)$$

La relation (2.34) possède la même forme que celle (1.71) de Hager, mais avec une meilleure

définition des paramètres adimensionnels qui la composent.

L'expression du débit volume Q peut être également déduite des relations (1.36) et (2.26) après avoir éliminé le nombre de *Reynolds* R , soit :

$$\frac{4Q}{\pi D v} = -\frac{1}{2} \bar{R} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}}\right)$$

ou bien :

$$Q = -\frac{\pi D v}{8} \bar{R} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}}\right) \quad (2.35)$$

Rappelons que le nombre de *Reynolds* \bar{R} figurant dans la relation (2.35) est donné par la relation (2.15), pour les valeurs connues des paramètres D , J et ν .

La relation (2.35) est la relation générale qui permet le calcul du débit volume Q dans une conduite circulaire en charge. Elle est applicable à l'ensemble du domaine de l'écoulement turbulent, correspondant à $R > 2300$ et $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$.

Pour le domaine lisse ou pratiquement lisse correspondant à $\varepsilon/D = 0$ ou à $\varepsilon/D \rightarrow 0$, la relation (2.35) s'écrit :

$$Q = -\frac{\pi D v}{8} \bar{R} \log\left(\frac{10,04}{\bar{R}}\right) \quad (2.36)$$

Pour le domaine turbulent rugueux correspondant à $\nu \rightarrow 0$ ou à $\bar{R} \rightarrow \infty$, la relation (2.35) devient :

$$Q = -\frac{\pi D v}{8} \bar{R} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right) \quad (2.37)$$

Exemple d'application 2.4.

Quel est le débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ écoulé par une conduite circulaire sous pression caractérisée par un diamètre interne $D = 1,5 \text{ m}$ et une rugosité absolue $\varepsilon = 3.10^{-4} \text{ m}$, sous un gradient de la perte de charge $J = 2.10^{-3}$? Quelle est la nature du régime de l'écoulement ?

i. La rugosité relative ε/D est :

$$\varepsilon/D = \frac{3.10^{-4}}{1,5} = 2.10^{-4}$$

ii. D'autre part, le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.15) :

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 2.10^{-3} \times 1,5^3}}{10^{-6}} = 1455665$$

iii. Ainsi, le débit volume Q écoulé par la conduite est, en vertu de la relation (2.35) :

$$Q = -\frac{\pi D \nu \bar{R}}{8} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}}\right)$$

soit :

$$Q = -\frac{\pi \times 1,5 \times 10^{-6}}{8} \times 1455665 \times \log\left(\frac{2 \cdot 10^{-4}}{3,7} + \frac{10,04}{1455665}\right) \cong 3,614 \text{ m}^3 / \text{s}$$

iv. Selon l'inégalité (2.25), nous pouvons déduire que l'écoulement est en régime de transition puisque :

$$\bar{R} = 1455665 < \frac{10,04}{\left(\frac{2 \cdot 10^{-4}}{3,7}\right)^{1/1,01} - \left(\frac{2 \cdot 10^{-4}}{3,7}\right)} = 1817921$$

Cet état de l'écoulement est confirmé par le diagramme de la figure 2.1, puisque le couple de valeurs ($\varepsilon/D = 2 \cdot 10^{-4}$; $\bar{R} = 1455665$) se matérialise par un point situé dans le domaine de transition.

Exemple d'application 2.5.

Quel est le débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ écoulé par une conduite circulaire sous pression caractérisée par un diamètre interne $D = 0,5 \text{ m}$ et une rugosité absolue $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, sous un gradient de la perte de charge $J = 10^{-3}$? Quelle est la nature du régime de l'écoulement ?

i. La rugosité relative ε/D est :

$$\varepsilon/D = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{0,5} = 10^{-3}$$

ii. D'autre part, le nombre de Reynolds \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.15) :

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 10^{-3} \times 0,5^3}}{10^{-6}} \cong 198091$$

iii. Ainsi, le débit volume Q écoulé par la conduite est, en vertu de la relation (2.35) :

$$Q = -\frac{\pi D \nu \bar{R}}{8} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}}\right)$$

soit :

$$Q = -\frac{\pi \times 0,5 \times 10^{-6}}{8} \times 198091 \times \log\left(\frac{10^{-3}}{3,7} + \frac{10,04}{198091}\right) \cong 0,136 \text{ m}^3 / \text{s} = 136 \text{ l} / \text{s}$$

- iv. Selon l'inégalité (2.25), nous pouvons déduire que l'écoulement est en régime de transition puisque :

$$\bar{R} = 198091 < \frac{10,04}{\left(\frac{10^{-3}}{3,7}\right)^{1/1,01} - \left(\frac{10^{-3}}{3,7}\right)} = 438436$$

Le diagramme de la figure 2.1 confirme que le régime de l'écoulement appartient au domaine de transition puisque le couple de valeurs $(\varepsilon/D = 10^{-3}; \bar{R} = 198091)$ se matérialise par un point situé en pleine zone de transition.

- v. Si l'on avait supposé que le régime de l'écoulement était turbulent rugueux, le débit volume Q aurait donc pu être évalué en application de la relation (2.37), soit :

$$Q = -\frac{\pi D v}{8} \bar{R} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7}\right) = -\frac{\pi \times 0,5 \times 10^{-6}}{8} \times 198091 \times \log\left(\frac{10^{-3}}{3,7}\right) \cong 0,1388 m^3 / s$$

Ainsi, dans l'hypothèse d'un régime d'écoulement turbulent rugueux, le calcul du débit Q serait entaché d'une erreur relative égale à :

$$\frac{\Delta Q}{Q} = 100 \times \frac{0,1388 - 0,136}{0,1388} = 2\%$$

- vi. Par contre, si l'on avait supposé que l'écoulement était de nature pratiquement lisse, le débit volume Q aurait été évalué en application de la relation (2.36), soit :

$$Q = -\frac{\pi D v}{8} \bar{R} \log\left(\frac{10,04}{\bar{R}}\right) = -\frac{\pi \times 0,5 \times 10^{-6}}{8} \times 198091 \times \log\left(\frac{10,04}{198091}\right) = 0,167 m^3 / s$$

Le calcul du débit volume Q aurait donc été entaché d'une erreur relative égale à :

$$\frac{\Delta Q}{Q} = 100 \times \frac{0,167 - 0,136}{0,167} \cong 18,5\%$$

II.3.2. Le diamètre D est inconnu

II.3.2.1. Expression du nombre de *Reynolds*

Il s'agit d'établir la relation permettant le calcul explicite du nombre de *Reynolds* R caractérisant l'écoulement dans une conduite circulaire sous pression dont le diamètre D est le paramètre inconnu. Les données du problème sont le débit volume Q écoulé par la conduite, le gradient de la perte de charge J , la rugosité absolue ε et la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

Dans cette partie, nous assumons les égalités suivantes : $Q = \bar{Q}$ et $J = \bar{J}$. Autrement dit, nous faisons écouler dans le modèle rugueux de référence le même débit que celui de la conduite,

sous le même gradient de la perte de charge. La relation (2.4) devient alors :

$$J = \frac{Q^2}{2g\pi^2 \bar{D}^5} \quad (2.38)$$

En comparant les relations (1.33) et (2.38), nous pouvons déduire que $D \neq \bar{D}$. Ainsi, pour écouler le débit Q sous le gradient de la perte de charge J , le modèle rugueux de référence doit être caractérisé par un diamètre \bar{D} différent de celui de la conduite.

Compte tenu du fait que $Q = \bar{Q}$ et $J = \bar{J}$, le diamètre \bar{D} s'exprime alors, en vertu de la relation (2.5), par :

$$\bar{D} = \left(2\pi^2\right)^{-1/5} \left(\frac{Q^2}{gJ}\right)^{1/5} \quad (2.39)$$

Le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est donc entièrement défini par les paramètres connus Q et J .

D'autre part, le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, en vertu de la relation (2.9) pour $Q = \bar{Q}$ et $J = \bar{J}$:

$$\bar{R} = \left(\frac{2048}{\pi^3}\right)^{1/5} \frac{(gJQ^3)^{1/5}}{\nu} \quad (2.40)$$

Le nombre de *Reynolds* \bar{R} est donc bien défini, puisque Q , J et ν se comptent parmi les paramètres connus du problème.

En outre, la relation (2.8) devient, pour $Q = \bar{Q}$:

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\pi D \nu} \quad (2.41)$$

En égalant les relations (1.32) et (2.38), il vient que :

$$\frac{8f}{g\pi^2} \frac{Q^2}{D^5} = \frac{Q^2}{2g\pi^2 \bar{D}^5}$$

Après simplifications et réarrangements, la relation précédente permet d'écrire que :

$$D = (16f)^{1/5} \bar{D} \quad (2.42)$$

La relation peut également s'écrire :

$$D = \psi \bar{D} \quad (2.43)$$

où :

$$\psi = (16f)^{1/5} \quad (2.44)$$

La relation (2.43) traduit le fait que le diamètre D de la conduite est égal au diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence, corrigé par les effets du facteur ψ . Celui-ci peut donc être considéré comme le facteur de correction des diamètres.

