REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED CHERIF MESSAADIA SOUK AHRAS
FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Introduction aux probabilités

Première année M/I

Proposé par
REDJEL NAJAH

Année universitaire 2017-2018

Table des matières

Introduction

Ce cours est destiné aux étudiants de première année licence en mathématiques/informatique. Il est compètement inspiré par celui donné la référence [9], vu sa simplicité pour une première lecture aux étudiants.

Chapitre 1

Notion de base et vocabulaire statistique

Chapitre 2

Représentation numérique des données

Chapitre 3

Calculs des probabilités

3.1 Analyse combinatoire

3.1.1 Arrangements

Définition 3.1.1. On appelle arrangement avec répétition de p éléments choisis parmi n éléments distincts, un p-uplet où chaque composante peut ête choisie de n façons. Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments parmi n est donné par

$$\widetilde{A}_n^p = n^p$$

***Exemple* 3.1.1.** On considère 3 éléments distincts a, b et c. Le nombre d'arrangements avec répétition de 2 éléments parmi ces 3 est

$$\widetilde{A}_3^2 = 3^2 = 9.$$

Donc les arrangements sont : $(a, a); (a, b); (a, c); (b, a); (b, b); (b, c); (c, a); (c, b); (c, c)$

Définition 3.1.2. On appelle arrangement sans répétition de p éléments choisis parmi n éléments, un p-uplet dont toute les composantes sont deux à deux distinctes. Le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments parmi n est donné par

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)......(n-p+1)$$

***Exemple* 3.1.2.** Le nombre d'arrangements sans répétition de 2 éléments parmi 3 de l'exemple 3.1.1 est

$$A_3^2 = 3 \times 2 = 6$$

Donc les arrangements sont : $(a, b); (a, c); (b, a); (b, c); (c, a); (c, c)$

3.1.2 Permutations

Définition 3.1.3. On appelle permutation avec répétition de n éléments répartis en k groupes discernables tels que $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, une disposition ordonnée de ces n éléments. Le nombre de permutations avec répétition de n éléments répartis en k groupes d'effectifs $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ est donné par

$$\widetilde{\mathcal{P}}_n = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3.......n_k}$$

***Exemple* 3.1.3.** Comme le mot "PAPA" est constitué de 4 éléments répartis en 2 groupes d'effectifs respectifs 2 et 2, alors le nombre de permutations de mots "PAPA" sans tenir compte du sens du mot est

$$\widetilde{\mathcal{P}}_4 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Les permutations sont : PAPA ; PPAA ; PAAP ; APPA ; APAP ; AAPP.

Définition 3.1.4. On appelle permutation sans répétition de n éléments distincts, un arrangement de ces n éléments n à n. Le nombre de permutation sans répétition de n éléments distincts est donné par

$$\mathcal{P}_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)(n-3)......(2)(1) = n!.$$

***Exemple* 3.1.4.** Le nombre de permutations de 3 éléments distincts a, b et c est

$$\mathcal{P}_3 = 3! = 3 \times 2 = 6.$$

Les permutations sont :$(a, b, c); (a, c, b); (b, a, c); (b, c, a); (c, a, b); (c, b, a)$.

3.1.3 Combinaisons

Définition 3.1.5. On appelle combinaison avec répétition de p éléments choisis parmi n comme un sous ensemble de cardinal p formé d'éléments choisis parmi n. Le nombre de ces combinaison est

$$\widetilde{C}_n^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} \qquad n \geq 1.$$

***Exemple* 3.1.5.** Le nombre de combinaisons avec répétition de 4 éléments a, b, c, d deux à deux est

$$\widetilde{C}_4^2 = \frac{(4+2-1)!}{2!(4-1)!} = 10$$

Donc les combinaisons sont : $\{a,a\}; \{a,b\}; \{a,c\}; \{a,d\}; \{b,b\}; \{b,c\}; \{b,d\}; \{c,c\}; \{c,d\}; \{d,d\}$

Définition 3.1.6. On appelle combinaison sans répétition de p éléments choisis parmi n comme sous ensemble de cardinal p formé d'éléments distincts choisis parmi n. Le nombre de combinaison sans répétition de p éléments parmi n est donné par

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \qquad n \geq p.$$

***Exemple* 3.1.6.** Le nombre de combinaisons de 4 éléments a, b, c, d deux à deux est

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

Les combinaison sont : $\{a,b\}; \{a,c\}; \{a,d\}; \{b,c\}; \{b,d\}; \{c,d\}$.

