République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Centre Universitaire Mohamed Cherif Messaadia Souk-Ahras
Institut des Sciences et de Technologie
Ecole Doctorale en Mathématiques – Pôle d'Annaba

Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de
Magister en Mathématiques
Option : Mathématique de développement

Titre

LA RELATION ENTRE LE SPECTRE PONCTUEL BORNE D'UN GENERATEUR A ET SON ADJOINT

Présenté par
GOUASMIA Okba

Devant le jury suivant

1. Dhissi Abd El Kader PROF UBM U.SOUK AHRAS Président
2. KELAIAIA Ismail PROF UBM U. ANNABA Membre
3. LASKRI Yamina PROF UBM U. ANNABA Membre
4. AMIAR Rachida M.C.A UBM U. ANNABA Membre
5. DIABA Fatma M.C.A UBM U. ANNABA Directeur de mémoire

Remerciement

Je remercie « dieu » qui m'a donné la volonté pour la réalisation de ce modeste mémoire.

Je remercie Mme DIABA Fatma, qui a encadré ce mémoire avec beaucoup de patience et de gentillesse. Elle a su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes. Je la remercie très sincèrement pour sa disponibilité.

Mes remerciements vont également à DHISSI ABD EL KADER professeur à l'université de Souk-Ahras, pour avoir bien voulu me faire l'honneur d'accepter de présider le jury.

De même je remercie KELAIAIA Ismail, professeur à l'université d'Annaba, LASKRI Yamina, professeur à l'université d'Annaba , et AMIAR Rachida maître de conférence classe A à l'université d'Annaba pour l'honneur qu'ils m'ont fait de bien vouloir accepter de faire partie du jury .

Je remercie également l'ensemble des enseignants qui ont contribué à ma formation et surtout les enseignants du département de mathématiques (Souk-Ahras), et les enseignants de première année de l'école doctorale (Annaba).

En fin, je n'oublie pas de remercier toutes les personnes qui ont été à l'origine de la réussite de ce mémoire.

Dédicace

Je dédie ce modeste mémoire

A mes très chers parents qui m'ont guidé durant tout ce long chemin, ma mère qui a été à mes côtés et m'a soutenu à tout moment et mon père qui s'est sacrifié pour nous durant toute sa vie, merci mes parents.

A mes très chers frères et chères sœurs, à toute la famille,

Tous mes amis,

Mes collègues surtout la promo DES 2009 et promo 2010 école doctorale,

A tous les enseignants de lycée Sahrawi zoklami Taoura.

TABLE DE MATIERES

1 Résumé

Dans ce travail, nous obtenons la relation entre le spectre ponctuel borné d'un générateur A d'un C_0 -semi-groupe et son adjoint A^*.
Ces relations se rapprochent avec les résultats dû à Lyubich-Phóng et Arendt-Batty, résultats de stabilité donnés sur les C_0 -semi-groupes positifs.
Après le théorème de Liapunov sur la stabilité classique, beaucoup de contributions ont été établies dans le but d'obtenir des généralisations de ce théorème en dimensions infinies. Un des résultats les plus récents dans ce contexte est le théorème sur la stabilité dû à Arendt-Batty et Lyubich-Phóng.

2 Abstract

In this work, we get some relations between the boundary point spectrum of the generator A of a C_0 -semigroup and the generator A^* of the dual semigroup. These relations combined with the results due to Lyubich-Phóng and Arendt-Batty, yield stability results on positive C_0-semigroup. After the theorem of Liapunov on classical stability, a lot of contributions have been made in order to get generalizations to infinite dimension of this theorem. One of the more recent results in this contexte is the stability theorem due to Arendt-Batty [21]et Lyubich-Phóng [30].

3 Introduction

La théorie des semi groupes fortement continus des opérateurs linéaires sur les espaces de Banach est devenue un outil indispensable dans un grand nombre des étendues de l'analyse mathématique.

Beaucoup de travaux montrent une progression remarquable de cette théorie dans de différents domaines mathématiques et physiques.

Récemment, un grand nombre d'applications de la théorie des semi groupes a été utilisé dans l'étude de contrôle, des processus de Markov, la théorie d'approximations, la théorie ergorique et la théorie de la stabilité des systèmes gouvernés par des équations différentielles sur les espaces de Banach.

Cette théorie joue un rôle central dans l'étude de l'existence, de l'unicité et la dépendance continue des solutions des équations différentielles (les problèmes bien posés) et leurs propriétés de régularité. Ils permettent de décrire le comportement asymptotique des solutions des équations différentielles.

Il est nécessaire en analyse fonctionnelle (par exemple, dans la théorie spectrale) de considérer les espaces vectoriels et algébriques sur des domaines complexes.

Ce mémoire est composé d'une introduction dans laquelle nous avons présenté l'essentiel de notre travail, de quatre chapitres et enfin une bibliographie.

Dans le chapitre I, on a rassemblé l'ensemble de toutes les définitions, les propriétés et les théorèmes indispensables à notre thématique.

Dans le chapitre II, on a étudié la stabilité asymptotique des équations différentielles linéaires dans un espace de Banach. Nous avons montré que si l'intersection de $\sigma(A)$ avec l'axe imaginaire est dénombrable et que A^* n'admet aucune valeur propre purement imaginaire, alors le problème de Cauchy pour l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \; t \geq 0$$

est asymptotiquement stable.

On a considéré l'équation différentielle suivante

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \; t \geq 0 \tag{1}$$

dans un espace de Banach complexe X, où A est l'opérateur linéaire fermé de domaine dense $D(A) \subset X$.

Le problème de Cauchy pour l'équation (1) est stable (ie, par définition l'équation (1) admet une seule solution $x(t)$ bornée qui dépend de façon continue de la valeur initiale $x(0) \in D(A)$) si et seulement si l'opérateur A engendre un c_0-semi-groupe $\{T(t), t \geq 0\}$ lequel est borné ie

$$\sup_{t \geq 0} \|T(t)\| = M < \infty. \tag{2}$$

Au chapitre III, on a étudié le comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle qui est liée fréquemment aux propriétés spectrales de l'opérateur fondamental. Cela est bien illustré par le théorème de Liapunov suivant.
Soit A une matrice $n \times n$. Alors $\lim_{t \to \infty} U(t)x = 0$ pour toute solution U de l'équation

$$\dot{U}(t) = AU(t), \ t \geq 0$$

si et seulement si le spectre de A appartient au demi plan gauche ouvert.

Le chapitre IV est le travail central de ce mémoire dans lequel nous avons considéré la relation entre le spectre ponctuel borné d'un générateur A et son adjoint A^*.Ces relations se rapprochent avec les résultats dû à Lyubich-Phóng et Arendt-Batty, résultats de stabilité donnés sur les C_0 -semi-groupes positifs.
Après le théorème de Liapunov sur la stabilité classique, beaucoup de contributions ont été établies dans le but d'obtenir des généralisations de ce théorème en dimensions infinies.

CHAPITRE 1

Préliminaire

Dans ce chapitre, nous allons exposer l'ensemble de toutes les notions de base utilisées dans notre travail, à savoir les définitions importantes et les théorèmes fondamentaux (voir [34] − [38]).

1 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.1 *Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur le corps K et soit F sous ensemble dans E. On dit que $(F, +, .)$ est un sous espace vectoriel de $(E, +, .)$ si et seulement si*

1. *F non vide c'est-à-dire $F \neq \phi$.*
2. *$\forall\ x \in F,\ y \in F:\ x + y \in F$.*
3. *$\forall\ x \in F,\ \lambda \in K:\ \lambda.x \in F$.*

Proposition 1.1 *Soient $F_1,\ F_2$ deux sous-espaces vectoriels de E alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.*

2 Espaces vectoriels normés

Définition 2.1 *Soit E un espaces vectoriel sur $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*
Une fonction $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ est appelée norme sur E si

1. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$
2. $\forall\ \lambda \in K\ ,\forall\ \ x \in E\ , \|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|\,.$
3. $\forall\,(x,\ y) \in E^2,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\,.$

Le couple $(E, \|.\|)$ est alors appelé espace vectoriel normé.

Remarque 2.1 *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dispose alors toujours d'une inégalité supplémentaire*

$$\forall\,(x,\ y) \in E^2,\ |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|\,,$$

appelée deuxième inégalité triangulaire.

3 Espace de Banach

Définition 3.1 *On dit qu'un espace normé $(E,\ \|.\|)$ est de Banach si pour toute suite de Cauchy dans E est converge, cela veut dire que E est complet comme un espace métrique de la distance associée comme norme.*

Exemple 3.1 *Les espaces $(\mathbb{R},\ |.|)\,,\ (\mathbb{C},\ |.|)$ et $(c\ ([a,\ b]\,,\ \mathbb{R})\,,\ \|.\|_\infty)$ sont de Banach.*

Proposition 3.1 *Si $(E,\ \|.\|)$ est un espace de Banach et F un sous-espace de E alors $E\ \diagup F$ est de Banach.*

Corollaire 3.1 *Toutes les normes sont équivalentes dans les espaces de dimension finie.*

1. Tout espace normé de dimension finie est de Banach.

2. Si F est de Banach alors $\mathcal{L}(E,\ F)$ est de Banach.

4 Ensemble dense

Définition 4.1 *Une partie D d'un espace topologique X ; est dite dense dans X si ça fermeture $\overline{D}$ coïncide avec X c'est-à-dire $\overline{D} = X$.*

5 Les opérateurs

Définition 5.1 *Soient X, Y deux espaces vectoriels normés.*

$$A : D(A) \subset X \to Y.$$

A est une application d'une partie $D(A)$ de X dans Y.
A est dit un opérateur linéaire si et seulement si $D(A)$ est un sous espace vectoriel de X et

$$\forall \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R},\ x,\ y\ \in D(A) : A\ (\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1 Ax + \lambda_2 Ay.$$

5.1 Définition d'un ensemble borné

Définition 5.2 *On dit qu'un ensemble K est borné s'il existe une boule $B(0,\ r)$ pour $r < \infty$ telle que $K \subset B(0,\ r)$.*

5.2 Opérateur linéaire borné

Soit $A : X \to Y$ est dit borné si

1. $A\ (\bar{B}(0,1))$ est borné dans Y.
2. L'image d'un borné est un borné.

3. $\exists\, c > 0$ tel que $\forall\, x \in X : \|Ax\|_Y \leq c\ \|x\|_X$.

On appelle la plus petite constante c vérifiant l'inégalité $\|Ax\|_Y \leq c\ \|x\|_X$ la norme de l'opérateur A et on a

$$\|Ax\|_Y \leq \|A\|\ \|x\|_X .$$

5.3 Opérateur linéaire continu

Définition 5.3 *Soit A un opérateur linéaire de X dans Y.*
A est continu en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0} Ax = Ax_0$.

Propriétés

Soit A un opérateur linéaire de X dans Y, alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. *A continu sur X.*
2. *$\forall\, x \in X;$ A continu en x.*
3. *A continu en 0.*

Il éxiste une relation plus forte entre les opérateurs bornés et la définition de la continuité, la proposition suivante explique cette relation

Proposition 5.1 *Tout opérateur continu est un opérateur borné*

5.4 Opérateur dissipatif

Définition 5.4 *Soit $A : D(A) \subset X \to Y$ tel que X, Y deux espaces de Banach.*
A est dit dissipatif si

$$\forall\ \lambda > 0 \text{ et } \forall x \in D(A) \quad \text{on a } \|(\lambda I - A)\ x\| \geq \lambda \|x\| .$$

6 Semi-groupe

Considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dot{u} = Au & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

si A est un nombre ou bien une matrice on a

$$u(t) = e^{At} u_0.$$

Donc la forme de la solution dépend de la possibilité de définir la fonction exponentielle.

Définition 6.1 *Pour tout $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tout $t \geq 0$; la matrice e^{tA} est définie par*

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \tag{1.1}$$

si on choisit une norme de (1.1), la norme correspondante dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, on peut montrer que (1.1) est une suite de Cauchy donc elle converge et elle vérifie

$$\left\| e^{tA} \right\| \leq e^{t\|A\|}, \quad t \geq 0.$$

Proposition 6.1 *Pour tout $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ l'application*

$$t \in \mathbb{R}^+ \mapsto e^{tA} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}),$$

est continue et vérifie

1. $e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA}$ pour $t, \ s \geq 0$.
2. $e^{0A} = I$.

Définition 6.2 *On appelle $\left(e^{tA}\right)_{t \geq 0}$ le semi-groupe à un paramètre engendré par la matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.*

D'une manière générale on a

Définition 6.3 *Soit X un espace de Banach et $\mathcal{L}(X)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés dans X.*
Une famille $\{T(t), \ t \geq 0\}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est dite semi-groupe si

1. $T(0) = Id \quad \{Id : \ identité\}$.
2. $T(t+s) = T(t)T(s) \ \ \forall \ t; \ s \geq 0$.

6.1 Propriétés du semi-groupe

1. Le semi-groupe $\{T(t), \ t \geq 0\}$ est dit uniformément continu si

$$\lim_{t \to 0} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$$

2. Le semi-groupe $\{T(t), \ t \geq 0\}$ est dit fortement continu ou bien C_0- semi-groupe si

$$\lim_{t \to 0} \|T(t)x - x\|_X = 0, \ \forall x \in X$$

Ou bien

$$\lim_{t \to 0} T(t)x = x, \ \forall x \in X.$$

L'application $t \to T(t)$ est fortement continue au point $t = 0$ c'est pourquoi on l'appelle C_0 -semi-groupe.

6.2 Générateur d'un semi-groupe

Définition 6.4 *Le générateur d'un semi-groupe $\{T(t), \ t \geq 0\}$ est l'opérateur*

$$A : D \ (A) \subset X \to X$$

défini par

$$D\ (A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\ \to 0} \frac{T(t)\,x - x}{t}\ \text{existe} \right\}$$

et pour tout $x \in D(A)$

$$Ax = \lim_{t\ \to 0} \frac{T(t)\,x - x}{t}$$

6.3 Le dual d'un semi-groupe

Soit X un espace de Banach d'un dual X^*on note par $\langle x^*,\ x\rangle$ ou $\langle x,\ x^*\rangle$ la valeur de $x^*\ \in X^*$ et $x \in X$.

Soit S un opérateur linéaire de domaine dense $D(S)$ dans X. On rappelle que S^*, l'adjoint de S, est un opérateur de $D(S^*) \subset X^*$ tel que

$$D(S^*) = \left\{ \begin{array}{c} x^* \in X^*,\ y^* \in X^* \text{ tel que :} \\ \langle x^*,\ Sx\rangle = \langle y^*,\ x\rangle\ \ \forall\ x \in D(S) \ldots (1)\ \text{ et} \\ \text{si } x^* \in D(S^*)\ \text{ alors } y^* = S^* x^* \text{ où} \\ y^* \text{ est un élément de } X^* \text{ satisfaisant }\ (1) \end{array} \right\}$$

Pour la suite on suppose que $D(S)$ est dense dans X.