En faisant le rapport entre les relations (1.36) et (2.41), nous obtenons :

$$\frac{R}{\bar{R}} = \frac{\bar{D}}{D} \quad (2.45)$$

Or, selon la relation (2.43), le rapport \bar{D}/D constituant le membre droit de la relation (2.45) n'est autre que ψ^{-1} . Ainsi, la relation (45) s'écrit :

$$R = \psi^{-1} \bar{R} \quad (2.46)$$

En remplaçant, dans la relation (1.36) de *Colebrook-White*, le diamètre D , le coefficient de frottement f ainsi que le nombre de *Reynolds* R par leur expression respective (2.43), (2.44) et (2.46), nous obtenons :

$$\frac{\psi^5}{16} = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{3,7\psi} + \frac{2,51 \times 4}{\psi^{-1} \bar{R} \psi^{5/2}} \right) \right]^{-2}$$

Après simplifications et réarrangements, la relation précédente prend la forme suivante :

$$\psi^{5/2} \log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\bar{R} \psi^{3/2}} \right) = -2 \quad (2.47)$$

Nous obtenons ainsi la relation implicite $\psi(\varepsilon/\bar{D}, \bar{R})$. Rappelons que le diamètre \bar{D} est bien défini par la relation (2.39) pour les valeurs connues de Q et J , et que \bar{R} l'est aussi pour les valeurs données de Q , J et ν en vertu de la relation (2.40). La seule variable inconnue dans la relation (2.47) n'est donc que le facteur de correction des diamètres ψ . Celui-ci doit être évalué par un procédé itératif ou graphique, en raison de la forme implicite de la relation (2.47) qui le gouverne.

La relation implicite (2.47) a été représentée graphiquement dans le système d'axes de coordonnées à divisions semi logarithmiques de la figure (2.3). Le diagramme obtenu traduit la variation du coefficient de correction des diamètres ψ en fonction du nombre de *Reynolds* \bar{R} , pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/\bar{D} .

Nous pouvons considérer le diagramme de la figure 2.3 comme une version du diagramme de *Moody*, représenté par la figure 1.2. On y distingue les trois domaines connus de l'écoulement turbulent : lisse, de transition et turbulent rugueux. Sur la figure 2.3 nous avons fait figurer également, en trait continu, la courbe limite pratique délimitant les domaines de l'écoulement de transition et turbulent rugueux. Au-delà de cette courbe, le domaine de l'écoulement turbulent rugueux se traduit par une variation quasi horizontale du coefficient de correction des diamètres ψ . Celui-ci ne dépend que de la rugosité relative ε/\bar{D} .

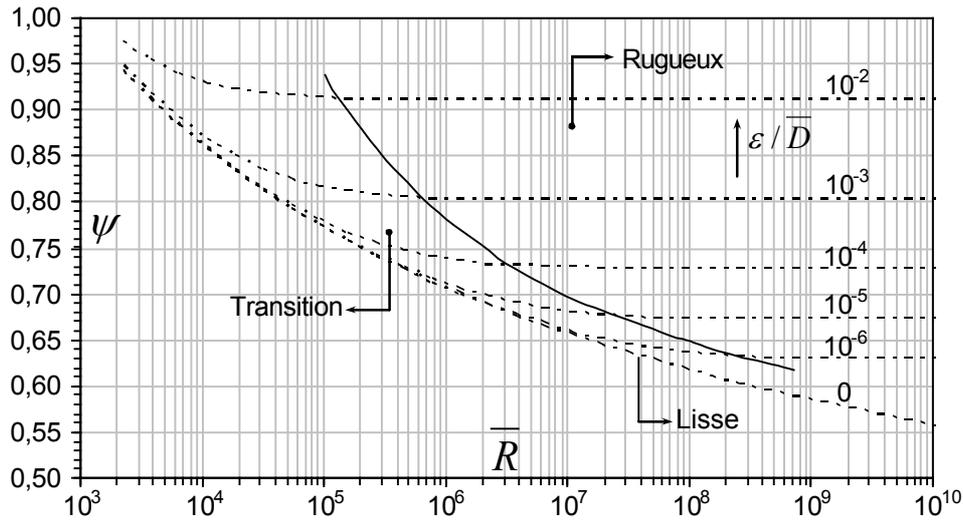


Figure 2.3 : Variation de $\psi(\bar{R})$ selon la relation (2.47) pour diverses valeurs de ε/\bar{D}

Le domaine lisse, correspondant à $\varepsilon/\bar{D} = 0$, se réduit à une courbe unique. Celle-ci se traduit, selon la relation (2.47), par :

$$\psi^{5/2} \log\left(\frac{10,04}{\bar{R}\psi^{3/2}}\right) = -2 \quad (2.48)$$

Le domaine de l'écoulement rugueux, correspondant à $\nu \rightarrow 0$ ou à $\bar{R} \rightarrow \infty$, est régi, selon la relation (2.47), par l'équation :

$$\psi^{5/2} \log\left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{3,7\psi}\right) = -2 \quad (2.49)$$

Le diagramme de la figure 2.3 montre que dans l'ensemble du domaine turbulent, le facteur de correction des diamètres ψ varie dans la gamme $0,55 < \psi < 1$.

Afin de faciliter le calcul du facteur de correction ψ , il est recommandé d'utiliser la relation approchée suivante en remplacement de la relation implicite (2.47), établie au prix d'un calcul assez laborieux :

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log\left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}}\right) \right]^{-2/5} \quad (2.50)$$

Pour mieux apprécier la fiabilité de la relation approchée (2.50), nous l'avons comparée à la relation exacte (2.47). Cette comparaison a été effectuée selon les étapes suivantes :

- i. Une valeur de la rugosité relative ε/\bar{D} est choisie dans la gamme $0 \leq \varepsilon/\bar{D} \leq 2.10^{-2}$.
- ii. Le nombre de Reynolds \bar{R} est ensuite varié selon un pas arbitrairement choisi.
- iii. Pour la valeur fixée de la rugosité relative ε/\bar{D} , un calcul itératif permet d'évaluer le facteur de correction des diamètres ψ selon la relation (2.47), pour chacune des valeurs choisies du nombre de Reynolds \bar{R} .

- iv. Pour les mêmes valeurs de ε/\bar{D} et de \bar{R} considérées au cours des étapes *i* et *ii*, la relation (2.50) permet d'obtenir la valeur approchée de ψ .
- v. L'écart relatif $(\Delta\psi)/\psi$, entre les valeurs exacte et approchée de ψ calculées respectivement au cours des étapes *iii* et *iv*, est enfin déterminé.

A l'issue des étapes de calcul ci-dessus indiquées, l'écart relatif $(\Delta\psi)/\psi$ est représenté graphiquement dans le système d'axes de coordonnées à divisions semi logarithmiques de la figure 2.4, en fonction de \bar{R} et pour chacune des valeurs fixées de la rugosité relative ε/\bar{D} .

Au regard du diagramme de la figure 2.4, il apparaît clairement que pour $\bar{R} \geq 2000$ et dans toute la gamme $0 \leq \varepsilon/\bar{D} \leq 2.10^{-2}$, l'écart relatif maximal $[(\Delta\psi)/\psi]_{\max}$ est inférieur à 0,5%. Ceci confirme, si besoin est, la validité de la relation approchée explicite (2.50).

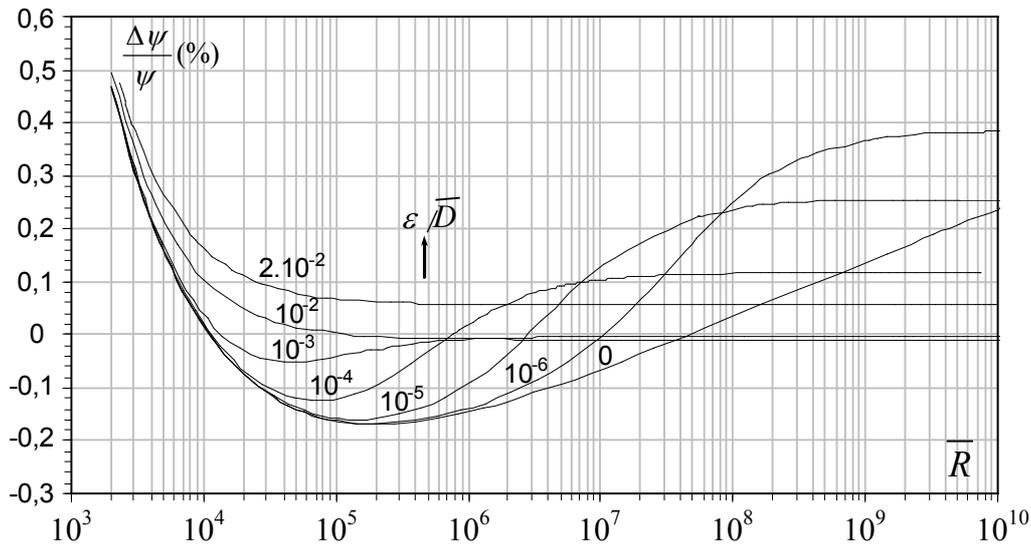


Figure 2.4 : Ecart relatif $(\Delta\psi)/\psi$ entre les valeurs exacte et approchée de ψ , calculé selon les relations (2.47) et (2.50) en fonction de \bar{R} et ε/\bar{D}

En assumant la relation (2.50), l'expression du nombre de *Reynolds* R de l'écoulement est déduite de la relation (2.46), soit :

$$R = \frac{\bar{R}}{1,35} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{2/5} \quad (2.51)$$

La relation (2.51) est applicable dans tout le domaine de l'écoulement turbulent. Elle engendrerait, selon la relation (2.46), une erreur relative maximale sur le calcul de R égale à $[(\Delta R)/R]_{\max} = [(\Delta\psi)/\psi]_{\max} = 0,5\%$ seulement.