3.2 Espace probabilisable

3.2.1 Quelques définitions

Définition 3.2.1. Une expérience aleatoire ou épreuve aléatoire est une expérience dont le résultat est régi par le hazart, lorsqu'on la répète dans les mêmes conditions.

***Exemple* 3.2.1.** Le jet d'un dé à 6 faces constitue une expérience aléatoire.

Définition 3.2.2. le résultat d'une expérience aléatoire est appelé un évènement élémenttaire.

***Exemple* 3.2.2.** Un des 6 résultats du jet d'un dé à 6 faces est un évènement élémentaire. On peut considérer les évènements élémentaires suivants :

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$$

Définition 3.2.3. L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est dit espace des événenments. On le note par Ω

***Exemple* 3.2.3.** L'espace des évènements dans l'expérience du jet d'un dé à 6 faces est donné par :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Définition 3.2.4. Un évènement composé ou évènement tout court, est un ensemble d'évènements élémentaires. C'est donc un sous ensemble de Ω

***Exemple* 3.2.4.** L'évènement $A = \{\text{Avoir un chifre pair}\}$ que l'on peut dénombrer par

$$A = \{2, 4, 6\}$$

est un évènement composé. Il en est de même de l'évènement $B = \{\text{Avoir un chifre impair}\}$, c'est à dire

$$A = \{1, 3, 5\}$$

Définition 3.2.5. Un évènement A est dit réalisé lorsque le résultat w de l'expérience aléatoire appartient à A, c'est à dire $w \in A$.

Définition 3.2.6. Lorsque A ne se réalise jamais, on dira que c'est un évènement impossible. On notera $\emptyset$.

Définition 3.2.7. L'évènement Ω qui se réalise constamment, est appelé évènement certain.

3.2.2 Opérations sur les évènements

Définition 3.2.8. Lorsqu'on un évènement A ne se réalise pas, c'est son complémentaire qui se réalise. Le complémentaire de A est dit évènement contraire de A. On le notera par $\overline{A}$

$$w \notin A \Longleftrightarrow w \in \overline{A}$$

Remarque 3.2.1. L'évènement $\varnothing$ a pour évènement contraire l'évènement Ω.

Définition 3.2.9. On dira qu'un évènement A est inclus dans un évènement B lorsque la réalisation de A entraîne celle de B

$$A \subseteq B \subseteq\Longleftrightarrow w \in A \Longrightarrow w \in B$$

Définition 3.2.10. Lorsque deux évènements A et B se réalisent en même temps, on dira que leur intersection se réalise. On notera $A \bigcap B$ cette intersection.

$$w \in A \bigcap B \Longleftrightarrow w \in A \quad et \quad w \in B$$

Définition 3.2.11. Lorsque $A \bigcap B = \emptyset$, on dira que A et B sont incompatibles ou mutuellement exclusifs.

***Exemple* 3.2.5.** Les évènements $A = \{1, 3, 5\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$ ne peuvent jamais se réaliser en même temps. ils sont donc incompatibles $A \bigcap B = \emptyset$

Définition 3.2.12. Lorsqu'un au moins des évènement A et B se réalise. On dira, que l'union se réalise. on notera $A \bigcup B$

$$w \in A \bigcup B \Longleftrightarrow w \in A \quad ou \quad w \in B$$

Définition 3.2.13. Lorsque l'évènement A se réalise sans B. On dira, que la différence se réalise. on notera $A - B$

$$w \in A - B \Longleftrightarrow w \in A \quad et \quad w \notin B$$

Définition 3.2.14. Lorsque des deux évènements A et B, un et un seul se réalise. On dira, que la différence symétrique se réalise. On notera $A \triangle B$

$$w \in A \triangle B \Longleftrightarrow w \in A - B \quad ou \quad w \in B - A$$

Définition 3.2.15. On appelle système complet d'évènements, des évènements non vides, deux à deux incompatibles et dont l'union donne Ω.

***Exemple* 3.2.6.** Les ensembles $\{1, 3\}, \{2, 4, 5\}, \{6\}$ forment un système complet de Ω.

Définition 3.2.16. On appelle tribu ou σ-algèbre d'évènements sur Ω, toute famille que l'on notera τ telle que :

1. $\Omega \in \tau$.
2. Si A $\in \tau$ alors $\overline{A} \in \tau$.
3. Si $A_i \in \tau$ alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} \in \tau$.