Lemme 6.1 *Soit S est un opérateur borné dans X. Alors S^* est un opérateur borné dans X^* et $\|S\| = \|S^*\|$*

Remarque 6.1 *On note par $\{S^*(t)\,,\ t \geq 0\}$ le dual semi-groupe, qui n'est pas en général un semi-groupe, il est un semi-groupe faiblement continu, c'est-à-dire*

$$\lim_{t\ \to 0} \langle x, S^*(t)\,x^* - x^*\rangle = 0\ \forall\ x \in X$$

Si X est rélexif, le dual semi-groupe est faiblement continu en $t = 0$. Alors il est un C_0-semi-groupe.

Lemme 6.2 *Soit X est réflexif et $A : D(A) \subset X \to X$ est un opérateur fermé densément défini. Alors A^* est un opérateur fermé densément défini.*

6.4 Le bidual d'un semi-groupe

Définition 6.5 *Soit $T : D(T) \subseteq X \to X$ un opérateur linéaire et soit $X^{\odot}$ un sous espace de X, l'opérateur*

$$T^{\odot} : D\left(T^{\odot}\right) \subseteq X^{\odot} \to X^{\odot}.$$

défini par

$$\begin{cases} D\left(T^{\odot}\right) = \left\{x \in D(T) \cap X^{\odot};\ Tx \in X^{\odot}\right\} \text{ et} \\ T^{\odot}x = Tx;\ \forall\ x \in D\left(T^{\odot}\right). \end{cases}$$

s'appelle la partie de T dans $X^{\odot}$.

En ce qui concerne le cas réflexif ; nous avons

Théorème 6.1 *Soit $\{S(t),\ t \geq 0\}$ un C_0 -semi-groupe de contractions sur X, d'un générateur A et soit $\{S^*(t),\ t \geq 0\}$ le dual semi-groupe.*
Si A^* est l'adjoint de A et $X^{\odot}$ la fermeture de $D(A^*)$ dans X^*. Alors la restriction $S^{\odot}(t)$ de $S^*(t)$ à $X^{\odot}$ est un C_0 -semi-groupe de contractions, le générateur $A^{\odot}$ est la partie de A^* dans $X^{\odot}$.

Définition 6.6 *Le C_0 -semi-groupe de contractions $\{S^{\odot}(t),\ t \geq 0\}$ dans le théorème précédent, est appelé le bidual de $\{S(t),\ t \geq 0\}$.*

Remarque 6.2 *Si X est réflexif, nous avons $X^{\odot} = X^*$ et le bidual de $\{S(t),\ t \geq 0\}$ coïncide avec son dual $\{S^*(t),\ t \geq 0\}$.*

7 Divers types de convergence de classes de fonctions mesurables

Soit $(X, \sum, m)$ un espace mesuré et M désigne la fonctionnelle d'intégration associée à m. Soient $f,\ f_1,\ f_2, ...$des classes de fonctions mesurables définies sur X

à valeurs complexes

Définition 7.1 *On dit qu'il y' a* ***Convergence uniforme presque partout de*** (f_n) ***vers*** f *si* $f_n(x) \to f(x)$ *uniformément ; en dehors d'un ensemble négligeable.*
On écrit $f_n \to f$ *uniformément p.p.*

Définition 7.2 *On dit qu'il y' a* ***Convergence simple presque partout de*** (f_n) ***vers*** f *si* $f_n(x) \to f(x)$ *simplement ; en dehors d'un ensemble négligeable.*
On écrit en général $f_n \to f$ *simplement p.p ; et en probabilité on écrit* $f_n \to f$ *presque sûrement.*

Définition 7.3 *On dit qu'il y' a* ***Convergence dans*** L^P $(1 \leq P \leq \infty)$ ***de*** (f_n) ***vers*** f *si :*

$$f,\ f_1,\ f_2,...f_n \text{ dans } L^P \text{ et } \|f_n - f\| \to 0.$$

On écrit $f_n \to f$ *dans* L^P.

Définition 7.4 *On dit qu'il y' a* ***Convergence en mesure de*** (f_n) ***vers*** f *si*

$$\forall\ \alpha > 0\ m\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}\right) \to 0.$$

On écrit $f_n \to f$ *en mesure en général.*

Dans le cas particulier où $m(X) = 1$, on écrit $f_n \to f$ en probabilité.

8 Convergence faible-définitions et propriétés générales

Pour la définition de la topologie faible sur un espace vectoriel normé, nous nous limiterons ici à la seule notion de convergence faible.

Définition 8.1 *Soit* $\{x_n\}_{n \geq 1}$ *une suite de l'espace vectoriel normé* $(E,\ \|.\|)$ *.On dit* *que* $\{x_n\}$ *converge faiblement dans* E*, s'il existe un élément* $x \in E$ *tel que*

$$\forall\ f \in \acute{E} : \lim_{x \to \infty} f(x_n) = f(x).$$

Définition 8.2 *On dit que la suite* $\{x_n\}_{n \geq 1}$ *est faiblement de Cauchy si la suite* $\{f(x_n)\}$ *est de Cauchy pour toute forme linéaire continue* $f \in \acute{E}$*.*
On dit qu'un espace vectoriel normé E *est faiblement complet si toute suite de* E *qui est faiblement de Cauchy converge faiblement dans* E*.*

Proposition 8.1 *Soit* $(E, \ \|.\|)$ *un espace vectoriel normé. Alors la convergence forte implique la convergence faible*

$$x_n \xrightarrow{E} x \Longrightarrow x_n \overset{E}{\rightharpoonup} x,$$

mais l'inverse n'est pas vrai toujours.

Proposition 8.2 *Une suite* $\{x_n\}$ *a au plus une limite faible cette proposition signifie que la topologie faible est séparée.*

Définition 8.3 *Soit* E *un espace de Banach.*

1. Si $x_n \overset{E}{\rightharpoonup} x$ dans E, alors la suite $\{\|x_n\|\}$ est bornée et $\|x\| \leq \lim\ \inf\ \|x_n\|$.

2. Si $x_n \overset{E}{\rightharpoonup} x$ et si $f_n \xrightarrow{\acute{E}} f$ alors $f_n(x) \to f(x)$ dans le corps des scalaires.

Proposition 8.3 *Soit* E *un espace de Banach et soit* S *une partie dense du dual topologique* $\acute{E}$*. Si la suite* $\{\|x_n\|\}$ *est bornée et s'il existe* $x \in E$ *tel que* $f_n(x) \to f(x)$ *pour tout* $f \in S$ *alors* $x_n \overset{E}{\rightharpoonup} x$*.*

Proposition 8.4 *Soit* $C \subset (E, \|.\|)$ *un ensemble convexe, alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. L'ensemble C est faiblement fermé.

2. L'ensemble C est fortement fermé.

Proposition 8.5 *Soient E, F deux espaces de Banach, T une application linéaire continue de E dans F et soit $\{x_n\}$ une suite de E telle que*

$$x_n \overset{E}{\rightharpoonup} x \quad \textit{alors } T(x_n) \rightharpoonup T(x).$$

8.1 Convergence faible dans les espaces de Hilbert

Proposition 8.6 *Tout espace de Hilbert est faiblement complet.*

Proposition 8.7 *Soit H un espace de Hilbert, $\{x_n\}$ une suite dans H telle que $x_n \rightharpoonup x$ et $\limsup \|x_n\| \leq \|x\|$ alors $\{x_n\}$ converge fortement vers x c'est-à-dire $x_n \to x$.*

Théorème 8.1 *Soit $\{x_n\}$ une suite bornée d'un espace de Hilbert H .*
Alors on peut extraire une sous suite faiblement convergente.

9 Compacité faible dans les espaces L^1

Dans ce qui suit on note $(S, \sum, \mu)$ un espace mesuré avec une mesure positive σ-finie. Tous les espaces considérés sont complexes. On note $\|f\|_1$la norme de l'élément $f \in L^1(S, \sum, \mu)$.

Remarque 9.1 *Pour $f \in L^1(S, \sum, \mu)$ on a, pour chaque $A \in \sum$,*

$$\int_A |f(x)|\, d\mu(x) \leq 4 \sup_{B \subset A} \left| \int_B f(x)\, d\mu(x) \right|.$$

Il découle immédiatement de la remarque précédente le résultat suivant

Lemme 9.1 *Soit K un sous ensemble non vide de $L^1(S, \sum, \mu)$. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes*

i) pour chaque réel $\xi > 0$, il existe un réel $r > 0$ tel que pour chaque $A \in \sum$ vérifiant $\mu(A) \leq r$ et chaque $f \in K$ on a $\left|\int_A f(x)\, d\mu(x)\right| \leq \xi$.

ii) pour chaque réel $\xi > 0$, il existe un réel $r > 0$ tel que pour chaque $A \in \sum$ vérifiant $\mu(A) \leq r$ et chaque $f \in K$ on a $\int_A |f(x)|\, d\mu(x) \leq \xi$.

Définition 9.1 *On dit qu'un sous-ensemble K de $L^1(S, \sum, \mu)$ est uniformément intégrable s'il vérifie l'une des deux affirmations du lemme précédent.*

Théorème 9.1 *Soit $(f_k)_k$ une suite de $L^1(S, \sum, \mu)$ telle que la suite $\left(\int_A f_k(x)\, d\mu(x)\right)_k$ est convergente pour chaque $A \in \sum$; alors $\{f_k;\ k = 1,\ 2, ...\}$ est uniformément intégrable.*

9.1 Théorème de Dunford_Pettis

Un sous-ensemble K de $L^1(S, \sum, \mu)$ est faiblement relativement compacte si, et seulement si, K est borné et K est uniformément intégrable.

10 Banach lattice et opérateurs positifs

Définition 10.1 *Soit X un ensemble non vide, un ordre sur X est une relation binaire notée ici par " $\geq$ ", qui est réflexive, antisymétrique et transitive c'est-à-dire*

1. $\forall\, x \in X : x \geq x$.
2. $x \geq y$ et $y \geq x \Rightarrow x = y, \quad \forall\, x,\ y \in X$.
3. $x \geq y$ et $y \geq z \Rightarrow x \geq z, \quad \forall\, x,\ y,\ z \in X$.

– Soit $x, y \in X$ et $x \geq y$, un intervalle $[x,\ y]$ est défini par

$$[x,\ y] = \{z \in X : y \geq z \geq x\}.$$

la notation $x \leq y$ signifie que $y \geq x$.

– Pour deux points $\{x,\ y\}$ on écrit

$$i)\ x \wedge y \text{ ou bien } \inf\{x,\ y\}\,.$$

$$ii)\ x \vee y \text{ ou bien} \sup\{x,\ y\}\,.$$

Définition 10.2 *On dit que X est un lattice si toute paire d'éléments $\{x, y\}$ possède* sup *et* inf .

Définition 10.3 *Un espace vectoriel ordonné est un espace vectoriel X équipé d'un ordre qui est compatible avec la structure vectorielle dans le sens suivant.*

4. $x \geq y \ \Rightarrow x + z \geq y + z \ \ \forall\ x, y\ , z \in X.$

5. $x \geq y \ \Rightarrow \alpha x \geq \alpha y \ \ \forall\ x,\ y \in X$ et $\alpha \geq 0.$

– L'ensemble

$X_+ = \{x\ \in X;\ x \geq 0\}$ est dit le **cône positif** de X.

10.1 Définition d'un cône

On dit qu'un sous-ensemble K de l'espace vectoriel E est un cône s'il vérifie

$$\forall\ x \in K,\ \forall\ \lambda \geq 0,\ \lambda x \in K.$$

Remarque 10.1 *Si l'espace vectoriel ordonné X est lattice alors est appelé un espace vectoriel lattice ou bien un espace de Riesz.*

10.2 Espaces de Banach lattices

Définition 10.4 *Une norme sur un espace vectoriel lattice X est dite une norme lattice si :$\forall\ x, y \in X$ si*

$$|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\| \tag{1.2}$$

Pour tout espace de Riesz complet X (par rapport à une norme lattice) est dit un espace de Banach lattice.
La propriété (1.2) donne l'identité importante

$$\|x\| = \||x|\|\,,\ x \in X$$

en effet

comme $x \leq |x|$ on a $|x| \leq |(|x|)|$

$|x| \leq |x|$ on a donc

$\|x\| \leq \||x|\|$ et $\||x|\| \leq \|x\| \Rightarrow \|x\| = \||x|\|\,.$

Une forme linéaire x^* sur un espace vectoriel lattice est dite positive si

$$x^*(x) = \langle x^*,\ x\rangle \geq 0\ \forall\ x \geq 0.$$

Remarque 10.2 *Une classe importante des espaces de Banach lattice qui joue un rôle important est celle dite les **AL-espaces** et **AM-espaces.***

Définition 10.5 *On dit qu'un espace de Banach lattice est*

Un **AL-espace** si

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \quad \forall\ x,\ y \in X_+\ .$$

Il est un **AM-espace** si

$$\|x \wedge y\| = \max\{\|x\|\,,\ \|y\|\}\ \forall\ x,\ y \in X_+\ .$$

10.3 Opérateurs positifs

Définition 10.6 *Un opérateur linéaire A d'un Banach lattice X dans un Banach lattice Y est dit positif (on note $A \geq 0$) si $Ax \geq 0\ \forall\ x \geq 0$.*

Un opérateur A est positif $\Leftrightarrow |Ax| \leq A\ (|x|)\,.$

Ceci découle facilement de $-|x| \leq x \leq |x| \Rightarrow$ si A positif on a :

$$-A|x| \leq Ax \leq A|x|.$$

Réciproquement, prenons $x \geq 0$, on obtient $0 \leq |Ax| \leq A(|x|)$ donc :

$$0 \leq |Ax| \leq Ax.$$

Si $|Ax| = A|x| \ \forall\, x \in X$ alors A est dit un homomorphisme lattice.
De plus, si $\|Ax\| = \|x\|$, A est dit isométrie lattice.

Théorème 10.1 *Si $A : X_+ \to Y_+$ est additif, alors A s'étend uniquement à un opérateur linéaire positif de X dans Y en posant*

$$\forall\, x \in X : Ax = A(x_+) - A(x_-)$$

Proposition 10.1 *Si A est positif alors*

$$\|A\| = \sup_{x \geq 0,\ \|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

10.4 Quelques propriétés des opérateurs positifs

Soit X un espace de Banach lattice. On note par X_+ le cône positif. La notation $x > 0$ veut dire que $x \in X_+$ et $x \neq 0$. On définit aussi le cône dual par

$$X_+^* = \{x^* \in X^*;\ \langle x^*,\ x\rangle \geq 0 \ \forall\, x \in X_+\}$$

où X^* est l'espace dual et $\langle .,.\rangle$ est la paire de dualité.
Dans les espaces $L^P(\Omega,\ \mu)$, ces définitions correspondent aux notions usuelles des fonctions positives.
Un opérateur $A \in \mathcal{L}(X)$ est dit positif s'il laisse le cône positif invariant.
Le concept de l'irréductibilité est l'un des plus importants en théorie des opérateurs positifs.