Les étapes suivantes indiquent la voie à suivre pour calculer la valeur du nombre de *Reynolds* R par application de la relation (2.51), sachant que Q, J, ε et ν sont les paramètres connus du

problème et que le diamètre D de la conduite n'est pas une donnée requise :

- i. A partir des valeurs connues des seuls paramètres Q et J , la relation (2.39) permet le calcul aisé du diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence, soit :

$$\bar{D} = (2\pi^2)^{-1/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5}$$

- ii. Le nombre de Reynolds \bar{R} peut être évalué soit par application de la relation (2.40) à partir des valeurs données de Q , J et ν :

$$\bar{R} = \left(\frac{2048}{\pi^3} \right)^{1/5} \frac{(gJQ^3)^{1/5}}{\nu}$$

soit par application de la relation (2.41) en y insérant la valeur donnée du débit volume Q et la valeur calculée de \bar{D} à l'issue de l'étape i :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\pi \bar{D} \nu}$$

- iii. La valeur donnée de la rugosité absolue ε et celle précédemment calculée de \bar{D} donnent la rugosité relative ε/\bar{D} .
- iv. Les paramètres \bar{R} et ε/\bar{D} sont alors insérés dans la relation (2.51) pour l'évaluation du nombre de Reynolds recherché R .

Exemple d'application 2.6.

Quelle est la valeur du nombre de Reynolds R caractérisant l'écoulement se produisant dans une conduite circulaire sous pression de rugosité absolue $\varepsilon = 5.10^{-4} m$, écoulant un débit volume $Q = 0,136 m^3/s$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} m^2/s$, sous un gradient de la perte de charge $J = 10^{-3}$? Quelle est la nature du régime de l'écoulement ?

- i. Le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.39) :

$$\bar{D} = (2\pi^2)^{-1/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} = (2\pi^2)^{-1/5} \times \left(\frac{0,136^2}{9,81 \times 10^{-3}} \right)^{1/5} \cong 0,6252 m$$

- ii. Le nombre de Reynolds \bar{R} est, en vertu de la relation (2.41) :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\pi \bar{D} \nu} = \frac{4 \times 0,136}{\pi \times 0,6252 \times 10^{-6}} \cong 276970$$

Le même résultat est obtenu par application de la relation (2.40), soit :

$$\bar{R} = \left(\frac{2048}{\pi^3} \right)^{1/5} \frac{(gJQ^3)^{1/5}}{\nu} = (2048/\pi^3)^{1/5} \times \frac{(9,81 \times 10^{-3} \times 0,136^3)^{1/5}}{10^{-6}} = 276970$$

iii. La rugosité relative ε/\bar{D} est :

$$\varepsilon/\bar{D} = 5.10^{-4} / 0,6252 \cong 8.10^{-4}$$

iv. Compte tenu des valeurs ainsi calculées de \bar{R} et ε/\bar{D} , le nombre de *Reynolds* R recherché est, selon la relation (2.51) :

$$R = \frac{\bar{R}}{1,35} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{2/5} = \frac{276970}{1,35} \times \left[-\log \left(\frac{8.10^{-4}}{4,75} + \frac{8,5}{276970} \right) \right]^{2/5} \cong 346275$$

v. Le couple de valeurs ($\varepsilon/\bar{D} = 8.10^{-4}$; $\bar{R} = 276970$) se matérialise, sur le diagramme de la figure 2.3, par un point situé en pleine zone de transition. L'écoulement est donc en régime de transition.

vi. La présente étape anticipe sur le calcul du diamètre D de la conduite dont la valeur n'a pas été nécessaire à la résolution de l'exemple d'application considéré. En vertu de la relation (1.36), le diamètre D de la conduite est :

$$D = \frac{4Q}{\pi R \nu} = \frac{4 \times 0,136}{\pi \times 346275 \times 10^{-6}} = 0,50 \text{ m}$$

Si une précision meilleure que 0,5% est souhaitée sur le calcul du nombre de *Reynolds* R , il est possible de proposer une autre formulation en remplacement de la relation (2.51). Pour cela, il faut rappeler la relation (2.15) :

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} \quad (2.15)$$

Le nombre de *Reynolds* \bar{R} de la relation (2.15) correspondant aux conditions $Q \neq \bar{Q}$, $D = \bar{D}$ et $J = \bar{J}$, soit $\bar{R}(Q \neq \bar{Q}; D = \bar{D}; J = \bar{J})$. En insérant la relation (2.43) dans (2.15), il vient que :

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} \psi^{3/2} \frac{\sqrt{gJ\bar{D}^3}}{\nu} \quad (2.52)$$

La relation (2.52) peut s'écrire :

$$\bar{R}(Q \neq \bar{Q}; D = \bar{D}; J = \bar{J}) = \psi^{3/2} \bar{R}(Q = \bar{Q}; D = \bar{D}; J = \bar{J}) \quad (2.53)$$

D'autre part, en éliminant le coefficient f entre les relations (2.17) et (2.44), nous obtenons :

$$\psi^{-1} = \psi_Q^{2/5} \quad (2.54)$$

Les relations (2.20) et (2.54) permettent d'écrire que :

$$\psi^{-1} = \left[-\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \right]^{2/5} \quad (2.55)$$

où \bar{R} correspond en fait à $\bar{R}(Q \neq \bar{Q}; D = \bar{D}; J = \bar{J})$ donné par la relation (2.15). En tenant compte

de la relation (2.53), la relation (2.55) s'écrit également :

$$\psi^{-1} = \left[-\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} \bar{R}} \right) \right]^{2/5} \quad (2.56)$$

où \bar{R} correspond en fait à $\bar{R}(Q = \bar{Q}; D \neq \bar{D}; J = \bar{J})$ que l'on peut évaluer selon les relations (2.40) ou (2.41), tel que nous l'avons montré à l'étape *ii* de l'exemple d'application 2.6.

En insérant la relation (2.43) dans (2.56), celle-ci devient :

$$\psi^{-1} = \left[-\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} \bar{R}} \right) \right]^{2/5} \quad (2.57)$$

Or, le membre gauche de la relation (2.57) correspond, selon la relation (2.46), au rapport R/\bar{R} . De ce fait, la relation (2.57) s'écrit sous la forme définitive :

$$R = \bar{R} \left[-\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} \bar{R}} \right) \right]^{2/5} \quad (2.58)$$

La relation (2.58) mène à une valeur plus précise du nombre de *Reynolds* R , lorsqu'on la compare à la relation (2.51). Mieux encore, la relation (2.58) a été comparée à la relation exacte (2.46), pour $\bar{R} > 2200$ et $0 \leq \varepsilon/\bar{D} \leq 0,05$. Il a été observé que l'écart maximal était négligeable, de l'ordre de 0,05%.

Exemple d'application 2.7.

Reprenons les données de l'exemple d'application (2.6), soit :

$$Q = 0,136 \text{ m}^3 / \text{s}; J = 10^{-3} \text{ } \varepsilon = 5.10^{-4} \text{ m}; \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

Il s'agit d'évaluer, en l'absence de la valeur du diamètre D de la conduite, le nombre de *Reynolds* R caractérisant l'écoulement qui s'y produit.

i. Le calcul du diamètre \bar{D} , de \bar{R} et de ε/\bar{D} est le même que celui effectué au cours des étapes *i*, *ii* et *iii* de l'exemple d'application (2.6). Nous obtenons :

- $\bar{D} = (2\pi^2)^{-1/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} = (2\pi^2)^{-1/5} \times \left(\frac{0,136^2}{9,81 \times 10^{-3}} \right)^{1/5} \cong 0,6252 \text{ m}$
- $\bar{R} = \frac{4Q}{\pi \bar{D} \nu} = \frac{4 \times 0,136}{\pi \times 0,6252 \times 10^{-6}} \cong 276970$
- $\varepsilon/\bar{D} = 5.10^{-4} / 0,6252 \cong 8.10^{-4}$

ii. Selon la relation (2.50), le facteur de correction des diamètres ψ est :

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{8.10^{-4}}{4,75} + \frac{8,5}{276970} \right) \right]^{-2/5} = 0,7998 \cong 0,8$$

iii. En vertu de la relation (2.58), le nombre de *Reynolds* R recherché est donc :

$$R = \bar{R} \left[-\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} \bar{R}} \right) \right]^{2/5} = 276970 \times \left[-\frac{1}{2} \times \log \left(\frac{8 \cdot 10^{-4}}{3,7 \times 0,8} + \frac{10,04}{0,8^{3/2} \times 276970} \right) \right]^{2/5} \cong 346202$$

II.3.2.2. Expression du coefficient de frottement

Il s'agit d'établir la relation permettant le calcul du coefficient de frottement f à partir des valeurs connues du débit volume Q écoulé par la conduite, du gradient de la perte de charge J , de la rugosité absolue ε et de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Le diamètre D de la conduite n'est pas un paramètre donné du problème.