***Exemple* 3.2.7.** La famille $(\tau = \mathcal{P}(\Omega))$ = l'ensemble de partie de Ω est une tribu sur Ω.

Définition 3.2.17. On appelle espace probabilisable, l'ensemble Ω muni d'une tribu τ. On le notera (Ω, τ).

***Exemple* 3.2.8.** Soient $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\tau = \mathcal{P}(\Omega)$, alors (Ω, τ) est un espace probabilisable.

3.3 Lien entre la théorie des probabilités et des ensembles

3.3.1 Espace probabilisé

Définition 3.3.1. On appelle probabilité sur un espace probabilisable (Ω, τ) toute application $\mathbb{P} : \tau \longrightarrow [0, 1]$ satisfaisant

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
2. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i), \quad \text{tels que} A_i \bigcap A_j \neq \emptyset, \forall i \neq j.$

Remarque 3.3.1. On a deux remarques importantes

1. L'assertion 2 dans la définition 3.3.1 s'appelle la σ-additivité.
2. Dans le cas d'un espace Ω fini de cardinal n, cette propriété s'écrit
$$\forall A_i, \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$
Cette propriété s'appelle l'aditivité.

Définition 3.3.2. Le triplet $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé ou espace de probabilité.

3.3.2 Conséquences de la définition

1. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
2. $A \subseteq B \Longrightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
3. $\mathbb{P}(A \bigcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \bigcap B)$.

3.3.3 Caractérisation des probabilités dans le cas d'évènements équiprobables

Soit $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$ un espace de probabilité avec Ω fini de cardinal n, c'est à dire
$$\Omega = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_n\}.$$
Supposons w_i de même probabilité (équiprobables) et considérons $A = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\}$ un évènement quelconque fini de cardinal k, alors

$$\mathbb{P}(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{nombre\ \ de\ \ cas\ \ favorables}{nombre\ \ de\ \ cas\ \ possibles}$$

Exemple 3.3.1. *Considérons les deux exemples suivants :*

1. *Lorsque l'on jette un dé bien équilibré, la probabilié d'avoir la face 5 est de* $\frac{1}{6}$.
2. *Lorsque l'on extrait une carte au hasard d'un jeu de 52 cartes, la probabilité d'avoir un roi est de* $\frac{4}{52}$.

Exemple 3.3.2. *On extrait au hasard 3 pièces d'une caisse qui en contient 20 dont 4 sont défectueuses. Alors*

1. *La probabilité d'avoir 3 bonne pièces est* $\frac{C_{16}^3}{C_{20}^3}$.
2. *La probabilité d'avoir exactement 2 bonnes pièces est* $\frac{C_{16}^2 C_4^1}{C_{20}^3}$.
3. *La probabilité davoir au moins une bonne pièce parmi les extraites* $\frac{C_{16}^1 C_4^2 + C_{16}^2 C_4^1 + C_{16}^3 C_4^0}{C_{20}^3}$.

3.4 Probabilités conditionnelles, indépendance et probabilités composées

3.4.1 Probabilités conditionnelles

Définition 3.4.1. Soit $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Considérons deux évènements A et B tels que $\mathbb{P}(B) > 0$. On appelle probabilité de A sachant B ou encore probabilité de A conditionnée par B, la probabilité que l'on notera $\mathbb{P}(A/B)$ donnée par

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \bigcap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Exemple 3.4.1. *On tire successivement 2 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir 2 rois sachant que le tirage se fait sans remise.*
On peut noter A_i l'évènement "avoir un roi au ième tirage", i=1,2.

On cherche $\mathbb{P}(A_1 \bigcap A_2)$. Pour cela, on utilise la formule de la probabilité conditionnelle.

$$\mathbb{P}(A_1 \bigcap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2/A_1) = (\frac{4}{32})(\frac{3}{31}).$$

3.4.2 Indépendance

Définition 3.4.2. Deux évènements A et B sont dits indépendants lorsque

$$\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A).$$

L'indépendance peut être également définie, en tenant compte de la définition de la probabilité conditionnelle comme suit

Définition 3.4.3. Deux évènements A et B sont dits indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \bigcap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Théorème 3.4.1. Soit $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Considérons A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$. Les quatres propriétés suivantes sont indépendantes :

(a) A et B indépendants.

(b) Les évènements contraires $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

(c) A et $\overline{B}$ sont indépendants.

(d) $\overline{A}$ et B sont indépendants.