Pour l'introduire, on va faire appel à la notion de l'idéal.

Définition 10.7 *Un sous-espace Y de X est dit un idéal si $|x| \leq |y|$ et $y \in Y$ implique que $x \in Y$ où $|.|$ désigne la valeur absolue.*

Dans les espaces $L^P(\Omega,\ \mu)$ $(1 \leq P \leq \infty)$, les idéaux sont de la forme

$$\left\{\varphi \in L^P(\Omega,\ \mu)\,;\ \varphi = 0 \text{ sur } A\right\}$$

pour un certain ensemble mesurable $A \subseteq \Omega$.

Définition 10.8 *Un opérateur positif $A \in \mathcal{L}(X)$ est dit irréductible s'il n'existe aucun idéal non trivial qui est invariant par A.*

Définition 10.9 *Un élément est dit **quasi-interieur** si : $\langle x^*,\ x\rangle > 0,\ \forall\ x^* > 0$. Une fonctionnelle $x^* \in X_+^*$ est dite strictement positive si*

$$\langle x^*,\ x\rangle > 0\ \forall\ x \in X_+ \text{ c'est-à-dire } \forall\ x > 0.$$

Remarque 10.3 *Dans les espaces $L^P(\Omega,\ \mu)$ les éléments quasi-interieurs correspondent aux fonctions positives presque partout.*
Un opérateur positif $A \in \mathcal{L}(X)$ est dit strictement irréductible si Ax est quasi-interieur $\forall\ x > 0$. On note que A est irréductible si une certaine puissance de A est positive.

11 Espaces réflexifs

Etant donné un espace de Banach E (ou plus généralement un espace vectoriel normé), soit E^* son dual muni de la norme dual

$$\forall\ f\ \in E^*\,,\ \|f\| = \sup_{x \in E,\ \|x\| \leq 1} |\langle f, x\rangle|\,.$$

et soit E^{**} son bidual c'est-à-dire le dual de E^{*} muni de a norme

$$\forall\ \xi \in E^{**}\ ,\ \|\xi\| = \sup_{f\in E^{*},\ \|f\|\leq 1} |\langle \xi, f\rangle|\ .$$

On a une injection canonique $J : E \to E^{**}$ définie comme suit
soit $x \in E$, fixé, l'application

$$\begin{array}{ccc} E^{*} & \to & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \langle f,\ x\rangle \end{array}$$

constitue une forme linéaire continue sur E^{*} c'est-à-dire un élément de E^{**} noté Jx on a donc

$$\langle Jx,\ f\rangle_{E^{**},\ E^{*}} = \langle f,\ x\rangle_{E^{*},\ E}\ \ \forall x \in E,\ \forall f \in E^{*}$$

Il est clair que J est linéaire et que J est une isométrie cela veut dire

$$\|Jx\|_{E^{*}} = \|x\|_{E}\ \ \forall x \in E$$

En effet,

$$\|Jx\| = \sup_{\|f\|\ \leq 1} |\langle Jx,\ f\rangle|\ \sup_{\|f\|\ \leq 1} |\langle f,\ x\rangle| = \|x\|$$

Définition 11.1 *Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E^{**} définie au dessus.*
On dit que E est réflexif si : $J(E) = E^{**}$ c'est-à-dire, lorsque E est réflexif on identifie implicitement E et E^{**}(à l'aide de l'isomorphisme J).

12 Stabilité pour les semi-groupes

Définition 12.1 *Soit $\{T(t),\ t \geq 0\}$ un C_0 -semi-groupe de générateur A dans un espace de Banach X, $\{T(t),\ t \geq 0\}$est dit*

1. Uniformément exponentiellement stable s'il existe $\xi > 0$ tel que

$$\lim_{t \to \infty} e^{\xi t} \|T(t)\| = 0$$

2. Uniformément stable si

$$\lim_{t \to \infty} \|T(t)\| = 0$$

3. Fortement stable si

$$\lim_{t \to \infty} \|T(t)x\| = 0,\ \forall x \in X$$

4. faiblement stable si

$$\lim_{t \to \infty} \langle T(t)x, \acute{x} \rangle = 0, \forall x \in X\ ,\ \acute{x} \in \acute{X}$$

Proposition 12.1 *pour un C_0 -semi-groupe $\{T(t),\ t \geq 0\}$ dans un espace de Banach, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $\{T(t),\ t \geq 0\}$ est Uniformément exponentiellement stable
2. $\{T(t),\ t \geq 0\}$uniformément stable
3. il existe $\xi > 0$ tel que $\lim_{t \to \infty} e^{\xi t} \|T(t)x\| = 0,\ \forall x \in X$

Définition 12.2 *un C_0 -semi-groupe $\{T(t),\ t \geq 0\}$ de générateur $(A, D(A))$ est dit exponentiellement stable s'il existe $\xi > 0$ tel que*

$$\lim_{t \to \infty} e^{\xi t} \|T(t)x\| = 0,\ \forall x \in D(A)$$

12.1 Caractérisations de l'uniformément exponentiellement stable

Nous començons par rappeler la définition de la borne supérieur

$$\begin{aligned}
\omega_0 : &= \omega_0(A) : = \omega_0(\mathcal{T}) \\
: &= \inf\left\{\omega \in \mathbb{R},\ \exists\ M_\omega > 1 \text{ tel que } \|T(t)\| \leq M_\omega\ e^{\omega t}\ \forall\ t \geq 0\right\} \\
: &= \inf\left\{\omega \in \mathbb{R},\ \lim_{t\ \to\ \infty} e^{-\omega t}\|T(t)\| = 0\ \right\}
\end{aligned}$$

d'un C_0 -semi-groupe$\mathcal{T} = \{T(t),\ t \geq 0\}$ de générateur $(A, D(A))$.

Pour cette définition il est claire que $\mathcal{T}$ est uniformément exponentiellement stable si et seulement si

$$\omega_0 < 0$$

Proposition 12.2 *pour un C_0 -semi-groupe $\{T(t),\ t \geq 0\}$ dans un espace de Banach, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $\omega_0 < 0, i.e., \mathcal{T} = \{T(t),\ t \geq 0\}$est uniformémant exponentiellement stable
2. $\lim_{t\ \to\ \infty} \|T(t)\| = 0$
3. $\|T(t_0)\| < 1$, pour quelque $t_0 > 0$

13 Caractérisation de semi-groupe sous-markovien

Soit $E = L^P(\Omega,\ \mu)$; $1 \leq p \leq \infty$ tel que $(\Omega,\ \mu)$ est un espace mesuré $\sigma-$fini et soit A le générateur d'un semi-groupe $\{T(t),\ t \geq 0\}$ sur E, le domaine de A est noté $D(A)$.

$E_+ = \{f \in E;\ f \geq 0\ \mu.p.p\}$ est le cône positif de $E,\ D(A)_+ = D(A) \cap E_+$.

Définition 13.1 *Si $\{T(t),\ t \geq 0\}$ est positif et contractif alors*
$\{T(t),\ t \geq 0\}$ est sous-markovien $\Longleftrightarrow$ A satisfait

$$\left\langle Au, T\left((u-1)^+\right)\right\rangle \leq 0, \forall\ u \in D(A)_+.$$

où $T(v) = |v|^{p-1}$ *sign* v *pour tout* $v \in E$, *avec*

$$sign\ v(x) = \begin{cases} 1 & si\ v(x) > 0 \\ 0 & si\ v(x) = 0 \\ -1 & si\ v(x) < 0 \end{cases}$$

Théorème 13.1 *Le semi-groupe* $\{T(t), t \geq 0\}$ *est sous-markovien si et seulement si* $\{T(t), t \geq 0\}$ *est positif et* A *satisfait l'inégalité de Kato suivante*

$$\left\langle 1 \wedge u,\ A^{+}\varphi \right\rangle \leq \left\langle \chi_{[u\ <1]}\ Au,\ \varphi \right\rangle \tag{1.3}$$

$\forall\ u \in D(A),\ \varphi \in D(A)_{+}.$
$[u < 1] = \{x \in \Omega;\ u(x) < 1\}.$

$\chi_{[u\ <1]}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $[u < 1]$ définie par

$$\chi_{[u\ <1]} = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin [u < 1]. \\ 1 \text{ si } x \in [u < 1]. \end{cases}$$

Théorème 13.2 *Le semi-groupe* $\{T(t),\ t \geq 0\}$ *est sous-markovien si* A *satisfait* (1.3) *et* A^{*} *possède la propriété suivante*

il existe $\varphi \in D(A)^{*}$ telle que

1. $A^{*}\varphi \leq \lambda\varphi$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. φ est strictement positive c'est-à-dire
   si $\langle f,\ \varphi\rangle = 0$ avec $f \in E$ alors $f = 0$.

Remarque 13.1 *Si la mesure de* Ω *est finie, on a*

$\{T(t),\ t \geq 0\}$ est sous-markovien $\Leftrightarrow$ $\{T(t),\ t \geq 0\}$ est positif, et A satisfait

$$\langle 1,\ A^{*}\varphi\rangle \leq 0\ ;\forall\ \varphi \in D(A)^{*}_{+}.$$

Théorème 13.3 *Le semi-groupe* $\{T(t), \ t \geq 0\}$ *est sous-markovien si et seulement si* $\{T(t), \ t \geq 0\}$ *est positif, et* A *satisfait l'inégalité*

$$\left\langle 1 \wedge u, \ A^{+}\varphi \right\rangle \leq \left\langle Au, \ \chi_{[u \ <1]}\varphi \right\rangle; \ \forall \ \varphi \in D(A)_{+}^{*}, \ u \in D(A).$$

14 Opérateur de multiplication

Nous commençons par considérer l'espace de Banach (avec la norme sup)

$$C_0(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} f \in C(\Omega), \ \forall \ \varepsilon > 0 \text{ il existe un compact } K_\varepsilon \subset \Omega \text{ tel que} \\ |f(s)| < \varepsilon, \ \forall \ s \in \Omega / K_\varepsilon. \end{array} \right\}$$

pour toutes fonctions continues à valeurs complexes sur un certain espace localement compact Ω qui décroîssent à l'infini. Pour toute fonction continue $q : \Omega \to \mathbb{C}$ nous associons maintenant, un opérateur linéaire M_q défini dans son domaine maximal $D(M_q)$ dans $C_0(\Omega)$.

Définition 14.1 *L'opérateur de multiplication* M_q *défini dans* $C_0(\Omega)$ *par une fonction continue* $q : \Omega \to \mathbb{C}$ *comme suivant*

$$\begin{aligned} M_q f : &= qf \ , \ \forall \ f \in D(M_q) \ \textit{telle que} \\ D(M_q) &= \{f \in C_0(\Omega), qf \ \in C_0(\Omega)\} \end{aligned}$$

La caractéristique principale de ces opérateurs de multiplication est que la plupart des propriétés théoriques d'opérateur M_q *peut être caractérisée par des propriétés analogues de la fonction* q.
Dans la propositition suivante nous donnons quelques exemples pour cette correspondance.

Proposition 14.1 *Soit* M_q *un opérateur de multiplication de domaine* $D(M_q)$, *défini dans* $C_0(\Omega)$ *par une fonction continue* q, *alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. L'opérateur $(M_q, D(M_q))$ est fermé et densément défini
2. L'opérateur M_q est borné (avec $D(M_q) = C_0(\Omega)$) si et seulement si la fonction q est bornée, dans ce cas on a$\geq$

$$\|M_q\| = \|q\| = \sup_{s\ \in\Omega} |q(s)|$$

3. L'opérateur M_q a un inverce borné si et seulement si la fonction q a un inverce borné $\frac{1}{q}$
4. Le spectre de M_q est de rang fermé de $q\ : \sigma(M_q) = \overline{q(\Omega)}$

Définition 14.2 *soit $q : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que*

$$\sup_{s\ \in\Omega} \operatorname{Re} q(s) < \infty$$

1. Le semi-groupe $\{T_q(t),\ t \geq 0\}$ défini par

$$T_q(t) f :\ = e^{tq} f \text{ pour} t \geq 0 \text{ et } f \in C_0(\Omega),$$

   est appelé le semi-groupe de multiplication engendré par l'opérateur de multiplication M_q.
2. Le semi-groupe $\{T_q(t),\ t \geq 0\}$ est uniformément continu si et seulement il est de la forme $(e^{tq})_{t\ \geq\ 0}$ pour un opérateur borné A.

15 Spectre

15.1 Valeur propre et vecteur propre

Soit A un opérateur linéaire dans l'espace C^n, un nombre λ s'appelle valeur propre de l'opérateur A si l'équation $Ax = \lambda x$ admet des solutions non nulles c'est-à-dire

$$(A - \lambda) x = 0,\ x \neq 0$$

Un tel vecteur x est appelé vecteur propre (ou une fonction propore) associé à la valeur propre λ.

15.2 Le spectre d'un opérateur compact

Soit $T \in \mathcal{L}(X)$. L'ensemble résolvant est

$$\rho(t) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ (T - \lambda I) \text{ est bijectif de } X \ \rightarrow\ X\}$$

et $\sigma(T) = \mathbb{C}/\rho(t)$ est le spectre de T.

15.3 Le spectre ponctuel

L'ensemble des valeurs de λ appartenant à $\sigma(T)$ tel que $T - \lambda I$ n'est pas injectif est appelé le spectr ponctuel de T et on note $\sigma_p(T)$.

Ainsi, $\lambda \in \sigma_p(T)$ si et seulement si $Tx = \lambda x$ pour un certain $x \in X$ non nul.

15.4 Le spectre continu

L'ensemble de tout $\lambda \in \sigma(T)$ pour lequel $T - \lambda I$ est injectif et $\operatorname{Im}(T - \lambda I)$ dense dans X $\left(\overline{(T - \lambda I)X} = X\right)$ mais $(T - \lambda I)X \neq X$ est appelé le spectre continu de T et on note par $\sigma_c(T)$.

15.5 Le spectre résiduel

L'ensemble de tout $\lambda \in \sigma(T)$ pour lequel $\lambda I - T$ est injectif et $\operatorname{Im}(\lambda I - T)$ *n'est pas dense dans X est appelé le spectre résiduel de T et on le note par $\sigma_r(T)$*

$$\sigma(T) = \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_p(T).$$

15.6 Le spectre essentiel

Soit $T : D(T) \subset X \to X$ *un opérateur autoadjoint.* $\sigma_{ess}(T)$ *est le sous ensemble du spectre défini par*

$$\begin{cases} \lambda \in \sigma_{ess}(T) \text{ si et seulement si } \exists\, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(T) \text{ tq } \|u_n\| = 1 \\ \text{et } \|Tu_n - \lambda u_n\| \to 0 \text{ et } u_n \rightharpoonup 0 \; converge\ faiblement \end{cases}$$

(la suite u_n *est dite singulière).*

CHAPITRE 2

La stabilité asymptotique des équations linéaires différentielles dans un espace de Banach

Dans ce chapitre, on introduit essentiellement la notion de la stabilité asymptotique des équations linéaires différentielles dans un espace de Banach.