Selon les relations les relations (2.44) et (2.46), nous pouvons écrire que :

$$R = (16f)^{-1/5} \bar{R}$$

ou bien :

$$f = \frac{1}{16} \left(\frac{\bar{R}}{R} \right)^{-5} \quad (2.59)$$

En remplaçant, dans la relation (2.59), le nombre de *Reynolds* R par l'expression (2.58), nous pouvons déduire que :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} \bar{R}} \right) \right]^{-2} \quad (2.60)$$

La relation (2.60) donne, de façon explicite, la valeur pratiquement exacte du coefficient de frottement f , pour les valeurs connues de Q, J, ε et ν . Les paramètres \bar{D}, \bar{R} et ψ sont calculés suivant les mêmes étapes que celles indiquées dans l'exemple d'application 2.7.

Exemple d'application 2.8.

Reprenons les données de l'exemple 2.7 qui sont, en l'absence du diamètre D de la conduite :

$$Q = 0,136 \text{ m}^3 / \text{s}; J = 10^{-3} \text{ m}; \varepsilon = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}; \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

Quelle est la valeur du coefficient de frottement f ?

- i. Le calcul du diamètre \bar{D} , du nombre de *Reynolds* \bar{R} , de la rugosité relative ε / \bar{D} et du facteur de correction des diamètres ψ a déjà été effectué et a donné les résultats suivants :

$$\bullet \quad \bar{D} = (2\pi^2)^{-1/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} = (2\pi^2)^{-1/5} \times \left(\frac{0,136^2}{9,81 \times 10^{-3}} \right)^{1/5} \cong 0,6252 \text{ m}$$

- $\bar{R} = \frac{4Q}{\pi D v} = \frac{4 \times 0,136}{\pi \times 0,6252 \times 10^{-6}} \cong 276970$
- $\varepsilon / \bar{D} = 5.10^{-4} / 0,6252 \cong 8.10^{-4}$
- $\psi \cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{8.10^{-4}}{4,75} + \frac{8,5}{276970} \right) \right]^{-2/5} = 0,7998 \cong 0,8$

ii. Le coefficient de frottement f est, selon la relation (2.60) :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} \bar{R}} \right) \right]^{-2} = \left[-2 \times \log \left(\frac{8.10^{-4}}{3,7 \times 0,8} + \frac{10,04}{0,8^{3/2} \times 276970} \right) \right]^{-2} \cong 0,02048$$

iii. Cette étape vise à vérifier la valeur précédemment calculée du coefficient de frottement f . Pour cela, nous allons faire appel à la relation (1.33) de *Darcy-Weisbach* qui requiert cependant la valeur du diamètre D de la conduite.

Partant des valeurs connues de la rugosité relative ε / \bar{D} et du nombre de *Reynolds* \bar{R} , un procédé itératif, appliqué à la relation (2.47), a donné pour le coefficient de correction des diamètres ψ , la valeur exacte :

$$\psi = 0,80023$$

Cette valeur est quasiment égale à celle approchée que nous avons évaluée en application de la relation (2.50).

Ainsi, le diamètre D de la conduite est, selon la relation (2.43) :

$$D = \psi \bar{D} = 0,80023 \times 0,6252 = 0,5003 \text{ m} \cong 0,5 \text{ m}$$

La relation (1.33) de *Darcy-Weisbach* permet d'écrire que :

$$f = \frac{\pi^2 g J D^5}{8 Q^2} = \frac{\pi^2 9,81 \times 10^{-3} \times 0,5^5}{8 \times 0,136^2} = 0,020448$$

Par conséquent, en comparant la valeur approchée du coefficient de frottement f de l'étape ii et la valeur exacte que nous venons de calculer, l'écart relatif n'est que de :

$$\frac{\Delta f}{f} = 100 \times \frac{0,02048 - 0,020448}{0,02048} = 0,156 \% \cong 0,16 \%$$

Exemple d'application 2.9.

Une conduite lisse circulaire sous pression écoule un débit volume $Q = 1,615 \text{ m}^3 / \text{s}$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$, sous un gradient de la perte de charge $J = 10^{-4}$. Quelle est la valeur du coefficient de frottement f ?

i. Le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.39) :

$$\bar{D} = (2\pi^2)^{-1/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} = (2\pi^2)^{-1/5} \times \left(\frac{1,615^2}{9,81 \times 10^{-4}} \right)^{1/5} \cong 2,666 \text{ m}$$

- ii. Le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, en vertu de la relation (2.41) :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\pi \bar{D} \nu} = \frac{4 \times 1,615}{\pi \times 2,666 \times 10^{-6}} = 771298,5$$

- iii. La rugosité relative ε / \bar{D} est :

$$\varepsilon / \bar{D} = 0, \text{ car la conduite est supposée être lisse.}$$

- iv. La valeur approchée du facteur de correction des diamètres ψ est, selon la relation (2.50) :

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{0}{4,75} + \frac{8,5}{771298,5} \right) \right]^{-2/5} = 0,71157$$

La valeur exacte de ψ , obtenue par un procédé itératif appliqué à la relation (2.47), est :

$$\psi = 0,71265$$

Ainsi, l'écart relatif entre les valeurs approchée et exacte de ψ n'est que de :

$$\frac{\Delta\psi}{\psi} = 100 \times \frac{0,71265 - 0,71157}{0,71265} \cong 0,15\%$$

- v. La valeur recherchée du coefficient de frottement f est, selon la relation (2.60) :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} \bar{R}} \right) \right]^{-2} = \left[-2 \times \log \left(\frac{0}{3,7 \times 0,71157} + \frac{10,04}{0,71157^{3/2} \times 771298,5} \right) \right]^{-2} = 0,011493$$

Cette valeur de f a été calculée en s'appuyant sur la valeur approchée de ψ .

La valeur exacte de f peut être obtenue par application de la relation (2.44), en y insérant la valeur exacte de ψ calculée à l'étape iv, soit :

$$f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0,71265^5}{16} = 0,011488$$

Nous pouvons ainsi observer que l'écart relatif sur f n'est que de :

$$\frac{\Delta f}{f} = 100 \times \frac{0,011493 - 0,011488}{0,011493} \cong 0,043\%$$

II.3.2.3. Expression du diamètre

Il s'agit d'établir la relation qui permet de déterminer de manière explicite le diamètre D d'une conduite circulaire sous pression, à partir des valeurs connues du débit volume Q qu'elle écoule, de la rugosité absolue ε caractérisant ses parois, du gradient J de la perte de charge et de la viscosité cinématique ν du liquide écoulé.

En fait, deux expressions de ce diamètre peuvent être proposées. La première peut être déduite de la combinaison des relations (2.43) et (2.50), après avoir éliminé le facteur de correction des diamètres ψ , soit :

$$D = 1,35 \bar{D} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.61)$$

La relation (2.61) est applicable dans tout le domaine de l'écoulement turbulent, soit pour $R > 2300$ et pour $0 \leq \varepsilon / \bar{D} \leq 0,05$. Elle occasionne un écart relatif maximal de 0,5% sur le calcul du diamètre D , ce qui est largement satisfaisant pour la plupart des cas pratiques.

Le diamètre \bar{D} et le nombre de Reynolds \bar{R} sont respectivement donnés par les relations (2.39) et (2.41). Il est utile de rappeler que \bar{R} peut être également évalué par application de la relation (2.40).

La seconde relation, permettant d'évaluer de manière explicite le diamètre D de la conduite, peut être déduite des relations (1.33) et (2.60), après avoir éliminé le coefficient de frottement f , soit :

$$D = (2 / \pi^2)^{1/5} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} \bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \quad (2.62)$$

La relation (2.62) est applicable dans tout le domaine de l'écoulement turbulent, correspondant à $R > 2300$ et pour $0 \leq \varepsilon / \bar{D} \leq 0,05$. Elle est de meilleure précision que la relation (2.61), bien que celle-ci soit largement suffisante.

Exemple d'application 2.10.

Une conduite circulaire sous pression, de rugosité absolue $\varepsilon = 10^{-3} \text{ m}$, écoule un débit volume $Q = 0,55 \text{ m}^3 / \text{s}$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$, sous un gradient de la perte de charge $J = 5.10^{-4}$. Quelle est la valeur du diamètre D de la conduite ? Si la conduite était lisse, quel serait son diamètre D ?