3.4.3 indépendance mutuelle

On peut généraliser la notion d'indépendance de deux évènements à l'indépendance mutuelle de plusieurs évènements.

Définition 3.4.4. Les évènements $A_i, i = 1, 2, ..., n$ sont dits mutuellement indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \quad avec \quad I \subseteq \{1, 2, ..., n\}.$$

Ainsi 3 évènements A_1, A_2 et A_3 sont mutuellement indépendants si et seulement si :

1. $\mathbb{P}(A_1 \bigcap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$,
2. $\mathbb{P}(A_1 \bigcap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3)$
3. $\mathbb{P}(A_2 \bigcap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$ et
4. $\mathbb{P}(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$.

***Exemple* 3.4.2.** On extrait au hasard une carte d'un jeu de 52 cartes. Etudions l'indépendance des évènements A : "avoir un as" et B "avoir un carreau"

Comme il y a 4 as dans un jeu de 52 cartes, alors on a

$$\mathbb{P}(A) = 4/52.$$

Et comme il y a 13 carreaux dans un jeu de 52 cartes, alors on a

$$\mathbb{P}(B) = 13/52.$$

Et par suite, on a

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = (4/52)(13/52) = 1/52.$$

L'évènement $A \bigcap B$ est défini par "avoir un as de carreau", et comme il n'y a qu'un seul as de carreau dans un jeu de 52 cartes, alors

$$\mathbb{P}(A \bigcap B) = 1/52.$$

On remarque que $\mathbb{P}(A \bigcap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Les évènement A et B sont donc indépendants.

3.4.4 Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Considérons un système complet d'évènements

$$A_1, A_2, A_3, ..., A_n.$$

Pour un évènement quelconque A tel que $\mathbb{P}(A) > 0$, on peut écrire

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(A \bigcap \Omega\right) = \mathbb{P}\left[A \bigcap \left(\bigcup_j A_j\right)\right].$$

Comme les évènements A_j sont disjoints, il en est de même des évènements $A.gcapA_j$, alors

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left[\bigcup_j (A \bigcap A_j)\right] = \sum_j \mathbb{P}\left(A \bigcap A_j\right).$$

En appliquant la formule de la probabilité conditionnelle, on a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(A/A_j)$$

Cette formule est appelé formule des probabilité totales.

Exemple 3.4.3. *Un étudiant doit passer un examen oral chez un des trois enseignants* E_1, E_2 *ou* E_3. *Il a* 55% *de chances de réussir en passant chez* E_1, 50% *chez* E_2 *et* 60% *chez* E_3. *Quelle est la probabilté que cet étudiant réussisse.*

On suppose que cet étudiant a les mêmes chances de passer chez un des trois enseignants.

On note les évènements suivants :
- $E_i, i = 1, 2, 3$ *l'évènement "l'étudiant passe son examen chez l'enseignant* E_i*".*
- A *l'évènement "l'étudiant réussit".*

Comme les enseignants sont choisis au hasard, alors

$$\mathbb{P}(E_i) = \frac{1}{3}.$$

D'autre part, on a

$$\mathbb{P}(A/E_1) = 0,55; \quad \mathbb{P}(A/E_2) = 0,50; \quad \mathbb{P}(A/E_3) = 0,60$$

On remarque que E_1, E_2, E_3 *forment un système complet de* Ω. *En effet,*

1. *Comme il n'y a que ces trois enseignants qui font passer l'examen, alors* $\Omega = E_1 \bigcup E_2 \bigcup E_3$.
2. *Lorsque l'étudiant passe chez un des enseignants, il ne passe pas chez les autres, alors* $E_i \bigcap E_j = \emptyset, \forall i, j = 1, 2, 3$ *et* $i \neq j$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) =& \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(A/E_1) + \mathbb{P}(E_2)\mathbb{P}(A/E_2) + \mathbb{P}(E_3)\mathbb{P}(A/E_3 \\
=& (1/3)(0,55) + (1/3)(0,50) + (1/3)(0,60) \\
=& 0,55.
\end{aligned}$$

Exemple 3.4.4. *On dispose, dans un atelier, de 3 machines* M_1, M_2 *et* M_3. *Ces machines produisent des pièces dans les proportions respectives de* 30%, 45% *et* 25% .

Les pièces défectueuses produites par ces machines représentent réspectivement 2%, 3% *et* 4%.

On extrait au hasard une pièce de la production. Quelle est la probabilité que cette pièce soit défectueuse ?