1 Introduction

Soit A le générateur d'un C_0-semi-groupe $\{T(t), t \geq 0\}$ borné.
Nous prouvons si l'intersection de $\sigma(A)$ avec l'axe imaginaire est dénombrable et que A^* n'admet aucune valeur propre purement imaginaire, alors le problème de Cauchy pour l'équation différentielle $\dot{x}(t) = Ax(t), t \geq 0$ est asymptotiquement stable.

Considérons l'équation différentielle suivante

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \ \ t \geq 0 \tag{2.1}$$

dans un espace de Banach complexe X, où A est l'opérateur linéaire fermé de domaine dense $D(A) \subset X$.

Le problème de Cauchy pour l'équation (2.1) est stable (i.e. par définition l'équation (2.1) admet une seule solution $x(t)$ bornée qui dépend de façon continue de la valeur initiale $x(0) \in D(A)$) si et seulement si l'opérateur A engendre un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\,,\ t \geq 0\}$ lequel est borné i.e.

$$\sup_{t\ \geq 0} \|T(t)\| = M < \infty$$

Ce critère obtenu par S.Krein et P.Sobolevskii, est équivalent au fait que

1. Le spectre de A n'appartient pas au demi-plan $\{\mathrm{Re}\ \lambda \geq 0,\ \lambda \in \mathbb{C}\}$.
2. Les résolvantes $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ satisfont l'inégalité de Miyadera-Feller-Phillips.

$$\|R_\lambda^n\| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\ \lambda)^n}; n = 1, 2, ..., M = \mathrm{const} \tag{2.2}$$

Ce résultat classique est présenté en détail dans [3]

On suppose que, sans perte de généralité, $M = 1$ lequel peut être obtenu en introduisant la norme équivalente $\sup\limits_{t\ \geq 0} \|T(t)\,x\|$.

Dans ce cas la suite infinie d'inégalités (2.2) est réduite à une inégalité de Hille-yosida

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\ \lambda}, \tag{2.3}$$

$T(t)$ devient un C_0 -semi-groupe de contractions, et l'opérateur A est dissipatif.

Définition 1.1 *Le problème de Cauchy pour l'équation* (2.1) *est dit asymptotiquement stable s'il est stable et de plus*

$$\lim_{t\ \to\ \infty} T(t)\,x = 0\ \forall\ x \in X \tag{2.4}$$

Cette propriété est de nature spectrale. Par exemple, si A est borné et son spectre se trouve dans le demi-plan ouvert $\{\lambda \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$, alors le problème de Cauchy correspondant est a.s. Cela découle directement de la formule

$$e^{At} = -(2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R_{\lambda} d\lambda \tag{2.5}$$

Où Γ est un contour fermé dans le demi-plan $\{\lambda \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ autour du spectre de A.
Si l'intersection $\sigma(A)$ avec l'axe imaginaire n'est pas vide, alors l'a.s n'est pas vérifiée. En tout cas, pour a.s, il est nécessaire pour l'opérateur A et A^* n'ont aucune valeur propre sur l'axe imaginaire. En effet, si

$$Ax = i\alpha x, \text{ où } \alpha \in \mathbb{R},\ x \neq 0,$$

alors

$$T(t)\,x = e^{i\alpha t}x$$

ne tend pas vers 0 quand $t \to \infty$. Maintenant ; soit

$$A^* f = i\alpha f \quad \text{pour quelques } f \in X^*;\ f \neq 0$$

Alors pour toute solution $x(t)$ pour (2.1) nous avons

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = i\alpha f(x(t)),$$

d'où

$$f(x(t)) = f(x(0))\,e^{i\alpha t}$$

Si $x(t) \to 0$ quand $t \to \infty$, alors $f(x(0)) = 0$. Par conséquent pour l'a.s. il suit que

$$f\,|D(A) = 0, i.e\ .f = 0$$

G.Sklyar et V.Shirman [7] ont établi, si A est un opérateur dissipatif tel que

1. A est borné.

2. $\sigma(A) \cap \ iR$ est dénombrable.
3. A^* n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire, alors le problème de Cauchy pour (2.1) est a.s.

De toute manière, dans les applications à l'équation différentielle ordinaire, partielle et au contrôle optimal, l'opérateur A est habituellement non borné.
D'autre part, la bornitude de A a été utilisée essentiellement dans la preuve [7]
Le but de ce travail est l'extension du critère de Sklyar-Shirman aux opérateurs non bornés. Pour cela nous aurons besoin de quelques faits simples au sujet des semi-groupes des isométries.
Soit $\{U(t), t \geq 0\}$ un C_0-semi-groupe isométrique (en général, non surjectif) et soit S son générateur.

Lemme 1.1 *Si* $\operatorname{Re}\lambda < 0$, *alors*

$$\|Sx - \lambda x\| \geq |\operatorname{Re}\lambda| \, \|x\|, \ \forall \ x \in D(S) \tag{2.6}$$

Ce lemme est contenu dans [3], ici nous donnons une preuve plus courte.
Preuve. On suppose $\lambda = -\varrho + i\omega, \ \omega \in \mathbb{R}, \ \varrho > 0$, et considérons la fonction vectorielle

$$u(t) = e^{-\lambda t} U(t)\, x, \ t \geq 0$$

Il est clair que

$$\|u(t)\| = e^{\varrho t} \|x\| \tag{2.7}$$

D'autre part

$$u(t) = x + \int_0^t \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau = x + \int_0^t e^{-\lambda t} U(\tau)(Sx - \lambda x)\, d\tau,$$

donc

$$\|u(t)\| \leq \|x\| + \frac{e^{\varrho t} - 1}{\varrho} \|Sx - \lambda x\|. \tag{2.8}$$

En comparant (2.7) et (2.8), nous obtenons (2.6). ■

Du lemme1.1 il suit que le demi-plan $\{\lambda \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ se trouve dans la composante régulière de l'opérateur S (voir [1]).
Il est connu que le nombre $\delta = \dim\ \{f:\ S^* f = \lambda f\}$ ne dépend pas de λ appartenant à la même composante régulière.
Par conséquent, pour le générateur de semi-groupe isométrique, on peut définir δ comme la dimension de l'éspace propre $\{f:\ S^* f = \lambda f\}$; $\operatorname{Re}\lambda < 0$.
Il est clair que si $iR \nsubseteq \sigma(S)$, alors $\delta = 0$ est équivalente à l'extendabilité du semi-groupe $U(t)$ à un C_0-groupe des isométries $U(t)$, $-\infty < t < +\infty$ [4].
En effet, la nécessité de la condition $\delta = 0$ est évidente.
Inversement, si $\delta = 0$, alors par (2.6) et le théorème de Hille-Yosida, $-S$ est le générateur de C_0 -semi-groupe de contraction $V(t)$; $t \geq 0$. Pour tout $x \in D(S)$ nous avons

$$\frac{d}{dt}\{U(t)V(t)x\} = [S, U(t)]V(t)x = 0.$$

Par conséquent,

$$U(t)V(t) = I$$

pour tout $t \geq 0$ (voir aussi [22]).

Théorème 1.1 *Soit A un opérateur engendrant un C_0 -semi-groupe borné $\{T(t), t \geq 0\}$. Si $\sigma(A) \cap\ iR$ est dénombrable et A^* n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire, alors le problème de Cauchy pour (2.1) est a.s.*

Preuve. *Nous supposons sans perdre de généralités que l'opérateur A est dissipatif, i.e. $\{T(t),\ t \geq 0\}$ est un semi-groupe de contractions. Alors les fonctions :*

$$\|T(t)x\|,\ t \geq 0$$

ne sont pas croissantes pour chaque x fixé, et ainsi la limite suivante existe

$$l(x) = \lim_{t\ \to\infty} \|T(t)x\|,\ x \in X. \tag{2.9}$$

$l(x)$ est une semi-norme dans X, de plus $l(x) \leq \|x\|$.

Nous avons à montrer $l(x) \equiv 0$. *Pour cela, nous considérons le sous-espace*

$$L = \ker l$$

et supposons au contraire que $L \neq X$.
Dans l'espace quotient

$$\tilde{X} = X/L$$

la semi norme l *engendre la norme* $\tilde{l}$, *et le semi-groupe* $\{T(t), \ t \geq 0\}$ *agit d'une façon naturelle, parceque* L *est un sous espace invariant pour tous les opérateurs* $T(t), \ t \geq 0$.
Puisque

$$l(T(s)x) = l(x), \ x \in X,$$

les opérateurs correspondants $\tilde{T}(t)$ *dans* $\tilde{X}$ *sont isométriques.*
Le semi-groupe d'isométries $\tilde{T}(t)$ *est fortement continu, parce que la semi-norme* l *est dominée par la norme originale dans* X.
Maintenant, nous prenons le complémentaire E *de* $\tilde{X}$ *et la norme* $\tilde{l}$. *Nous obtenons un espace de Banach* E , *un semi-groupe fortement continu* $U(t)$ *des isométries dans* E, *et le prolongement par continuité du semi-groupe* $\tilde{T}(t)$.
Soit S *un générateur de* $U(t)$, *nous supposons que* $\sigma(S) \subset \sigma(A)$. *Soit* $\lambda \notin \sigma(A)$, $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ *ainsi*

$$l(R_\lambda x) = \lim_{t \to \infty} \|R_\lambda T(t)x\| \leq \|R_\lambda\| \, l(x) \tag{2.10}$$

la résolvante R_λ *a une extention naturelle à un opérateur borné* $\tilde{R}_\lambda$ *dans* E.
Si $\operatorname{Re}\lambda > 0$ *alors*

$$R_\lambda x = -\int_0^\infty (T(t)x) \ e^{-\lambda t} \ dt \ , x \in X$$

Ceci implique

$$\tilde{R}_\lambda \tilde{x} = -\int_0^\infty (U(t)\tilde{x}) \, e^{-\lambda t} \ dt \ , \tilde{x} \in E,$$

par conséquent $\tilde{R}_\lambda$*coïncide avec la résolvante* $R_\lambda(S)$ $\forall$ λ, $\operatorname{Re}\lambda > 0$. *Maintenant d'après l'identité d'Hilbert*

$$\tilde{R}_\mu - \tilde{R}_\lambda = (\mu - \lambda)\,\tilde{R}_\lambda \tilde{R}_\mu,\ \ \lambda, \mu \notin \sigma(A),$$

d'où

$$\tilde{R}_\mu - R_\lambda(S) = (\mu - \lambda)\,R_\lambda(S)\,\tilde{R}_\mu,\ \operatorname{Re}\lambda > 0,\ \ \mu \notin \sigma(A),$$

par conséquent, $\operatorname{Im}\tilde{R}_\mu \subset D(S)$ *et*

$$(S - \lambda I)\,\tilde{R}_\mu = I + (\mu - \lambda)\,\tilde{R}_\mu,$$

ceci implique

$$(S - \mu I)\,\tilde{R}_\mu = I$$

d'une mainière analogue, nous obtenons

$$\tilde{R}_\mu\,(S - \mu I) = I/D(S)$$

donc $\mu \notin \sigma(S)$ *(et* $\tilde{R}_\mu = R_\lambda(S)$ *).*
A partir de l'inclusion $\sigma(S) \subset \sigma(A)$, *il suit que l'intersection* $\sigma(S) \cap iR$ *est dénombrable. Mais dans ce cas* $\sigma(S) \subset iR$, *et par conséquent* $\sigma(S)$ *est dénombrable.*
De plus, $\sigma(S) \neq \phi$, *donc* S *est le générateur d'un groupe des isométries (voir [5]).*
Donc $\sigma(S)$ *est non vide au plus sous ensemble fermé dénombrable de* iR.
Par conséquent, il contient un point isolé $i\omega \in iR$. *En ce point correspond la projection de Riesz* $P \neq 0$, *qui commute avec* S *et avec tout* $U(t)$. *Le sous espace* $\Omega = \operatorname{Im}P$ *est invariant pour* S *et pour tout* $U(t)$, *et le semi-groupe correspondant des isométries* $U_\omega(t) = U(t)/\Omega$ *est engendré par l'opérateur borné* $S_\Omega = S/\Omega$, $\sigma(S_\Omega) = \{i\omega\}$. *Il est bien connu que les isométries d'un seul point spectral sont des scalaires (voir [6]). De cela et du théorème de la projection spectrale, valable pour les semi-groupes uniformément continus, il suit que* $S_\Omega = i\omega$.
Par conséquent Ω *est l'espace propre de* S *avec la valeur propre* $i\omega$.

Alors pour toute fonctionnelle linéaire $h \in \operatorname{Im} P^*$, $h \neq 0$, *est une fonctionnelle propre pour* S^*, *avec la même valeur propre. Maintenant, nous prolongeons la fonctionnelle* h *à l'espace tout entier* X *en utilisant la suite d'homomorphisme* $X \to \tilde{X} \to E$. *Nous obtenons une fonctionnelle* $f \neq 0$, $f \in X^*$ *laquelle est une fonctionnelle propre de* A^* *pour la valeur propre* $i\omega$, *d'où on a une contradiction.* ■

Remarque 1.1 *Sous les conditions du théorème, l'opérateur* A *aussi n'a pas de valeurs propres imaginaires, puisque le problème de Cauchy est a.s.*
Par conséquent, si l'éspace de Banach X *est réflexif alors dans la formulation du théorème, nous pouvons exiger l'absence des valeurs propres imaginaires de* A *au lieu de* A^*.

Corollaire 1.1 *Si le spectre du générateur* A *d'un* C_0 *semi-groupe borné ne coupe pas l'axe imaginaire, alors le problème de Cauchy pour l'equation* (2.1) *est a.s.*

Remarque 1.2 *Les suppositions du théorème principal n'impliquent pas la conclusion forte*

$$\int_0^\infty \|T(t)\,x\|\,dt < \infty \tag{2.11}$$

même dans le cas d'un générateur borné (*voir* [*2*]) .
D'autre part, nous notons que le système peut être a.s. même si $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ *est non dénombrable* (*voir* [*8*]) .

CHAPITRE 3

Théorème Tauberien et stabilité de semi-groupe

Le chapitre 3, consiste à l'étude de la stabilité des semi-groupes présenté sous la forme d'un théorème important appelé le théorème Tauberien.

1 Introduction

Le comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle est liée fréquemment aux propriétés spectrales de l'opérateur fondamental. Cela est bien illustré par le théorème de Liapunov suivant.

Théorème 1.1 *Soit A une matrice $n \times n$. Alors $\lim\limits_{t \to \infty} U(t)\,x = 0$ pour toute solution U de l'équation*

$$\dot{U}(t) = AU(t)\,, \ t \geq 0$$

si et seulement si le spectre de A appartient au demi plan gauche ouvert.

Dans ce travail, on va discuter la généralisation de ce théorème en dimension infinie.