- i. Le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est donné par la relation (2.39), soit :

$$\bar{D} = (2\pi^2)^{-1/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} = (2\pi^2)^{-1/5} \times \left(\frac{0,55^2}{9,81 \times 5.10^{-4}} \right)^{1/5} \cong 1,2558892 \text{ m}$$

ii. Le nombre de Reynolds \bar{R} est, selon la relation (2.41) :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\pi \bar{D} \nu} = \frac{4 \times 0,55}{\pi \times 1,2558892 \times 10^{-6}} = 557598,35$$

iii. La rugosité relative ε/\bar{D} est :

$$\varepsilon/\bar{D} = 10^{-3} / 1,2558892 = 7,9625.10^{-4}$$

iv. Le diamètre recherché D de la conduite est alors donné par la relation (2.61) :

$$D = 1,35 \bar{D} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5}$$

soit :

$$D = 1,35 \times 1,2558892 \times \left[-\log \left(\frac{7,9625.10^{-4}}{4,75} + \frac{8,5}{557598,35} \right) \right]^{-2/5} = 1 \text{ m}$$

v. Calculons, au cours de cette étape, le diamètre D de la conduite par application de la relation (2.62). Celle-ci est plus précise la relation (2.61), mais elle nécessite la valeur du facteur de correction des diamètres ψ . Celui-ci peut être évalué par la relation (2.50), soit :

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{7,9625.10^{-4}}{4,75} + \frac{8,5}{557598,35} \right) \right]^{-2/5} = 0,796646$$

Ainsi, selon la relation (2.62), le diamètre D de la conduite serait égal à :

$$D = (2/\pi^2)^{1/5} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} \bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5}$$

soit :

$$D = (2/\pi^2)^{1/5} \times \left[-\log \left(\frac{7,9625.10^{-4}}{3,7 \times 0,796646} + \frac{10,04}{0,796646^{3/2} \times 557598,35} \right) \right]^{-2/5} \times \left(\frac{0,55^2}{9,81 \times 5.10^{-4}} \right)^{1/5} = 1 \text{ m}$$

Pour l'exemple d'application considéré, les relations (2.61) et (2.62) donnent finalement le même résultat.

vi. Si la conduite était lisse, alors nous pouvons écrire que $\varepsilon/\bar{D} = 0$, le diamètre \bar{D} et le nombre de Reynolds \bar{R} restant inchangés :

$$\bar{D} = 1,2558892 \text{ m} ; \bar{R} = 557598,35$$

Pour $\varepsilon/\bar{D} = 0$, la relation (2.61) devient :

$$D = 1,35 \bar{D} \left[-\log\left(\frac{8,5}{R}\right) \right]^{-2/5}$$

soit :

$$D = 1,35 \times 1,2558892 \times \left[-\log\left(\frac{8,5}{557598,35}\right) \right]^{-2/5} = 0,904 \text{ m}$$

Si l'on souhaitait calculer une valeur plus précise du diamètre D , elle serait alors donnée par la relation (2.62) qui s'écrit pour $\varepsilon/\bar{D} = 0$:

$$D = (2/\pi^2)^{1/5} \left[-\log\left(\frac{10,04}{\psi^{3/2} R}\right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ}\right)^{1/5}$$

Le facteur de corrections des diamètres ψ est, selon la relation (2.50) pour $\varepsilon/\bar{D} = 0$:

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log\left(\frac{8,5}{R}\right) \right]^{-2/5} = 1,35 \times \left[-\log\left(\frac{8,5}{557598,35}\right) \right]^{-2/5} = 0,71982$$

Le diamètre D de la conduite est donc :

$$D = (2/\pi^2)^{1/5} \times \left[-\log\left(\frac{10,04}{0,71982^{3/2} \times 557598,35}\right) \right]^{-2/5} \times \left(\frac{0,55^2}{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4}}\right)^{1/5} = 0,90554 \text{ m}$$

vii. La valeur exacte du facteur de correction des diamètres, obtenue par un procédé itératif appliqué à la relation implicite (2.48) est :

$$\psi \cong 0,720969$$

La valeur exacte du diamètre D de la conduite est donc, en vertu de la relation (2.43) :

$$D = \psi \bar{D} = 0,720969 \times 1,2558892 = 0,905457 \text{ m}$$

Nous constatons bien que la relation (2.62) est d'une précision remarquable, puisque l'écart relatif qu'elle occasionne sur le calcul du diamètre D n'est que de :

$$\frac{\Delta D}{D} = 100 \times \frac{0,90554 - 0,905457}{0,90554} = 0,0091 \%$$

Mais, la précision obtenue par application de la relation (2.61) est aussi largement suffisante puisque l'écart relatif sur le diamètre D n'est que de :

$$\frac{\Delta D}{D} = 100 \times \frac{0,905457 - 0,904}{0,905457} = 0,16 \%$$

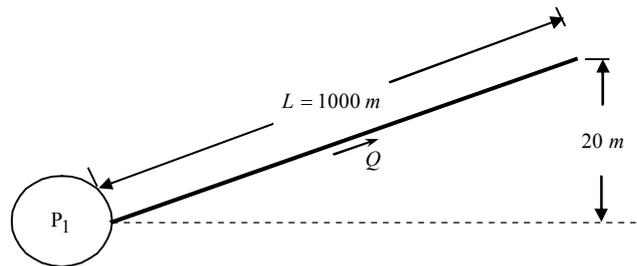
Exemple d'application 2.11.

La pression à la sortie de la station de pompage, schématisée sur la figure ci-dessous, est $P_1 = 5 \text{ bars}$. De l'eau, de masse volumique $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ et de débit volume $Q = 400 \text{ m}^3/\text{heure}$, doit être acheminée à travers une conduite

circulaire rectiligne de diamètre interne D et de rugosité absolue $\varepsilon = 10^{-4} m$, sur une longueur $L = 1000 m$ et sur une hauteur de $20 m$. L'accélération de la pesanteur est délibérément prise égale à $g = 10 m/s^2$.

Parmi les diamètres commerciaux ci-dessous indiqués, quel est le plus petit diamètre D pouvant répondre aux conditions du problème ?

Diamètres commerciaux (en millimètres)
60 – 80 – 100 – 125 – 150 – 200 – 250 – 300



i. En mètres de colonne d'eau, la pression $P_1 = 5 bars$ est environ :

$$P_1 = 50 \text{ mètres de colonne d'eau}$$

Ces 50 mètres de colonne d'eau vont servir à vaincre les 20 mètres de hauteur d'élévation ainsi que les pertes de charge linéaires Δh . Celles-ci sont donc égales à :

$$\Delta h = 50 - 20 = 30 \text{ mètres de colonne d'eau}$$

ii. Le gradient de la perte de charge J est par suite :

$$J = \frac{\Delta h}{L} = \frac{30}{1000} = 3.10^{-2}$$

iii. Le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.39) :

$$\bar{D} = (2\pi^2)^{-1/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} = (2\pi^2)^{-1/5} \times \left[\frac{(400/3600)^2}{10 \times 3.10^{-2}} \right]^{1/5} \cong 0,291 m$$

iv. Le nombre de Reynolds \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.41) :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\pi \bar{D} v} = \frac{4 \times (400/3600)}{\pi \times 0,291 \times 10^{-6}} = 486155$$

v. La rugosité relative ε/\bar{D} est :

$$\varepsilon/\bar{D} = \frac{10^{-4}}{0,291} \cong 3,4364.10^{-4}$$

vi. Le diamètre D de la conduite est, en vertu de la relation (2.61) :

$$D = 1,35 \bar{D} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{R} \right) \right]^{-2/5}$$

soit :

$$D = 1,35 \times 0,291 \times \left[-\log \left(\frac{3,4364 \cdot 10^{-4}}{4,75} + \frac{8,5}{486155} \right) \right]^{-2/5} = 0,2246 \text{ m}$$

vii. Si l'on souhaitait obtenir une valeur encore plus précise du diamètre D , elle peut être calculée par application de la relation (2.62) :

$$D = (2 / \pi^2)^{1/5} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} R} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5}$$

Le facteur de correction des diamètres ψ est donné par la relation (2.50), soit :

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{R} \right) \right]^{-2/5} = 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{3,4364 \cdot 10^{-4}}{4,75} + \frac{8,5}{486155} \right) \right]^{-2/5} = 0,77179$$

Le diamètre D est par suite :

$$D = (2 / \pi^2)^{1/5} \times \left[-\log \left(\frac{3,4364 \cdot 10^{-4}}{3,7 \times 0,77179} + \frac{10,04}{0,77179^{3/2} 486155} \right) \right]^{-2/5} \left[\frac{(400 / 3600)^2}{9,81 \times 0,03} \right]^{1/5} = 0,22542 \text{ m}$$

viii. Le diamètre D ainsi calculé ne figure pas dans le tableau des diamètres commerciaux. Il se situe entre les diamètres commerciaux 200 mm et 250 mm. Il faut donc considérer le diamètre qui lui est directement supérieur, soit :

$$D = 250 \text{ mm} = 0,250 \text{ m}$$

II.3.3. Le gradient J de la perte de charge est inconnu

II.3.3.1. Expression du coefficient de frottement

Il s'agit de proposer une relation explicite au calcul du coefficient de frottement f dans le cas où le gradient de la perte de charge J est le paramètre inconnu du problème. Les variables connues sont le débit volume Q , le diamètre D de la conduite, la rugosité absolue ε et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement.