Notons que

– M_i *l'évènement "la pièce est fabriquée par la machine* M_i", $i = 1, 2, 3$ *et*

– D *l'évènement "la pièce extraite est défectueuse".*

On remarque que M_1, M_2 *et* M_3 *forment un système complet de* Ω. *En effet,*

1. $M_1 \bigcup M_2 \bigcup M_3 = \Omega$ *car il n'ya que 3 machines dans cet atelier et*
2. $M_i \bigcap M_j = \emptyset, i \neq j$ *car chaque pièce est fabriquée par une et une seule machine .*

Donc, on a

$$\mathbb{P}(M_1) = 0,30; \quad \mathbb{P}(M_2) = 0,45; \quad \mathbb{P}(M_3) = 0,25,$$

et de plus

$$\mathbb{P}(D/M_1) = 0,02; \quad \mathbb{P}(D/M_2) = 0,03; \quad \mathbb{P}(D/M_3) = 0,05$$

D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) =& \mathbb{P}(M_1)\mathbb{P}(D/M_1) + \mathbb{P}(M_2)\mathbb{P}(D/M_2) + \mathbb{P}(M_3)\mathbb{P}(D/M_3) \\ =& (0,30)(0,02) + (0,45)(0,03) + (0,25)(0,05) \\ =& 0,032.\end{aligned}$$

3.4.5 Formule de Bayes

Soit $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Considérons un système complet d'évènements

$$A_1, A_2, A_3, ..., A_n.$$

Soit A un évènement quelconque de Ω. On suppose que A s'est réalisé. On se propose alors de chercher la probablité que $A_i, i = 1, 2, .., n$ soit réalisé à travers A. Il s'agit donc de calculer $\mathbb{P}(A_i/A)$.

D'après la définition de la probabilité , on a

$$\mathbb{P}(A_j/A) = \frac{\mathbb{P}(A_j \bigcap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(A/A_j)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Un utilisant la formule des probabilités totales pour $\mathbb{P}(A)$, on obtient

$$\mathbb{P}(A_j/A) = \frac{\mathbb{P}(A_j \bigcap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(A/A_j)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(A/A_j)}.$$

Cette formule est appelé la formule de Bayes.

Exemple 3.4.5. *Reprenons l'exemple 3.4.3 et supposons que l'étudiant ait réussi à son examen. Calculer la probabilité qu'il ait passé chez l'enseignant E_2. Il s'agit de calculer $\mathbb{P}(E_2/A)$. D'après la formule de Bayes, on a*

$$\mathbb{P}(E_2/A) = \frac{\mathbb{P}(E_2)\mathbb{P}(A/E_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{(1/3)(0,50)}{0,55} = 0,303.$$

Exemple 3.4.6. *Reprenons l'exemple 3.4.4 et supposons que la pièce extraite est testée défectueuse. On se propose de calculer la probabilité que cette pièce ait été fabriquée par la machine M_1. Il s'agit donc de calculer $\mathbb{P}(M_1/D)$*

$$\mathbb{P}(M_1/D) = \frac{\mathbb{P}(M_1\mathbb{P}(D/M_1))}{\mathbb{P}(D)} = \frac{(0,30)(0,02)}{0,032} = 0,1875$$

Bibliographie

[1] Gilbert Saporta, *Probabilités, analyse des données et statistique,* Editions Technip, 1990.

[2] Jean-François Delmas, *Introduction au calcul des probabilités et à la statistique,* Les presses de l'Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées (ENSTA), 2016.

[3] Olivier Marchal, *Fondements des probabilités, Avec exercices corrigés,* Ellipses, 2017.

[4] Jean-Pascal Ansel,Yves Ducel, *Exercices corrigés en théorie des probabilités,* Ellipses, 2017.

[5] Sabin Lessard, *Initiation à la théorie des probabilités : Cours et exercices corrigés,* Ellipses, 2017.

[6] Mohammed Mountassir, *Probabilités et statistiques,* Modulo éditeur, 2016.

[7] Benjamin Jourdain, *Probabilités et statistique,* Ellipses, 2017.

[8] Pierre Dreyfuss, Noëlle Stolfi-Donati, *Probabilités et statistiques appliquées : Cours, exercices et travaux pratiques avec tableur, corrigés détaillés,* Ellipses, 2015.

[9] Kaci Redjdal, *Probabilité, exercices corrigés avec reppels de cours* K. R editions.