Soit $\{T(t)\,; t \geq 0\}$ un C_0 -semi-groupe dans un espace de Banach X. Nous disons que $\{T(t); t \geq 0\}$ est stable si

$$\lim_{t \to \infty} T(t)x = 0 \ \forall \ x \in X$$

Cela veut dire que les solutions de l'équation différentielle

$$\dot{U}(t) = AU(t) \ \ t \geq 0,$$

tendent vers 0 quand $t \ \to \infty$.
Notre but est de trouver des conditions spectrales sur A lesquelles impliquent la stabilité de $\{T(t); t \geq 0\}$.

1. Si $\{T(t); t \geq 0\}$ est stable, alors A n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire, mais il se peut que $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} \neq \phi$.
2. le théorème de la projection spectrale n'est pas vérifié en général. En particulier, il peut arriver que $\operatorname{Re}\lambda < 0 \ \forall \ \lambda \in \sigma(A)$ (où même $\sigma(A) = \phi$ [19]) mais $\{T(t); t \geq 0\}$ est non borné (voir la discussion dans [15], $A - III$).

Théorème 1.2 *Soit $\{T(t); t \geq 0\}$ un C_0 -semi-groupe borné engendré par A. Supposons que A n'a pas des valeurs propres sur l'axe imaginaire. Si $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ est dénombrable, alors $\{T(t); t \geq 0\}$ est stable.*

Le théorème de la stabilité est bien possible dans le sens suivant, pour chaque ensemble fermé non dénombrable $E \subset \mathbb{R}$, nous donnons un exemple d'un semi-groupe instable borné sur un espace réflexif tel que

$$\sigma(A) \subset iE \ et \ \sigma_p(A) = \phi$$

Dans le cas où $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ est vide (même si X est non réflexif), le théorème de la stabilité découle facilement du théorème Tauberien de Ingham[11]. Une preuve simple des cas spéciaux du théorème Ingham a été donné par Newman [16] pour les séries de Dirichlet, et par Korevaar[13] et Zagier[20] pour la transformation de Laplace.

Chacun a pris part d'une preuve simple du théorème des nombres premiers. Notre preuve du théorème de la stabilité est basée sur les techniques utilisées par Newman, korevaar et Zagier [20]. Alors qu'ils ont supposé que la transformation de Laplace est analytique à travers l'axe imaginaire, et Ingham exige que la transformation de Laplace doit être continue et prolongeable sur l'axe imaginaire.
Notre but principal consiste à prolonger les estimations au cas où la transformation de Laplace se comporte d'une manière irrégulière en certains points des axes.

2 Le théorème de stabilité pour les semi-groupes

Pour la suite, notons par $\mathcal{T} = \{T(t),\ t \geq 0\}$ un C_0 -semi-groupe dans un espace de Banach X, et par A le générateur de $\mathcal{T}$. Si $\mathcal{T}$ est stable, alors $\mathcal{T}$ est borné d'après le principe de la borne uniforme. Puisque le spectre de A est contenu dans le demi plan gauche $\{\lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re}\lambda \leq 0\}$.
Il y a des conditions sur $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ qui sont nécessaires pour la stabilité.

Proposition 2.1 *Si $\mathcal{T}$ est stable, alors $\sigma_r(A) \cap i\mathbb{R} = \phi$.*

on note par $\sigma_r(A)$ le spectre résiduel de A tel que

$$\sigma_r(A) = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \in \mathbb{C};\ \lambda I - A \text{ est injectif, n'est pas surjectif et le} \\ rang\ \ (\lambda I - A) \text{ n'est pas dense dans } X. \end{array} \right\}$$

Preuve. En utilisant la démonstration par l'absurde, on suppose qu'il existe un élément $s \in \sigma_r(A) \cap i\mathbb{R}$, alors $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $s = i\alpha \in \sigma_r(A)$.
D'après le théorème de Hahn-Banach $\sigma_r(A) = \sigma_p(A^*)$ le spectre ponctuel de A^* l'adioint de A. Donc $s = i\alpha\ \in \sigma_p(A^*)$.
Alors il existe $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$ tel que :

$$T^*(t)\,x^* = \exp(i\alpha t)\,x^*, t \geq 0.$$

Soit maintenant, $x \in X$,tel que $\langle x,\ x^*\rangle = 1$, alors $\langle T(t)\,x,\ x^*\rangle = \exp(i\alpha t)\,,\ t \geq 0$.
Donc $\mathcal{T}$ n'est pas stable, contradiction. ■

Habituellement ; la condition $\sigma_r(A) \cap i\mathbb{R} = \phi$ est facile à vérifier.
C'est en particulier le cas où X est réflexif.

Proposition 2.2 *Si X est réflexif et $\mathcal{T}$ est borné alors*

$$\sigma_r(A) \cap i\mathbb{R} = \sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}.$$

La preuve de cette proposition est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 2.1 *Si $\mathcal{T}$ est borné (X est arbitraire) alors $\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R} \subset \sigma_r(A)$.*

Preuve. Soit $\eta \in \sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}$. On peut supposer que $\eta = 0$ (autrement le semi groupe échelonné). Alors il existe $u \in X$, $u \neq 0$, tel que

$$T(t)\, u = u, \quad t \geq 0.$$

Soit $u^* \in X^*$ tel que $\langle u, u^* \rangle = 1$. Soit ϕ une forme linéaire positive dans $L^\infty[0, \infty)$ satisfaisant $\phi(1) = 1$, où 1-est la fonction constante.
On défini $x^* \in X$ par

$$\langle x,\ x^* \rangle = \phi(\langle T(.)\, x,\ u^* \rangle)$$

alors

$$\langle u,\ x^* \rangle = \phi(\langle T(.)\, u,\ u^* \rangle) = \phi(1) = 1,$$

et,

$$\langle T(t)\, x,\ x^* \rangle = \phi(\langle T(. + t)\, x,\ u^* \rangle) = \phi(\langle T(.)\, x, u^* \rangle) = \langle x, x^* \rangle \ \ \forall\, x \in X.$$

Donc $x^* \in D(A^*)$, $x^* \neq 0$ et $A^* x^* = 0$. ■

Preuve du proposition2.2 Il suit du lemme précédent, que

$$\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R} \subset \sigma_r(A) \ \left(\mathrm{A}^* \text{ le générateur d'un } C_0\text{-semi-groupe borné} \right)$$

$\sigma_r(A) \cap i\mathbb{R} = \sigma_p(A^*) \cap i\mathbb{R} \subset \sigma_r(A^*) = \sigma_p(A^{**}) = \sigma_p(A)$.

2.1 Théorème de la stabilité

Soit $\{T(t)\,; t \geq 0\}$ un C_0-semi-groupe borné engendré par A. Supposons que $\sigma_r(A) \cap i\mathbb{R} = \phi$. Si $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ est dénombrable, alors $\{T(t)\,; t \geq 0\}$ est stable.
En premier lieu, nous commençons par donner quelques contre exemples qui montrent que le théorème de la stabilité est bien possible dans plusieurs cas.

Exemple 2.1 *Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ fermé et non dénombrable. Alors il existe un groupe unitaire*

$$\mathcal{U} = \{U(t),\ t \in \mathbb{R}\}$$

engendré par l'opérateur B, satisfaisant

$$\sigma(B) \subset iE,\ \sigma_r(B) = \phi$$

mais $\mathcal{U}$ n'est pas stable.
En effet, $\lim\limits_{t\,\to\,\infty} U(t)\,x = 0$ implique $x = 0$.

Preuve. Il existe une mesure de probabilité non atomique $\mu \in E$. Soit $X = L^2(E,\ \mu)$ et $(U(t)\,f)(s) = e^{ist} f(s),\ t \in \mathbb{R}$ ■

Exemple 2.2 *La condition de la bornitude sur $\mathcal{T}$ ne peut pas être considérablement faible, la borne inférieure $\omega(\mathcal{T})$ de $\mathcal{T}$ est définie par :*

$$\omega(\mathcal{T}) = \inf\left\{\upsilon \in \mathbb{R}, \|T(t)\| \leq M\overset{\upsilon t}{e}\ t \geq 0 \text{ pour un certain } M \geq 1\right\}.$$

Il existe un C_0-semi-groupe $\mathcal{T}$ tel que $\omega(\mathcal{T}) = 0,\ \operatorname{Re}\lambda < 0,$ pour $\lambda \in \sigma(A)$, mais $\mathcal{T}$ n'est pas stable.

Preuve. Soit $X = c_0$,

$$\begin{aligned}(T(t)\,x)_{2n-1} &= \exp\left(-t\ /n^2 + int\right).\left(x_{2n-1}\ + tx_{2n}\right),\\ (T(t)\,x)_{2n} &= \exp\left(-t\ /n^2 + int\right) x_{2n}.\end{aligned}$$

Alors $\omega(\mathcal{T}) = 0$. Le générateur A est donné par

$$(Ax)_{2n-1} = \left(-1\ /n^2 + in\right) x_{2n-1} + x_{2n}$$

$$(Ax)_{2n} = \left(-1\ /n^2 + in\right) x_{2n}$$

toute fois, ceci définit un élément dans X, d'où $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \phi$.
Maintenant, soit $y_{2n-1} = 0,\ y_{2n} = \frac{1}{n^2}$. Alors $y \in D(A)$,

$$\|T(t)\,y\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{t}{n^2} e^{\left(-\frac{t}{n^2}\right)} \to e^{-1} \text{ quand } t \to \infty$$

donc $\mathcal{T}$ n'est pas stable. ■

Exemple 2.3 *Il n'est pas possible de trouver une condition spectrale nécessaire et suffisante pour la stabilité. En effet ; soit* $X = C_0[0,\infty)$ *et*
$(T(t)\,f)(x) = f(x+t)$. *Alors*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq 0\},$$

et $\mathcal{T}$ *est stable.*
Dans la suite nous allons donner une conséquence du théorème de stabilité.

Corollaire 2.1 *Soit* X *un espace de Banach réflexif et* $\mathcal{T} = \{T(t)\,; t \geq 0\}$ *un* C_0 *-semi-groupe borné d'un générateur* A.
Si $\sigma_r(A) \cap i\mathbb{R}$ *est dénombrable, alors* X *est la somme directe de sous-espaces fermés invariants* X_s *et* X_g *où*

$$X_s = \left\{x \in X, \lim_{t\to\infty} T(t)\,x = 0\right\},$$

et

$$X_g = \overline{co}\,\{x \in D(A) : Ax = \lambda x \text{ pour chaque } \lambda \in i\mathbb{R}\}.$$

De plus, la restriction de $\mathcal{T} = \{T(t)\,; t \geq 0\}$ *dans* X_g *peut être prolongée à un* C_0*-groupe borné dans* X_g.

Preuve. D'après le théorème de $\mathcal{J}$acobs, Deleew et Glicksberg ([14], le théorème 4.4 p105), X est la somme directe de X_g et le sous espace fermé X_s tels que les deux sont invariants. De plus, notons $\mathcal{T}_g$, $\mathcal{T}_s$ les restrictions du semi-groupe de $\mathcal{T}$ sur X_g et X_s respectivement, et par A_g et A_s leurs générateurs, alors la fermeture de $\mathcal{T}_g$ en ce qui concerne la topologie faible de l'opérateur est un multiplicatif des opérateurs dans X_g. D'où $\mathcal{T}_g$ consiste des opérateurs bijectifs et par conséquent, $\mathcal{T}_g$ peut être prolongé à un C_0-groupe borné dans X_g.
De plus, $\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R} = \phi$ par construction. Puisque $\sigma(A_s) \subset \sigma(A)$, il suit du théorème de la stabilité2.1 conjointement avec la proposition2.2 que $\mathcal{T}$ est stable. ■

En conclusion, nous mentionnons le cas où la supposition que $\mathcal{T}$ est à priori borné, peut être négligé.

Proposition 2.3 *On suppose que $\mathcal{T}$ est éventuellement une norme continue*

$$(i.e. il\ existe\ t_0 \geq 0\ tel\ que: \lim_{h\to\infty} \|T(t_0+h) - T(t_0)\| = 0).$$

Si $\operatorname{Re}\lambda < 0\ \forall\lambda \in \sigma(A)$, *alors* $\{T(t);\ t \geq 0\}$ *est stable.*

Preuve. Puisque $\mathcal{T}$ est éventuellement une norme continue, l'ensemble $c := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq -1\}$ est compact (voir [15], A-II théorème 1.20). Par conséquent $s(A) := \sup\{\operatorname{Re}\lambda,\ \lambda \in \sigma(A)\} < 0$.
donc d'après ([15], A-III 6.6), $\omega(T) < 0$, et donc $\lim_{t\to\infty} \|T(t)x\| = 0$. ■

Preuve du théorème de stabilité

La suite est notre estimation principale pour la transformation de Laplace. C'est ici où nous utilisons la technique de Newman [16](voir Korevaar [13] et Zagier [20]). Les estimations analogues pour les séries puissances sont données par Allan, O'Farrell et Ransford[8].