En l'absence de la valeur du gradient de la perte de charge J , la relation (1.33) de *Darcy-Weisbach* n'est d'aucune utilité pour l'évaluation du coefficient de frottement f .

Puisque Q , D , ε et ν sont les données du problème, alors la rugosité relative ε / D et le nombre de *Reynolds* R le sont aussi. Celui-ci est aisément déterminé par application de la relation (1.36).

Dans cette partie, nous assumons $Q \neq \bar{Q}$ et $D = \bar{D}$. Ceci implique bien évidemment que $J \neq \bar{J}$ et $R \neq \bar{R}$.

En outre, étant donné que $Q \neq \bar{Q}$ et $D = \bar{D}$ le coefficient de frottement est donc régi par la relation (2.29) où le nombre de Reynolds \bar{R} est gouverné par la relation (2.26).

Pour les valeurs données de ε/D et de R , la relation (2.26) permet le calcul du nombre de Reynolds \bar{R} , à condition d'utiliser un procédé itératif ou graphique.

L'étude de la relation (2.26) a montré qu'elle peut être remplacée, avec une excellente approximation, par la relation :

$$\bar{R} = 2R \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{5,5}{R^{0,9}} \right) \right]^{-1} \quad (2.63)$$

Ainsi, la relation (2.63) permet d'évaluer de manière explicite le nombre de Reynolds \bar{R} , pour les valeurs données de ε/D et de R . Par suite, le coefficient de frottement est aisément déterminé par application de la relation (2.29).

Exemple d'application 2.12.

Un écoulement, se produisant dans une conduite circulaire sous pression de rugosité relative $\varepsilon/D = 2.10^{-4}$, est caractérisé par un nombre de Reynolds $R = 5.10^5$. Quelle est la valeur du coefficient de frottement f ?

- i. Ce problème peut être résolu par la méthode classique qui consiste à évaluer, par un procédé itératif appliqué à la relation implicite (1.35) de *Colebrook-White* ou par voie graphique sur le diagramme de *Moody* représenté par la figure 1.2, la valeur demandée du coefficient de frottement f pour les valeurs données de ε/D et de R .

Pour $\varepsilon/D = 2.10^{-4}$ et $R = 5.10^5$, la relation (1.35) de *Colebrook-White* donne la valeur :

$$f = 0,0154335$$

- ii. Résolvons le problème par la méthode que nous préconisons. A partir des valeurs $\varepsilon/D = 2.10^{-4}$ et $R = 5.10^5$, la relation (2.63) donne la valeur du nombre de Reynolds \bar{R} , soit :

$$\bar{R} = 2R \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{5,5}{R^{0,9}} \right) \right]^{-1} = 2 \times 5.10^5 \times \left[-\log \left(\frac{2.10^{-4}}{3,7} + \frac{5,5}{(5.10^5)^{0,9}} \right) \right]^{-1} = 248591$$

- iii. En insérant les valeurs $\varepsilon/D = 2.10^{-4}$ et $\bar{R} = 248591$ dans la relation (2.29), la valeur recherchée du coefficient de frottement f est :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{R} \right) \right]^{-2} = \left[-2 \times \log \left(\frac{2 \cdot 10^{-4}}{3,7} + \frac{10,04}{248591} \right) \right]^{-2} = 0,015433$$

Nous pouvons ainsi observer que la méthode explicite que nous préconisons donne le même résultat que celui issu de la relation implicite de *Colebrook-White*, tout au moins pour l'exemple d'application que nous avons considéré.

Afin de mieux apprécier la fiabilité de la relation (2.29) lorsqu'elle est utilisée simultanément avec la relation (2.63) pour l'évaluation du coefficient de frottement f , nous l'avons comparée à la relation implicite (1.35) de *Colebrook-White*. Les écarts relatifs sur le coefficient de frottement f sont alors représentés sur la figure (2.5), en fonction du nombre de *Reynolds* R et pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D .

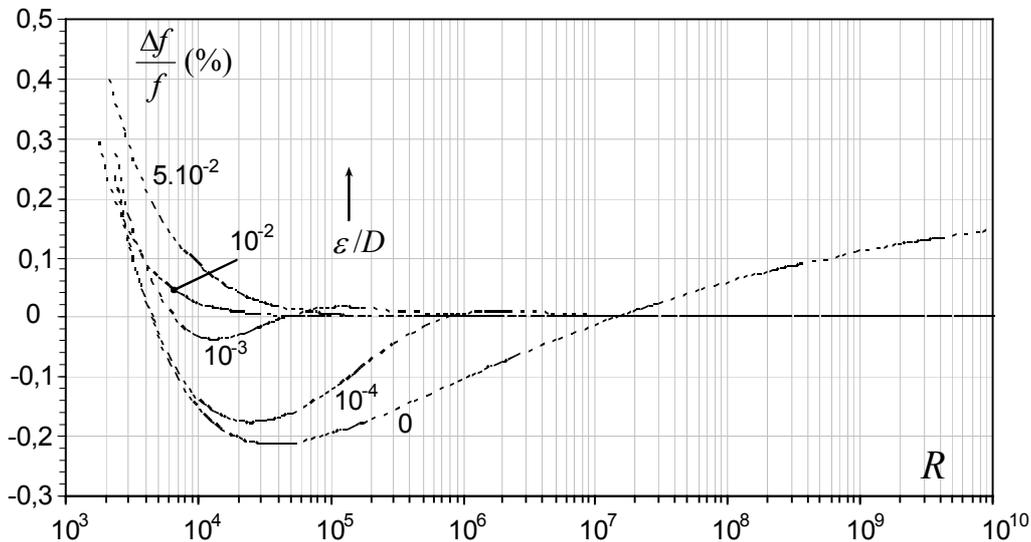


Figure 2.5 : Comparaison entre la relation de *Colebrook-White* et la relation (2.29), en fonction du nombre de *Reynolds* R et pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D

La figure 2.5 montre clairement que les écarts relatifs sur le coefficient de frottement f dépendent à la fois du nombre de *Reynolds* R et de la rugosité relative ε/D , tout en restant inférieurs à 0,4% dans la large gamme $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$ et pour $R > 2300$. Cet écart se réduit de moitié, soit 0,2%, pour $R \geq 4000$ et dans toute la large gamme $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$.

Nous pouvons donc confirmer la fiabilité de la relation (2.29) dans l'évaluation du coefficient de frottement f et pour laquelle le nombre de *Reynolds* \bar{R} est donné par la relation (2.63).

Exemple d'application 2.13.

Une conduite lisse circulaire sous pression, de diamètre $D = 1,5 \text{ m}$, écoule un débit volume $Q = 3,527 \text{ m}^3 / \text{s}$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ sous un gradient de la perte de charge $J = 10^{-2}$. Quelle est la valeur du coefficient de frottement f ?

- i. Le nombre de *Reynolds* R caractérisant l'écoulement est, en vertu de la relation (1.36) :

$$R = \frac{4Q}{\pi D \nu} = \frac{4 \times 3,527}{\pi \times 1,5 \times 10^{-6}} = 2993810,6$$

- ii. La conduite étant lisse, la rugosité relative ε / D est :

$$\varepsilon / D = 0$$

- iii. En application de la relation (2.63) pour $\varepsilon / D = 0$, le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est :

$$\bar{R} = 2R \left[-\log \left(\frac{5,5}{R^{0,9}} \right) \right]^{-1} = 2 \times 2993810,6 \times \left[-\log \left(\frac{5,5}{2993810,6^{0,9}} \right) \right]^{-1} = 1176757$$

- iv. La valeur recherchée du coefficient de frottement f est, selon la relation (2.29) pour $\varepsilon / D = 0$:

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{10,04}{\bar{R}} \right) \right]^{-2} = \left[-2 \times \log \left(\frac{10,04}{1176757} \right) \right]^{-2} = 0,0097298$$

- v. Par un procédé itératif, la relation implicite (1.37) donne pour f , la valeur :

$$f = 0,00972396$$

Ainsi, l'écart relatif entre les valeurs calculées de f aux étapes iv et v n'est que de :

$$\frac{\Delta f}{f} = 100 \times \frac{0,0097298 - 0,00972396}{0,0097298} = 0,06 \%$$

II.3.3.2. Expression du gradient J de la perte de charge

Pour les valeurs connues du débit volume Q , du diamètre D de la conduite, de la rugosité absolue ε et de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement, il est possible d'évaluer de manière explicite le gradient J de la perte de charge.

En éliminant le coefficient de frottement f entre les relations (1.33) et (2.29), le gradient J de la perte de charge s'exprime par :

$$J = \frac{2Q^2}{g\pi^2 D^5} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \right]^{-2} \quad (2.64)$$

Rappelons que le nombre de *Reynolds* \bar{R} est donné par la relation (2.63). La relation (2.64) est applicable dans tout le domaine de l'écoulement turbulent correspondant à $R > 2300$ et couvre la large gamme $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$. Elle occasionne une erreur relative maximale de 0,4%, qui se réduit à 0,2% pour les valeurs du nombre de *Reynolds* $R \geq 4000$.