Lemme 2.2 *Soit X un espace de Banach et*

$$f : [0, \infty) \to X,$$

une fonction fortement mesurable bornée, on note par

$$g(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt, \quad (\operatorname{Re} z > 0)$$

sa transformée de Laplace.
Soit iE l'ensemble de tous les points singuliers de g sur l'axe imaginaire. Supposons que $0 \notin E$.
Soit

$$R > 0, \xi \in \mathbb{R}, 0 < \varepsilon_j < \left|\xi_j\right|, \ j = 1...n$$

tel que les intervalles $(-\infty, -R)$, (R, ∞), $\left(\xi_j - \varepsilon_j, \xi_j + \varepsilon_j\right)$ $j = 1...n$ sont disjoints et ils couvrent E.
Supposons plus loin que pour $j = 1...n$ il existe $\eta_j \in \left(\xi_j - \varepsilon_j, \xi_j + \varepsilon_j\right)$ tel que

$M_j := \sup\limits_{t\ \geq 0} \left\| \int_0^t \exp\left(-i\eta_j s\right) f(s)\, ds \right\| < \infty, \quad j = 1...n$
alors
$\lim\limits_{t\ \to \infty} \sup \left\| \int_0^t f(s)\, ds - g(0) \right\| \leq$

$$\leq \frac{2M_0}{R} \prod_{j=1}^{n} a_j + 12 \sum_{j=1}^{n} M_j\ \varepsilon_j\ \xi_j^2 \left(\left|\xi_j\right| - \varepsilon_j\right)^{-1} \left(\xi_j^2 - \varepsilon_j^2\right)^{-1} \prod_{k=1, k\neq j}^{n} b_{jk} \tag{3.1}$$

où

$$\begin{aligned}
M_0 &= \sup_{t\ \geq 0} \|f(t)\|, \\
a_j &= \left(1 + \varepsilon_j^2 \left(R - \left|\xi_j\right|\right)^{-2}\right) \xi_j^2 \left(\xi_j^2 - \varepsilon_j^2\right)^{-1}, \\
b_{j\ k} &= \left(1 + \varepsilon_k^2 \left(\left|\xi_j - \xi_k\right| - \varepsilon_j\right)^{-2}\right) \xi_k^2 \left(\xi_k^2 - \varepsilon_k^2\right)^{-1} \ \ k \neq j.
\end{aligned}$$

Preuve. Après avoir renuméroté, nous pouvons arranger que
$-R \leq \xi_1 - \varepsilon_1 < \xi_1 + \varepsilon_1 < \xi_2 - \varepsilon_2 < \xi_2 + \varepsilon_2 < ... < \xi_n + \varepsilon_n \leq R$
Considérons g l'extension d'une fonction holomorphe dans un ensemble simplement connexe ouvert U contenant $\{z : \operatorname{Re} z \geq 0,\ z \notin iE\}$, et prenons un contour γ dans U composé du demi côté droit du cercle $|z| = R$, les demis côtés droits des cercles $\left|z - i\xi_j\right| = \varepsilon_j$ et des chemins lisses γ_j $(0 \leq j \ \leq n)$ joingnant $-iR$ à $i(\xi_1 - \varepsilon_1)$ $(j = 0)$, $i\left(\xi_j + \varepsilon_j\right)$ à $i\left(\xi_{j+1} - \varepsilon_{j+1}\right)$ $(0 < j < n)$ et $i(\xi_n + \varepsilon_n)$ à iR $(j = n)$ s'allonger (exceptés les points limités) dans $U \cap (\operatorname{Re} \lambda < 0)$. Alors γ est un contour fermé, qui peut être choisi simple avec 0 comme point intérieur.
Soit

$$h_j(z) = \left(1 + \varepsilon_j^2 \left(z - i\xi_j\right)^{-2}\right) \xi_j^2 \left(\xi_j^2 - \varepsilon_j^2\right)^{-1},$$

$$h(z) = \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \prod_{j=1}^{n} h_j(z),$$

$$g_t(z) = \int_0^t e^{-sz} f(s)\, ds,\ \ (z \in \mathbb{C}, t \geq 0).$$

D'après le théorème de Cauchy

$$(g(0) - g_t(0)) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(z)\left(g(z) - g_t(z)\right) e^{tz} z^{-1} dz. \tag{3.2}$$

Nous estimons l'intégrale sur les différentes parties de γ.
(a) On a $|z| = R,\ \operatorname{Re} z > 0$. Si

$$z = R\, e^{i\,\theta} \left(\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

alors

$$\begin{aligned}\left\|\left(g\left(z\right)-g_t\left(z\right)\right)e^{tz}\right\| &= \left\|\int_t^{\infty} e^{-(s-t)z} f\left(s\right)ds\right\| = \left\|\int_0^{\infty} e^{-rz} f\left(r+t\right)dr\right\| \\ &\leq M_0 \int_0^{\infty} e^{-r\operatorname{Re} z} dr = M_0 \left(R\cos\theta\right)^{-1},\end{aligned}$$

et on a aussi $\left|1+\frac{z^2}{R^2}\right| = 2\cos\theta,\ \left|h_j\left(z\right)\right| \leq a_j$
donc

$$\left\|\int_{|z|=R,\ \operatorname{Re} z>0} h\left(z\right)\left(g\left(z\right)-g_t\left(z\right)\right)e^{tz}z^{-1}dz\right\| \leq \frac{2M_0\pi}{R}\prod_{j=1}^{n} a_j \tag{3.3}$$

(b) Considérons l'intégrale sur $\left|z-i\xi_j\right| = \varepsilon_j$. Si $z = i\xi_j + \varepsilon_j\ e^{i\ \theta}\left(\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$,
alors en posant $F_j\left(t\right) = \int_0^t \exp\left(-i\eta_j s\right) f\left(s\right)ds,\ \alpha_j = i\left(\xi_j-\eta_j\right)+\varepsilon_j\ e^{i\ \theta}$
nous obtenons

$$\left\|\left(g\left(z\right)-g_t\left(z\right)\right)e^{tz}\right\| = \left\|e^{tz}\int_t^{\infty}\exp\left(-\alpha_j\ s\right)\exp\left(-i\eta_j s\right)f\left(s\right)ds\right\|$$

$$= \left\|e^{tz}\left\{-\exp\left(-t\ \alpha_j\right)F_j\left(t\right)+\alpha_j\int_t^{\infty}\exp\left(-\alpha_j s\right)F_j\left(s\right)ds\right\}\right\|$$

$$\leq M_j + 2\varepsilon_j M_j\int_t^{\infty} e^{-(s-t)\varepsilon_j\cos\theta}\ ds$$

$$= M_j\left(1+\frac{2}{\cos\theta}\right) \leq \frac{3M_j}{\cos\theta},$$

et on a aussi $\left|1+\dfrac{z^2}{R^2}\right| \leq 2,\ \left|h_j\left(z\right)\right| = 2\cos\theta.\xi_j^2\left(\xi_j^2-\varepsilon_j^2\right)^{-1},$
$\left|h_k\left(z\right)\right| \leq b_{j\ k}\ \left(k\neq j\right),\ \left|z^{-1}\right| \leq \left(\left|\xi_j\right|-\varepsilon_j\right)^{-1}$

d'où

$$\left\| \int\limits_{\left|z-i\ \xi_j\right|=\varepsilon_j,\ \mathrm{Re}\, z>0} h(z)\,(g(z)-g_t(z))\, e^{tz} z^{-1} dz \right\|$$
$$\leq \varepsilon_j 12 M_j \pi \xi_j^2 \left(\left|\xi_j\right| - \varepsilon_j\right)^{-1} \left(\xi_j^2 - \varepsilon_j^2\right)^{-1} \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} b_{j\ k} \tag{3.4}$$

(c) D'après le théorème de la convergence bornée,

$$\lim_{t\ \to\infty} \int\limits_{\gamma_j} h(z)\, g(z)\, e^{tz} z^{-1} dz = 0. \tag{3.5}$$

(d) Puisque g_t est une fonction entière

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma_0\ \cup\ldots\cup\ \gamma_n} h(z)\, g_t(z)\, e^{tz} z^{-1} dz &= \int\limits_{|z|=R,\ \mathrm{Re}\, z\ <0} h(z)\, g_t(z)\, e^{tz} z^{-1} dz \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\left|z-i\ \xi_j\right|=\varepsilon_j,\ \mathrm{Re}\, z\ <0} h(z)\, g_t(z)\, e^{tz} z^{-1} dz\end{aligned} \tag{3.6}$$

si $z = R\ e^{i\ \theta}\ \left(\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$ alors

$$\begin{aligned}\left\|g_t(z)\, e^{tz}\right\| &= \left\| \int_0^t e^{-(s-t)z} f(s)\, ds \right\| \leq M_0 \int_0^t e^{-(s-t)R\ \cos\theta} ds \\ &\leq M_0 \left(R\left|\cos\theta\right|\right)^{-1}\end{aligned}$$

Nous estimons comme dans (a), on obtient

$$\left\| \int\limits_{|z|=R,\ \mathrm{Re}\, z\ <0} h(z)\, g_t(z)\, e^{tz} z^{-1} dz \right\| \leq \frac{2M_0\pi}{R} \prod_{j=1}^{n} a_j \tag{3.7}$$

pour $z = i\xi + \varepsilon e^{i\ \theta} \left(\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\right), \alpha_j = i\left(\xi_j - \eta_j\right) + \varepsilon_j\ e^{i\ \theta}$ on a

$$\begin{aligned}
\left\|g_t(z)\, e^{tz}\right\| &= \left\| e^{tz} \int_0^t \exp\left(-\alpha_j\ s\right) \exp\left(-i\eta_j s\right) f(s)\, ds \right\| \\
&= \left\| \exp\left(it\ \eta_j\right) F_j(t) + \alpha_j \int_0^t \exp\left(tz - \alpha_j s\right) F_j(s)\, ds \right\| \\
&\leq M_j + 2\varepsilon_j M_j \int_0^t e^{-(s-t)\varepsilon_j \cos\theta} ds \\
&\leq \frac{3M_j}{|\cos\theta|}
\end{aligned}$$

Nous estimons comme dans (b), on obtient

$$\left\| \int_{\left|z - i\ \xi_j\right| = \varepsilon_j,\ \operatorname{Re} z < 0} h(z)\, g_t(z)\, e^{tz} z^{-1} dz \right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon_j 12 M_j \pi \xi_j^2 \left(\left|\xi_j\right| - \varepsilon_j\right)^{-1} \left(\xi_j^2 - \varepsilon_j^2\right)^{-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} b_{j\ k}. \tag{3.8}$$

Maintenant ; (3.1) découle de (3.2)-(3.8). ■

Remarque 2.1 *Comme un cas particulier du lemme2.2 nous obtenons si* $E \cap [-R, R] = \phi$, *alors*

$$\lim_{t\ \to\infty} \sup \left\| \int_0^t f(s)\, ds - g(0) \right\| \leq \frac{2M_0}{R}. \tag{3.9}$$

C'est précisément ce qu'a été démontré par Korevaare [13] et Zagier [20]

2.2 Preuve du théorème de stabilité

Soit $\mathcal{T} = \{T(t)\,; t \geq 0\}$ un C_0 -semi-groupe tel que $M := \sup_{t\geq 0} \|T(t)\| < \infty$. Notons par A le générateur de $\mathcal{T}$ et supposons que $\sigma_r(A) \cap i\mathbb{R} = \phi$ et que

$$E := \{\eta \in \mathbb{R} : i\eta \in \sigma(A)\}$$

est dénombrable. Echelonnant $\mathcal{T}$, si nécessaire nous pouvons supposer que $0 \notin E$. Soit $R > 0$ tel que $\pm R \notin E$ et soit $E_0 = [-R, R] \cap E$. Pour un nombre ordinal $\alpha > 0$, soit E_α l'ensemble de tout groupe du points de $E_{\alpha-1}$ si α n'est pas une limite ordinale, et

$$E_\alpha = \cap_{\beta\, <\alpha} E_\beta$$

si α est une limite ordinale.
On monter d'abord les assertions inductives suivantes

Soit α un nombre ordinal, si $E_\alpha = \phi$, alors

$$\limsup_{t\to\infty} \left\|T(t)\,A^{-1}x\right\| \leq \frac{2M}{R}\,\|x\| \qquad x \in X, \tag{3.10}$$

Si E_α est couvert par les intervalles disjoints $\left(\eta_j - \varepsilon_j, \eta_j + \varepsilon_j\right)$, $j = 1, ..., n$,

où $\eta_j \in E_\alpha$,
$\left|\eta_j\right| - \varepsilon_j > 0$, $R - \left|\eta_j\right| - \varepsilon_j > 0$ et $\eta_j \pm \varepsilon_j \notin E$, $j = 1, ..., n$,

alors

$$\limsup_{t\to\infty} \left\|T(t)\,A^{-1}Ux\right\| \leq \frac{2M\ \|Ux\|}{R}\prod_{k=1}^{n}\alpha_j$$

$$+48\,\pi\,M\sum_{j\,=1}^{n}\|U_jx\|\ \left|\eta_j\right|\ \varepsilon_j\left(\left|\eta_j\right| - \varepsilon_j\right)^{-1}\left(\eta_j^2 - \varepsilon_j^2\right)^{-1}\ \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} b_{j\ k}. \tag{3.11}$$

où

$$U=\prod_{j=1}^{n}\left[T\left(\frac{2\pi}{|\eta_j|}\right)-I\right]$$

$$U_j=\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left[T\left(\frac{2\pi}{|\eta_j|}\right)-I\right]$$

$$\alpha_j=\left(1+\varepsilon_j^2\left(R-|\eta_j|\ \right)^{-2}\right)\eta_j^2\left(\eta_j^2-\varepsilon_j^2\right)^{-1},$$

$$\beta_{jk}=\left(1+\varepsilon_k^2\left(|\eta_j-\eta_k|-\ \varepsilon_j\right)^{-2}\right)\eta_k^2\left(\eta_k^2-\varepsilon_k^2\right)^{-1}\quad(k\neq j)$$

Une fois ceci est établi, le théorème est prouvé comme suit.
Puisque E_α est compact et dénombrable, E_α est vide où contient des points isolés, donc $E_\alpha=\phi$. Donc il suit pour un certain α, $E_\alpha=\phi$. D'où d'après l'assertion inductive (3.10) est satisfaite. Puisque $R>0$ peut être choisi arbitrairement grand, il suit que

$$\lim_{t\to\infty}T(t)\,x=0\ \forall\ x\in D(A)$$

Puisque $D(A)$ est dense dans X et $\mathcal{T}$ est borné, ceci implique que $\mathcal{T}$ est stable. Donc il reste à prouver l'assertion inductive.
Premièrement, considérons le cas $\alpha=0$

Prendre $x\in X$, et on pose

$$f(t)=T(t)\,Ux\ \ (t\geq 0)$$

Alors

$$g(z)=\int_0^\infty e^{-tz}T(t)\,Uxdt=R(z,A)\,Ux\qquad(\operatorname{Re}z>0)$$

Donc l'ensemble singulier de g dans $i\mathbb{R}$ est contenu dans iE et

$$g(0)=-A^{-1}Ux$$

De plus
$$\int_0^t f(s)\,ds = \int_0^t T(s)\,AA^{-1}Ux\ ds = T(t)\,A^{-1}Ux - A^{-1}Ux.$$
D'où
$$\left\|T(t)\,A^{-1}Ux\right\| = \left\|\int_0^t f(s)\,ds - g(0)\right\|$$
De plus
$$\|f(t)\| \leq M\,\|Ux\| \ \ (t \geq 0)\,.$$
Ainsi, soit $U = I$ l'assertion suit de la remarque 2.1 dans le cas où $E_0 = \phi$.

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\int_0^t \exp\left(-i\eta_j s\right) f(s)\,ds &= \int_0^t \exp\left(-i\eta_j s\right) T(s)\left[T\left(\frac{2\pi}{\left|\eta_j\right|}\right) - I\right] U_j x\ ds \\
&= \int_{\frac{2\pi}{\left|\eta_j\right|}}^{t+\frac{2\pi}{\left|\eta_j\right|}} \exp\left(-i\eta_j s\right) T(s)\,U_j x\ ds \\
&\quad - \int_0^t \exp\left(-i\eta_j s\right) T(s)\,U_j x\ ds \\
&= \int_t^{t+\frac{2\pi}{\left|\eta_j\right|}} \exp\left(-i\eta_j s\right) T(s)\,U_j x\ ds \\
&\quad - \int_0^{\frac{2\pi}{\left|\eta_j\right|}} \exp\left(-i\eta_j s\right) T(s)\,U_j x\ ds,
\end{aligned}$$

et donc
$$\left\| \int_0^t \exp\left(-i\eta_j s\right) f(s)\, ds \right\| \leq \frac{4\pi}{|\eta_j|} M \|U_j x\| \qquad (j = 1, ..., n).$$
Donc (3.11) suit du lemme 2.2.

Maintenant, on suppose que α est un nombre ordinal > 0 tel que la supposition est vraie pour tous ordinaux $\beta < \alpha$. Nous montrons que la supposition est vraie pour α.