Pour les valeurs données de Q , D , ε et ν , les étapes suivantes indiquent la voie à suivre pour l'évaluation du gradient J de la perte de charge :

- i. Avec les valeurs de Q , D et ν , la relation (1.36) permet le calcul du nombre de *Reynolds* R .
- ii. Les valeurs données de ε et de D permettent le calcul aisé de la rugosité relative ε/D .
- iii. Les valeurs ainsi calculées de ε/D et de R sont insérées dans la relation (2.63) pour la détermination du nombre de *Reynolds* \bar{R} .
- iv. Finalement, les valeurs de Q , D , ε/D et \bar{R} sont introduites dans la relation (2.64) qui permet ainsi de calculer la valeur recherchée du gradient J de la perte de charge.

Exemple d'application 2.14.

Une conduite circulaire sous pression de diamètre $D = 1,25 \text{ m}$, de rugosité absolue $\varepsilon = 5.10^{-4} \text{ m}$, écoule un débit volume $Q = 1,506 \text{ m}^3/\text{s}$ d'eau de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Quelle est la valeur du gradient J de la perte de charge ?

- i. Le nombre de *Reynolds* R caractérisant l'écoulement est, selon la relation (1.36) :

$$R = \frac{4Q}{\pi D \nu} = \frac{4 \times 1,506}{\pi \times 1,25 \times 10^{-6}} = 1533999$$

- ii. La rugosité relative est $\varepsilon/D = 5.10^{-4}/1,25 = 4.10^{-4}$
- iii. Selon la relation (2.63), le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est :

$$\bar{R} = 2R \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{5,5}{R^{0,9}} \right) \right]^{-1} = 2 \times 1533999 \times \left[-\log \left(\frac{4.10^{-4}}{3,7} + \frac{5,5}{1533999^{0,9}} \right) \right]^{-1} = 784639,32$$

- iv. La valeur recherchée du gradient J de la perte de charge est donc, en vertu de la relation (2.64) :

$$J = \frac{2Q^2}{g\pi^2 D^5} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \right]^{-2} = \frac{2 \times 1,506^2}{9,81 \times \pi^2 \times 1,25^5} \left[-\log \left(\frac{4.10^{-4}}{3,7} + \frac{10,04}{784639,32} \right) \right]^{-2} = 10^{-3}$$

- v. Cette étape vise à vérifier la valeur de J calculée à l'étape iv, par application de la relation (1.33) de *Darcy-Weisbach*. Celle-ci requiert la valeur du coefficient de frottement que nous déterminons par un procédé itératif appliqué à la relation (1.35)

de *Colebrook-White*. Pour les valeurs de $\varepsilon/D = 4.10^{-4}$ et de $R = 1533999$, le calcul indique pour f la valeur :

$$f = 0,016290258$$

Ainsi, la relation (1.33) mène à :

$$J = \frac{8f}{g\pi^2} \frac{Q^2}{D^5} = \frac{8 \times 0,016290258}{9,81 \times \pi^2} \times \frac{1,506^2}{1,25^5} = 10^{-3}$$

La relation (1.33) de *Darcy-Weisbach* conduit donc au même résultat que celui obtenu à l'étape *iv* par application de la relation (2.64).

Exemple d'application 2.15.

Reprenons l'exemple d'application 2.10, pour lequel le gradient J est maintenant le paramètre à rechercher. Les données du problème sont :

$$Q = 400 \text{ m}^3 / \text{heure}, D = 0,22542 \text{ m}; \varepsilon = 10^{-4} \text{ m}; \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}.$$

i. Le nombre de *Reynolds* R caractérisant l'écoulement est, selon la relation (1.36) :

$$R = \frac{4Q}{\pi D \nu} = \frac{4 \times (400/3600)}{\pi \times 0,22542 \times 10^{-6}} = 627588,8$$

ii. La rugosité relative est $\varepsilon/D = 10^{-4}/0,22542 = 4,43616.10^{-4}$

iii. Le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, en vertu de la relation (2.63) :

$$\bar{R} = 2R \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{5,5}{R^{0,9}} \right) \right]^{-1} = 2 \times 627588,8 \times \left[-\log \left(\frac{4,43616.10^{-4}}{3,7} + \frac{5,5}{627588,8^{0,9}} \right) \right]^{-1} = 329032,76$$

vi. La valeur recherchée du gradient J de la perte de charge est donc, selon la relation (2.64) :

$$J = \frac{2Q^2}{g\pi^2 D^5} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \right]^{-2}$$

$$= \frac{2 \times (400/3600)^2}{9,81 \times \pi^2 \times 0,22542^5} \left[-\log \left(\frac{4,43616.10^{-4}}{3,7} + \frac{10,04}{329032,76} \right) \right]^{-2} = 0,02998 \cong 3.10^{-3}$$

Il s'agit bien de la valeur de J déterminée dans l'exemple d'application 2.10.

II.4. Conclusion

Le chapitre précédent a eu pour objectif principal de proposer une nouvelle approche au calcul de l'écoulement turbulent dans une conduite circulaire sous pression. Cette approche est basée sur un modèle rugueux de référence, caractérisé par une rugosité relative arbitrairement choisie égale à $\bar{\varepsilon}/\bar{D}=0,037$. Le régime d'écoulement est ou supposé être turbulent rugueux de sorte que le coefficient de frottement soit égal à $\bar{f}=1/16$ en vertu de la relation (1.38).

En appliquant la relation (1.33) de *Darcy-Weisbach*, il a été alors possible d'exprimer les caractéristiques de l'écoulement dans le modèle de référence, en particulier le gradient de la perte de charge \bar{J} , le diamètre \bar{D} et le nombre de *Reynolds* \bar{R} . Ces paramètres sont donnés par les relations (2.4) à (2.11).

Les trois paramètres présentant un intérêt pratique, à savoir le débit volume $Q(D, J, \varepsilon, \nu)$, le diamètre $D(Q, J, \varepsilon, \nu)$ de la conduite et le gradient de la perte de charge $J(Q, D, \varepsilon, \nu)$ ont été alors calculés conformément aux étapes suivantes :

- i. Le calcul du débit $Q(D, J, \varepsilon, \nu)$ est mené en assumant que :

$$Q \neq \bar{Q}, D = \bar{D}, J = \bar{J}$$

Le nombre de *Reynolds* \bar{R} a été alors bien défini par l'équation (2.15) et le débit Q est déduit de la relation (2.35) qui est la solution exacte de la relation implicite (1.35) de *Colebrook-White*.

Le débit Q peut être également obtenu après avoir évalué le coefficient de frottement $f(\varepsilon/D, \bar{R})$ en application de la relation (2.29), et après avoir introduit le résultat dans l'équation (1.33) de *Darcy-Weisbach*.

- ii. Le calcul du diamètre $D(Q, J, \varepsilon, \nu)$ est mené en assumant que :

$$Q = \bar{Q}, D \neq \bar{D}, J = \bar{J}$$

Le diamètre \bar{D} et le nombre de *Reynolds* \bar{R} ont été déterminés en application des relations (2.39) et (2.41) respectivement. Ainsi, le diamètre D a été calculé par la relation (2.61) qui est d'une formulation simple et qui occasionne seulement 0,5% d'erreur relative. Pour obtenir une valeur plus exacte du diamètre D , la relation (2.62) pourrait être utilisée après avoir évalué le facteur de correction des diamètres $\psi(\varepsilon/\bar{D}, \bar{R})$ par application de la relation (2.50).

iii. Le calcul du gradient de la perte de charge $J(Q, D, \varepsilon, \nu)$ est mené en assumant que :

$$Q \neq \bar{Q}, D = \bar{D}, J = \bar{J}$$

Le nombre de *Reynolds* \bar{R} a été alors bien défini par la relation (2.63) pour les valeurs connues de la rugosité relative ε/D et du nombre de *Reynolds* R . Ainsi, la relation (2.64) permet un calcul aussi aisé que précis de la valeur requise du gradient J de la perte de charge.

CONCLUSION GENERALE

Notre travail a porté sur le calcul de l'écoulement turbulent dans les conduites sous pression de forme circulaire.

Nous avons subdivisé notre mémoire en deux grands chapitres dont le premier s'est voulu être une synthèse des connaissances sur l'écoulement turbulent en conduite circulaire sous pression, tandis que le second chapitre a tenté de présenter aussi clairement que possible notre modeste contribution.

Au cours du premier chapitre, notre attention a porté plus particulièrement sur la définition des paramètres régissant l'écoulement turbulent, notamment le gradient de la perte de charge et le coefficient de frottement. Nous avons rappelé le rôle fondamental que jouent les relations de *Darcy-Weisbach*, de *Colebrook-White* et du nombre de *Reynolds* qui forment le système d'équations de base régissant l'écoulement turbulent en conduite circulaire sous pression.

En raison de la forme implicite des équations, nous avons présenté les approches explicites utilisées de nos jours, en particulier les approches de *Swamee* et *Jain* et de *Hager*. Ces approches ont été longuement commentées, leurs avantages et leurs inconvénients majeurs ont été également indiqués.

Le second chapitre de notre mémoire a été entièrement consacré à notre approche, relative au calcul de l'écoulement turbulent en conduite sous pression.

Nous nous sommes particulièrement intéressés à la détermination de trois paramètres fondamentaux qui sont le débit volume Q écoulé par la conduite, le diamètre D de celle-ci et le gradient J de la perte de charge.

L'objectif principal de notre étude a été d'établir les relations permettant le calcul explicite de chacun des paramètres fondamentaux ci-dessus indiqués. En outre, le coefficient de frottement a été étudié de manière particulière étant donnée son importance dans le calcul.

Pour atteindre cet objectif, nous avons eu recours à un modèle rugueux de référence de forme circulaire et de diamètre \bar{D} , dont la rugosité relative a été arbitrairement fixée. Grâce à l'application simultanée des relations de *Darcy-Weisbach* et de *Colebrook-White*, les caractéristiques de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence ont été alors bien définies. C'est le cas en particulier du diamètre \bar{D} , sous l'hypothèse que le modèle rugueux de référence écoule le même débit que la conduite considérée et sous le même gradient J de la perte de charge.

Des exemples d'applications pratiques ont été proposés et ont montré la facilité qu'offre la méthode préconisée dans le calcul de l'écoulement turbulent en conduite, pour tous les régimes d'écoulement.

LISTE DES FIGURES

Figure	Titre	Page
1.1	Schéma de définition de l'écoulement dans une conduite circulaire en charge (<i>Cauvin et Guerrée, 1978</i>)	5
1.2	Diagramme universel de <i>Moody</i> (1944). (—) Courbes $f(R)$ pour diverses valeurs de ε/D . (- - -) Courbe au-delà de laquelle f peut être considéré comme étant constant pour la valeur donnée de ε/D .	16
1.3	Comparaison entre les relations de <i>Colebrook-White</i> (1.35) et de <i>Swamee et Jain</i> (1.48) pour quelques valeurs de la rugosité relative ε/D	18
1.4	Comparaison entre les relations de <i>Colebrook-White</i> (1.35) et de <i>Achour et al.</i> (1.50) pour quelques valeurs de la rugosité relative ε/D	20
1.5	Variation de $D^*(\nu^*)$ pour diverses valeurs de ε^* selon la relation (1.63). (--●--) courbe limitant la zone correspondant à $D^* = \text{constante}$.	25
1.6	Variation de $q(N)$ selon la relation (1.71) pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D . (—) Courbe $q(N)$ correspondant à 1,5% d'écart par rapport au régime d'écoulement turbulent rugueux. (—●—) Courbe $q(N)$ correspondant à 1,5% d'écart par rapport au régime d'écoulement lisse.	29
1.7	Comparaison entre les relations (1.64) et (1.83) pour $10^{-9} < \nu^* < 10^{-3}$	36
1.8	Variation $D^*(\varepsilon^*)$ selon la relation (1.91)	40
1.9	Comparaison entre la relation exacte (1.91) et celle approchée (1.92) de <i>Hager</i> (1987) dans l'intervalle $10^{-8} < \varepsilon/D < 7.10^{-4}$	41
1.10	Comparaison entre la relation exacte (1.91) et celle approchée (1.93) de <i>Hager</i> (1987) dans l'intervalle $7.10^{-4} < \varepsilon/D < 7.10^{-2}$	41

LISTE DES FIGURES (Suite)

Figure	Titre	Page
1.11	Variation de $D^*(\nu^*)$ pour diverses valeurs de la rugosité relative ε^* . (—●—) Courbe limite entre les domaines des régimes d'écoulement turbulent rugueux et de transition, tracée selon le tableau 1.4.	43
2.1	Variation du facteur de correction des débits ψ_Q en fonction du nombre de Reynolds \bar{R} , pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D . (—) Courbe limite pratique entre les domaines de transition et turbulent rugueux	57
2.2	Variation de $R(\bar{R})$ selon la relation (2.26), pour les valeurs extrêmes $\varepsilon/D = 0$ et $\varepsilon/D = 0,05$ de la rugosité relative.	59
2.3	Variation de $\psi(\bar{R})$ selon la relation (2.47) pour diverses valeurs de ε/\bar{D}	70
2.4	Ecart relatif $(\Delta\psi)/\psi$ entre les valeurs exacte et approchée de ψ , calculé selon les relations (2.47) et (2.50) en fonction de \bar{R} et ε/\bar{D}	71
2.5	Comparaison entre la relation de <i>Colebrook-White</i> et la relation (2.29), en fonction du nombre de Reynolds R et pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D	84

LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Titre	Page
1.1	Valeurs de N et q calculées selon les relations (1.71) et (1.75).	30
1.2	Valeurs de q et ε/D calculées selon les relations (1.71) et (1.79) pour N donné.	31
1.3	Valeurs de D^* en fonction de ε^* , selon la relation (1.91)	40
1.4	Valeurs de D^* et ν^* pour quelques valeurs de ε^* , calculées selon les relations (1.91) et (1.95)	43
2.1	Caractéristiques géométriques de la conduite rugueuse de référence et hydrauliques de l'écoulement	54
2.2	Valeurs du facteur ψ_Q et de \bar{R} calculées selon les relations (2.24) et (2.20) respectivement, pour quelques valeurs de ε/D	58

PRINCIPALES NOTATIONS UTILISEES

A	(m^2)	Aire d'une section mouillée
D	(m)	Diamètre d'une conduite circulaire
D_h	(m)	Diamètre hydraulique
ε	(m)	Rugosité absolue
F	$(-)$	Fonction
f	$(-)$	Coefficient de frottement
g	(m/s^2)	Accélération de la pesanteur
J	(m/m)	Gradient de la perte de charge linéaire
ν	(m^2/s)	Viscosité cinématique
P	(m)	Périmètre mouillé
ψ	$(-)$	Facteur de correction du diamètre
ψ_Q	$(-)$	Facteur de correction du débit volume
Q	(m^3/s)	Débit volume
R	$(-)$	Nombre de <i>Reynolds</i>
R_h	(m)	Rayon hydraulique
V	(m/s)	Vitesse moyenne d'un écoulement

Toutes les notations dotées du symbole " " se rapportent au modèle rugueux de référence.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ACHOUR, B., BEDJAOUI, A, KHATTAOUI, M., DEBABECHE, M. (2002). *Contribution au calcul des écoulements uniformes à surface libre et en charge, Larhyss/Journal*, N°2, 7-36.
- ACHOUR, B., BEDJAOUI, A. (2006). *Discussion of « Explicit Solutions for Normal Depth problem »* by Prabhata K. Swamee, Pushpa N. Rathie, *J. Hydraulic Research*, Vol.44, 5, 715-717.
- BLASIUS, H. (1913). *Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten, Forschungsheft des Vereins deutscher Ingenieure*, N° 131, Berlin.
- CAUVIN, A., GUERREE, H. (1978). *Eléments d'hydraulique*, Ed. Eyrolles, Paris.
- CHOW, V.T. (1973). *Open-Channel Hydraulics*, Ed. McGraw Hill, N.Y.
- COLEBROOK, C.F. (1939). *J. Inst. Civil Eng.*, Vol.11, 133-156.
- DAILY, J.W., HARLEMAN, D.R.F. (1973). *Fluid dynamics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 2^e Edition.
- DARCY, H. (1854). *Sur des recherches expérimentales relatives au mouvement des eaux dans les tuyaux. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, Vol.38, 1109-1121.
- GRAF, W.H, ALTINAKAR, M.S. (1995). *Hydrodynamique, Une introduction, Traité de Génie Civil*, Ed. Presses Polytechniques Romandes, Vol.14, Suisse.
- HAGER, W.H. (1987). *Computation of turbulent conduit flows, 3R-International*, Vol.26, 116-121.
- LENCASTRE, A. (1996). *Hydraulique Générale*, Ed. Eyrolles, Paris.
- MOODY, L.F. (1944). *Trans. ASME*, Vol.66, 671-684.
- SINNIGER, R.O., HAGER, W.H. (1989). *Constructions hydrauliques, Traité de Génie Civil*, Ed. Presses Polytechniques Romandes, Vol.15, Suisse.
- SWAMEE, P.K., JAIN, A.K. (1976). *Explicit equations for pipe-flow problems*, Proc. ASCE, *J. Hydraulics Division*, Vol.102, HY5.657-664.
- SWAMEE, P.K., JAIN, A.K. (1977). *Explicit equations for pipe-flow problems. J. Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol.103, HY4, 460-463.
- SWAMEE, P.K., JAIN, A.K. (1978). *Explicit equations for pipe-flow problems. J. Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol.104, HY2, 300.
- VON KÁRMÁN, T. (1930). *Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz, Proceeding of the 3d International Congress for Applied Mechanics*, Vol. I, 85-93, Stockholm.
- WEISBACH, J. (1845). *Lehrbuch der Ingenieur und Maschinenmechanik*, Brunswick, Germany.