Premier cas α est une limite ordinal. Alors $E_\alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} E_\beta$.
Si $E_\alpha = \phi$, alors (d'après la compacité) il existe $\beta < \alpha$ tel que $E_\beta = \phi$. Donc (3.10) suit de la supposition inductive.
si E_α est contenu dans la réunion de $\left(\eta_j - \varepsilon_j, \eta_j + \varepsilon_j\right)$ $(j = 1, ..., n)$, alors (d'après la compacité) il existe $\beta < \alpha$ tel que E_β contenu dans la même réunion. Donc l'hypothèse inductive conclue dans (3.11).

Deuxième cas α n'est pas une limite ordinale. Supposons que
$$E_\alpha \subset \bigcup_{j=1}^{n} \left(\eta_j - \varepsilon_j, \eta_j + \varepsilon_j\right)$$
donc il y'a quelques points $\eta_{n+1}, ..., \eta_{n+p} \in E_{\alpha-1}$ qui n'appartiennent pas à ces intervalles. Prenons $\varepsilon_j > 0$ $(j = 1, ..., n+p)$ tels que les intervalles $\left(\eta_j - \varepsilon_j, \eta_j + \varepsilon_j\right)$ $(j = 1, ..., n+p)$ sont disjoints et tels que
$$\eta_j \pm \varepsilon_j \notin E, \quad \left|\eta_j\right| - \varepsilon_j > 0, \quad R > \left|\eta_j\right| + \varepsilon_j \quad (j = n+1, ..., n+p)$$
alors
$$E_{\alpha-1} \subset \bigcup_{n+1}^{n+p} \left(\eta_j - \varepsilon_j, \eta_j + \varepsilon_j\right)$$

Soit

$$
\begin{aligned}
V &= \prod_{j=1}^{n+p}\left[T\left(\frac{2\pi}{|\eta_j|}\right)-I\right],\\
V_j &= \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n+p}\left[T\left(\frac{2\pi}{|\eta_j|}\right)-I\right] \quad (j=1,...,n+p)
\end{aligned}
$$

alors d'après la supposition inductive

$$
\limsup_{t\to\infty}\left\|T(t)\,A^{-1}V_y\right\| \leq \frac{2M\ \|V_y\|}{R}\prod_{j=1}^{n+p}\alpha_j
$$

$$
+\,48\,\pi\,M\sum_{j=1}^{n+p}\|V_jy\|\ \left|\eta_j\right|\ \varepsilon_j\left(\left|\eta_j\right|-\varepsilon_j\right)^{-1}\left(\eta_j^2-\varepsilon_j^2\right)^{-1}\ \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} b_{j\ k}.
$$

pour tout $y\in X$. C'est vrai pour ε_j $(j=n+1,...,n+p)$ arbitrairement petit. Quand $\varepsilon_j\to 0$ $(j=n+1,...,n+p)$, on a

$$
\begin{aligned}
\alpha_j &\to 1 \quad (j=n+1,...,n+p)\\
b_{j\ k} &\to 1 \ \ (k=n+1,...,n+p,\ j=1,...,n+p,\ k\neq j)\\
b_{j\ k} &\to \left(1+\varepsilon_k^2\left|\eta_j-\eta_k\right|^{-2}\right)\eta_k^2\left(\eta_k^2-\varepsilon_k^2\right)^{-1}\\
&\qquad\qquad (k=1,...,n,\ j=n+1,...,n+p,\ k\neq j)
\end{aligned}
$$

d'où pour tout $y\in X$,

$$
\limsup_{t\to\infty}\left\|T(t)\,A^{-1}V_y\right\| \leq \frac{2M\ \|V_y\|}{R}\prod_{j=1}^{n}\alpha_j
$$

$$
+\,48\,\pi\,M\sum_{j=1}^{n}\|V_jy\|\ \left|\eta_j\right|\ \varepsilon_j\left(\left|\eta_j\right|-\varepsilon_j\right)^{-1}\left(\eta_j^2-\varepsilon_j^2\right)^{-1}\ \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} b_{j\ k}. \quad (3.12)
$$

Maintenant, posons
$$W=\prod_{j=n+1}^{n+p}\left[T\left(\frac{2\pi}{|\eta_j|}\right)-I\right]$$
donc
$$V=UW,\ V_j=U_jW.$$

Puisque
$$1\notin\left\{\exp\left(\frac{2\pi z}{|\eta_j|}\right);z\in\sigma_r(A)\right\}=\sigma_r\left(T\left(\frac{2\pi}{|\eta_j|}\right)\right)\diagdown\{0\}$$
(remarquons que le théorème de la projection spectrale est vrai pour le spectre résiduel, voir [15], $A-III$ 6.3), chacun des opérateurs $\left[T\left(\frac{2\pi}{|\eta_j|}\right)-I\right]$ ont des rangs dense, et donc W est de rang dense. Donc pour $x\in X$, il existe une suite (y_r) dans X telle que $\lim\limits_{r\to\infty}Wy_r=x$.
Appliquons (3.12) à y_r, prenons la limite pour $r\to\infty$ et utilisons le fait que $\|T(t)A^{-1}\|$ est borné, on obtient (3.11) .

On obtient (3.10) de la même façon dans le cas où $E_\alpha=\phi$.

Remarque 2.2 *Soit $\mathcal{T}=\{T(t);t\geq0\}$ un C_0 -semi-groupe d'un générateur A tel que*
$$\operatorname{Re}\lambda\leq0\ \forall\lambda\in\sigma(A),\ \sigma_r(A)\cap i\mathbb{R}=\phi$$
et $\sigma(A)\cap i\mathbb{R}$ est dénombrable. Si au lieu de la bornitude de $\mathcal{T}$ nous supposons qu'il existe un opérateur borné B commutatif avec $T(t)$ $\forall\ t\geq0$ tel que
$$\sup_{t\ \geq0}\|T(t)B\|<\infty,$$

alors $\lim\limits_{t\ \to\infty}\|T(t)Bx\|=0\ \forall\ x\in X$.
Cela est prouvé par une petite modification en haut (dans la supposition inductive

nous avons à écrire $\lim\limits_{t \to \infty} \sup \|T(t) A^{-1} U \ Bx\|$ *sur le côté gauche de* (3.11) *et*

$$\lim_{t \to \infty} \left\|T(t) A^{-1} \ Bx\right\| \leq \frac{2M \ \|x\|}{R}$$

au lieu de (3.10) *.)*

En conséquence, nous obtenons si

$$\sup_{t \geq 0} \|T(t) x\| < \infty \ \forall \ x \in D(A),$$

$\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ *est dénombrable,* $\sigma_r(A) \cap i\mathbb{R} = \phi$ *et*

$$\operatorname{Re} \lambda \leq 0 \ \forall \lambda \in \sigma(A)$$

alors

$$\lim_{t \to \infty} \|T(t) x\| = 0 \ \forall \ x \in D(A)$$

On peut voir ceci, en prenant $B = R(\lambda, A)$ *pour chacun* $\lambda \notin \sigma(A)$ *dans l'hypothèse précitée.*

Remarque 2.3 *(Un résultat de la stabilité individuel). Soit* $\mathcal{T}$ *un* C_0 *-semi-groupe d'un générateur* A*. Supposons que* $\operatorname{Re} \lambda < 0 \ \forall \lambda \in \sigma(A)$*. Si* $x \in D(A)$ *tel que* $\sup\limits_{t \geq 0} \|T(t) \ Ax\| < \infty$*, alors* $\lim\limits_{t \to \infty} \|T(t) x\| = 0$.

Preuve. Soit

$$f(t) = T(t) \ Ax, \ g(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) \ dt = R(z, A) \ Ax \quad (\operatorname{Re} z > 0)$$

alors

$$T(t) x = x + \int_0^t T(s) \ Ax \ ds = -g(0) + \int_0^t f(s) \ ds$$

Donc la supposition suit la remarque 2.1 ■

Exemple 2.4 *(b) Montre que ce résultat n'est pas vrai si simplement* $\|T(t)\,x\|$ *est borné.*
Nous ne savons pas si le résultat de stabilité individuel peut être étendu au cas où $\sigma(A)\cap i\mathbb{R}$ *est dénombrable et*

$$\sigma(A)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}\lambda\leq 0\}\,,\ \ \sigma_r(A)\cap i\mathbb{R}=\phi$$

CHAPITRE 4

La relation entre le spectre ponctuel borné d'un générateur A et son adjoint A^*

Dans ce chapitre, nous obtenons la relation entre le spectre ponctuel borné d'un générateur A d'un C_0 -semi-groupe et son adjoint A^*.
Ces relations se rapprochent avec les résultats dû à Lyubich-Phóng et Arendt-Batty, résultats de stabilité donnés sur les C_0 -semi-groupes positifs.
Après le théorème de Liapunov sur la stabilité classique, beaucoup de contributions ont été établies dans le but d'obtenir des généralisations de ce théorème en dimensions infinies. Un des résultats les plus récent dans ce contexte est le théorème suivant sur la stabilité dû à Arendt-Batty et Lyubich-Phóng.

1 Théorème du stabilité

Théorème 1.1 *Soit $\{T(t),\ t \geq 0\}$ un C_0 -semi-groupe borné dans un espace de Banach E et A son générateur, on note par $\sigma(A)$ le spectre de A.*
Si $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ est dénombrable et aucune valeur propre de A^* n'appartient à l'axe

imaginaire, alors $\{T(t),\ t \geq 0\}$ *est uniformément stable c'est-à-dire*

$$\lim_{t\ \to\infty} T(t)\, f = 0\ \forall\ f \in E. \tag{4.1}$$

Si nous supposons que l'espace de Banach E *est réflexif, alors nous pouvons le reformuler dans une forme plus convenable, exiger l'absence des valeurs propres imaginaires de* A *au lieu de son adjoint* A^* *plus précisément nous avons*

Théorème 1.2 *Soit* $\{T(t),\ t \geq 0\}$ *un* C_0 *-semi-groupe borné sur un espace de Banach réflexif* E *et* A *son générateur, si* $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ *est dénombrable et les valeurs propres de* A *ne sont pas sur l'axe imaginaire, alors* $\{T(t),\ t \geq 0\}$ *est uniformément stable.*

Remarque 1.1 *Le résultat ci-dessus montre l'importance du lien bien connu entre le spectre ponctuel borné du générateur* A *du* C_0 *-semi-groupe et le spectre ponctuel borné de son adjoint* A^*. *Cette remarque est consacrée pour étudier ce problème.*
Soit E *un espace de Banach lattice avec un cône positif* E_+. *L'idéal principal dans* E, *engendré par un certain* $f \in E_+$ *noté par* E_f.*On rappelle que* $f \in E_+$ *est appelé un point* ***quasi-intérieur*** *de* E, *si* E_f *est dense dans* E *voir[31] Pour chaque* $f \in E_+$, *l'idéal principal* E_f. *induit de la fonction gauge* p_f *de* $[-f, f]$ *est un AM-espace d'unité* f *et l'injection canonique* $E_f. \to E$ *est continue ([31],II.7.)*
Si A *est le générateur d'un* C_0 *-semi-groupe* $\{T(t), t \geq 0\}$, *on note le spectre (spectre ponctuel, résiduel) de* A *par* $\sigma(A)$ $(\sigma_p\ (A), \sigma_r\ (A))$ *respectivement, et l'ensemble résolvant par*

$$\rho(A) :\ = \mathbb{C}/\sigma(A)$$

et la résolvante par

$$R(\lambda, A) :\ = (\lambda - A)^{-1}$$

La borne spectrale de A *est définie par*

$$s(A) :\ = \sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\},$$

et le spectre ponctuel borné de A par

$$\sigma_{p.b}\ (A) = \{\lambda \in \sigma_p\ (A) : \operatorname{Re}\lambda = s\,(A)\}$$

Si $\{T\,(t)\,,\ t \geq 0\}$ un C_0 -semi-groupe dans E de générateur A, il est connu que l'opérateur adjoint $\{T^*\,(t)\,, t \geq 0\}$ne nécessite pas d'être un C_0 -semi-groupe dans E^*. Nous définissons $E^{\odot}$ le sous-espace de E^* pour lequel $\{T^*\,(t)\,, t \geq 0\}$ est fortement continu

$$T\,(t)^{\odot} :\ = T\,(t)\,/_{E^{\odot}}$$

et $A^{\odot}$ le générateur du C_0 -semi-groupe $\left\{T\,(t)^{\odot}\,, t \geq 0\right\}$.

Proposition 1.1 *Soit $\{T\,(t)\,, t \geq 0\}$ un C_0 -semi-groupe positif dans un espace de Banach lattice E, du générateur A .*
Si la résolvante de A croît lentement c'est-à-dire l'ensemble

$$\{(\lambda - A)\,R\,(\lambda - A) : \lambda > s\,(A)\}$$

est borné dans $\mathcal{L}\,(E)$ alors

$$\sigma_{p.b}\ (A) \subset \sigma_{p.b}\ (A^*)\,.$$

Preuve. Nous supposons que $s\,(A) = 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, $Af = i\alpha f$
avec $0 \neq f \in E$. Soit $\{a_n\}$ une suite de nombres réels strictement positifs convergeant vers 0, puisque $f \neq 0$, d'après le théorème de Hahn-Banach on peut trouver un élément $\Phi \in E^*$, $\|\phi\| = 1$ et $\langle \phi, f\rangle = 1$.
Alors

$$\langle R\,(a_n + i\alpha, A^*)\,\phi, f\rangle = \left\langle \phi, \int_0^\infty e^{-(a_n+i\alpha)t}T\,(t)\,f\ dt \right\rangle$$

$$= \int_0^\infty e^{-(a_n+i\alpha)t}\,\langle \phi, T\,(t)\,f\ \rangle\,dt = \int_0^\infty e^{-(a_n+i\alpha)t}\left\langle \phi, e^{i\alpha t}\right\rangle dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-a_n t} dt = \frac{1}{a_n}$$

Si on pose

$$\phi_n = \frac{R(a_n + i\alpha, A^*)\,\phi}{\|R(a_n + i\alpha, A^*)\,\phi\|}.$$

On a

$$\langle \phi_n, f \rangle = \frac{1}{a_n \|R(a_n + i\alpha, A^*)\,\phi\|} \tag{4.2}$$

Puisque $R(., \ A^*)$ croît lentement, il existe $M > 0$ tel que

$$\|R(a_n, A^*)\| \leq \frac{M}{a_n}, \ \forall \ n \in \mathbb{N} \tag{4.3}$$

De plus

$$\|R(\lambda, A^*)\| = \|R(\lambda, A)\| \leq \|R(\operatorname{Re}\lambda, A)\| = \|R(\operatorname{Re}\lambda, A^*)\|$$

D'où, d'après (4.3) on a

$$\|R(a_n + i\alpha, A^*)\| \leq \frac{M}{a_n}, \ \forall \ n \in \mathbb{N} \tag{4.4}$$

Comme conséquence de (4.2) et (4.3) on obtient

$$\langle \phi_n, f \rangle \geq \frac{1}{M} > 0, \forall \ n \in \mathbb{N} \tag{4.5}$$

D'autre part, d'après le théorème d'Alaoglus, il existe une sous suite $\{\phi_{n_k}\}$ de $\{\phi_n\}$ telle que

$$\Psi :\ = \sigma(E^*, E) - \lim_k \phi_{n_k} \in E$$

alors, d'après (4.5)

$$\langle \Psi, f \rangle \geq \frac{1}{M} > 0$$

D'où $\Psi \neq 0$.
D'après la définition de l'élément ϕ_n nous avons

$$A^* \phi_{n_k} = (a_{n_k} + i\alpha)\, \phi_{n_k} - \frac{\phi}{\|R\,(a_{n_k} + i\alpha, A^*)\, \phi\|}$$

Maintenamt, puisque

$$\left\| \frac{\phi}{\|R\,(a_{n_k} + i\alpha, A^*)\, \phi\|} \right\| \leq \|f\|\, a_{n_k}$$

et

$$\sigma\,(E^*, E) - \lim_k\,(a_{n_k} + i\alpha)\, \phi_{n_k} = i\ \alpha\Psi$$

Il suit que

$$\sigma\,(E^*, E) - \lim_k A^* \phi_{n_k} = i\ \alpha\Psi$$

Finalement, puisque A^* admet $\sigma\,(E^*, E)$ graphe fermé,

$$\Psi \in D\,(A^*)\ \text{ et } A^*\Psi = i\ \alpha\Psi$$

Par conséquence $i\ \alpha \in \sigma_{p.b}\ \ (A^*)$. ■

2 Semi-groupe faiblement presque périodique

Définition 2.1 *Un C_0 -semi-groupe $\{T\,(t)\,, t \geq 0\}$ dans un espace de Banach E est appelé faiblement presque périodique si pour tout $f \in E$ l'orbite $\{T\,(t)\, f, t \geq 0\}$ est faiblement relativement compact.*

Evidemment, si E est réflexif, chaque C_0 -semi-groupe borné dans E est faiblement presque périodique.
Pour trouver une autre classe de C_0 -semi-groupe presque faiblement périodique, nous avons besoin du résultat suivant lequel est bien connu dans la théorie ergodique

Lemme 2.1 *Soit E un espace de Banach et E_0 est un sous-ensemble de E tel que l'enveloppe de E_0 est dense dans E .*
Si $\{T(t), t \geq 0\}$ est un C_0 -semi-groupe dans E, les conditions suivantes sont équivalentes

1. *$\{T(t), t \geq 0\}$ est faiblement presque périodique.*
2. *$\{T(t), t \geq 0\}$ est borné et pour tout $f \in E_0$ l'orbite $\{T(t) f, t \geq 0\}$ est faiblement relativement compact.*

3 Semi-groupe sous-markovien

Définition 3.1 *Soit $\{T(t), t \geq 0\}$ un C_0 -semi-groupe dans un espace de Banach lattice E. $\{T(t), t \geq 0\}$ est appelé un semi-groupe sous-markovien s'il est positif et il existe un point quasi-intérieur $f \in E_+$, tel que $T(t) f \leq f$ pour tout $t \geq 0$.*

On dit qu'un espace de Banach lattice est de norme d'ordre continu si pour chaque ordre convergeant dans E, une norme converge.
Il est connu que chaque réflexif ou Banach lattice faiblement séquentiellement complet admet une norme d'ordre continu. Ainsi chaque espace de Lebesgue L^P $(1 \leq P \leq \infty)$ admet une norme d'ordre continu.

Proposition 3.1 *Si E est un espace de Banach lattice avec une norme d'ordre continu, alors chaque semi-groupe sous-markovien borné dans E est faiblement presque périodique.*

Preuve. Par hypothèse, il existe un point quasi-intérieur $f \in E_+$ tel que l'orbite $\{T(t) f,\ t \geq 0\}$ est contenue dans $[0, f]$. Alors, cette orbite est relativement faiblement compacte, puisque $[0, f]$ est $\sigma(E, E^*)$ −compact.
Alors, puisque E_f est dense dans E, la proposition est déduite du lemme ci-dessus ■

Dans le résultat suivant, dont une démonstration courte est dûe à G-Greiner, nous obtenons l'inclusion réciproque à celle obtenue dans le proposition 1.1

Théorème 3.1 *Soit* $\{T(t), t \geq 0\}$ *un* C_0 *-semi-groupe dans un espace de Banach engendré par le générateur* A*. Alors, si* $\{T(t), t \geq 0\}$ *est faiblement presque périodique,*

$$\sigma_p(A^*) \cap iR \subset \sigma_p(A) \cap iR.$$

Preuve. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $A^*\phi = i\alpha\phi$ avec $\phi \in D(A^*)$, $\phi \neq 0$ soit $f \in E$ avec $\langle \phi, f \rangle \neq 0$. Comme $\{T(t), \ t \geq 0\}$ est faiblement presque périodique. Le théorème de Krein-Smulian montre que $M: \ = \overline{co}\{e^{-i\alpha}T(t) f : t \geq 0\}$ est faiblement compact. Maintenant, rapprochons l'intégrale par la somme de Riemann nous observons

$$\lambda R(\lambda + i\alpha, A) f = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-i\alpha t} S(t) f \ dt \ \in M$$

d'où, il existe $\lambda_j \ \downarrow_0$ tel que

$$g: \ = \sigma(E, E^*) - \lim_j \lambda_j R(\lambda + i\alpha, A) f \in M$$

comme ϕ est faiblement continu nous avons

$$\langle \phi, g \rangle = \lim_j \langle \phi, \lambda_j R(\lambda + i\alpha, A) f \rangle = \lim_j \langle \lambda_j R(\lambda + i\alpha, A^*) \phi, f \rangle = \langle \phi, f \rangle \neq 0;$$

d'où, il suit que $g \neq 0$

finalement

$$\begin{aligned} R(1 + i\alpha, A) g &= \sigma(E, E^*) - \lim_j R(1 + i\alpha, A) \lambda_j R(\lambda_j + i\alpha, A) f \\ &= \sigma(E, E^*) - \lim_j \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_j} [R(\lambda_j + i\alpha, A) f - R(1 + i\alpha, A) f] \\ &= g. \end{aligned}$$

par conséquent,

$$Ag = i\alpha g,$$

et donc $i\alpha \in \sigma_p(A)$ ■

Corollaire 3.1 *Soit* $\{T(t), t \geq 0\}$ *un* C_0 *-semi-groupe borné dans un espace de Banach* E *de générateur* A*, supposons que*

i) E est réflexif.

Ou

ii) E est un espace de Banach lattice du norme d'ordre continu et $\{T(t), t \geq 0\}$ est sous-markovien alors

$$\sigma_p(A^*) \cap iR \subset \sigma_p(A) \cap iR$$

Théorème 3.2 *Soit* E *un espace de Banach du norme d'ordre continu et* $\{T(t),\ t \geq 0\}$ *un semi-groupe sous-markovien dans* E *alors*

$$\sigma_p(A^*) \cap iR \subset \sigma_p(A) \cap iR$$

Preuve. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $A^*\phi = i\alpha\phi$ avec $\phi \in D(A^*)$, $\phi \neq 0$. Si $f \in E_+$ est un point quasi-intérieur tel que $T(t) f \leq f$ pour $t \geq 0$, soit $F :\ = (E^*,\ f)$ un AL-espace associé à f, étant donné f comme un élément de E^{**}. Alors F est le complémentaire de E^*par rapport de la norme $q_f(\Psi) :\ = \langle |\Psi|, f\rangle$.
Alors, puisque $T(t) f \leq f$, $\forall t \geq 0$, chacun $T^*(t)$ induit un opérateur positif $S(t) \in \mathcal{L}(F)$ de plus

$$\begin{aligned} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(F)} &= \sup\{\langle |S(t)\Psi|, f\rangle : \Psi \in F. \langle |\Psi|, f\rangle \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\langle |\Psi|, T(t) f\rangle : \Psi \in F. \langle |\Psi|, f\rangle \leq 1\} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

D'après $\{[31],\ Iv,$ exercice.$9(a)\}$, $F^* = (E^{**})_f$. Maintenant, puisque E est d'une norme d'ordre continu, E est un idéal d'ordre de E^{**} (voir [31], $II.5.10$), d'où $F^* = E_f$ donc

$$\forall\ \Psi \in E^*, \sigma(F, F^*) - \lim_{t\ \to 0^+} (S(t)\Psi - \Psi) = 0$$

Alors, supposons que $\|S(t)\| \leq 1\ \forall\ t \geq 0$ et F^* est dense dans E, nous avons

$$\sigma(F, F^*) - \lim_{t\ \to 0^+} (S(t)\Psi - \Psi) = 0\ \forall\ \Psi \in F$$

D'ici il suit que $\{S(t),\ t \geq 0\}$ est un C_0 -semi-groupe dans F (voir[24], I thm 1.23). Soit B le générateur de$\{S(t),\ t \geq 0\}$, d'après ([29], chap 2 th $1, 3$) nous avons

$$D(A^*) \subset D(B) \text{ et } A^*\Psi = B\Psi \text{ pour tout } \Psi \in D(A^*)$$

D'où

$$B\Psi = i\alpha\Psi \text{ donc } s(B) \geq 0,$$

Maintenant, puisque $\|S(t)\| \leq 1,\ \forall\ t \geq 0$, il suit que $s(B) = 0$.

Donc, la résolvante de B croît lentement.

Appliquons la proposition 1.1, il existe $0 \neq z \in E_f$ tel que $B^*z = i\alpha z$

Par conséquent, $z \in D(B^{\odot})$ (voir[28], $A - I$, 3.4) et puisque la norme duale de F est P_f, nous avons qu'il existe

$$P_f - \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)^* z - z}{t} = B^{\odot} z = B^* z.$$

Alors, comme P_f est plus fin que la norme de E restriction de E_f , nous incluons $z \in D(A)$ et $Az = B^*z = i\alpha z$. ■

Si chaque semi-groupe sous-markovien dans un espace de Banach lattice d'une norme d'ordre continu est borné,

alors le théorème ci-dessus " serait inclu dans le corollaire "

Cela n'est pas vérifiée pour l'exemple suivant

Exemple 3.1 *Considérons $\mathbb{R}_+$ avec une mesure de Lebesgue m et définissons*

$$E: \ = L^P(\mathbb{R}_+, dm) \cap L^1(\mathbb{R}_+, e^x dm),\ 1 < p < +\infty$$

Lequel est un espace de Banach lattice d'une norme d'ordre continu, en ce qui concerne *la norme*

$$N_p(f) := \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \, dm(x) \right)^{\frac{1}{p}} + \int_0^\infty |f(x)| \, e^x dm(x)$$

mais lequel n'est pas réflexif .
Pour $t \geq 0$, *définissons l'opérateur* $T(t)$ *dans* E_P *par*

$$T(t) f(x) := f(x+t)$$

Alors il facile de montrer que $\|T(t)\| = 1$ *pour tout* $t \geq 0$ *et* $\{T(t), t \geq 0\}$ *est un* C_0 *-semi-groupe positif dans* E_P. *Considérons* $\{S(t), t \geq 0\}$ *le semi-groupe est échelonné,* $S(t) := e^t T(t), \forall\ t \geq 0$. *Alors* $\{S(t), t \geq 0\}$ *n'est pas borné mais il est sous-markovien puisque* $f(x) = e^{-2x}$ *est un point quasi intérieur de* E_P *et*

$$S(t) f(x) = e^t e^{-2(x+t)} = e^{-t}\ e^{-2x} \leq f(x).$$

le semi-groupe $\{T(t), t \geq 0\}$ *dans cet exemple est une modification donnée dans [23] d'un exemple donné par Greiner-Voigt.Wolff [25].*

Exemple 3.2 *Cet exemple montre que l'hypothèse* E *admet une norme d'ordre continu dans le théorème* 3.2 *est essentiel. Considérons l'espace de Banach lattice*
$E = C(\mathbb{R}_+)$ *de toutes les fonctions continues à valeurs réelles dans* $\mathbb{R}$ *lesquelles croissent à l'infini.*
Soit q *une fonction* $q(x) := -x \ (x \in \mathbb{R}_+)$ *alors l'opérateur de multiplication*
$M_q : f \to q\ f$ *avec un domaine maximal engendre le semi-groupe de multiplication*
$T(t) f := e^{tq} f$ *et il est connu {voir [28],A-III,2,3} que*

$$0 \in \sigma_{r\ b}\ (M_q) = \sigma_{p\ b}((M_q)^*) \subsetneq \sigma_{p\ b}(M_q) = \phi.$$

Comme conséquence de théorème 1.1 et le théorème 3.1 *nous obtenons la généralisation de théorème 1.2 suivante.*

Théorème 3.3 *Soit* $\{T(t),\ t \geq 0\}$ *un* C_0 *-semi-groupe faiblement presque pério-*

dique engendré par A.
Si $\sigma(A) \cap iR$ est dénombrable et $\sigma_p(A) \cap iR = \phi$. Alors $\{T(t),\ t \geq 0\}$ est uniformément stable.

Remarque 3.1 *Le théorème précédant peut aussi être obtenu comme conséquence de la caractérisation de semi-groupe presque périodique donné dans [22],*

de la même façon nous obtenons le théorème 3.3 , si nous utilisons le résultat de la stabitité donné dans $([28], C - I\ V, 1, 5)$ au lieu du théorème 1.1 nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 3.4 *Soit $\{T(t),\ t \geq 0\}$ est un C_0 -semi-groupe positif dans l'espace de Banach lattice E engendré par A .*
Supposons que $\{T(t),\ t \geq 0\}$ est eventiellement norme-continue, si $\{T(t),\ t \geq 0\}$ un C_0 -semi-groupe faiblement presque périodique alors les deux assertions suivantes sont équivalentes

1. $\{T(t), t \geq 0\}$ *est uniformément stable*
2. $0 \notin \sigma_P\ (A)$.

Remarque 3.2 *Dans les deux théorèmes précédants la condition "$\{T(t), t \geq 0\}$ est faiblement presque périodique" est nécessaire puisque si $\{T(t), t \geq 0\}$ est le semi-groupe de diffusion dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ engendré par Laplacian $\triangle$, $\{T(t), t \geq 0\}$ n'est pas uniformément stable parce que $0 \notin \sigma_r\ (\triangle)$.*
Mais comme toutes les solutions de $\triangle f = 0$ sont aussi constantes ou non bornées, $0 \notin \sigma_P\ (\triangle)$.
Observons que cet exemple montre aussi que la presque périodicité faible est une condition nécessaire dans le théorème 3.1 et l'hypothèse "$\{T(t),\ t \geq 0\}$ sous markovien " est nécessaire dans le théorème 3.2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. Ts. Gokhberg and M. G. Krein, Fundamental facts on deficiency numbers, root numbers and indices of linear operators, Uspekhi Mat. Naut 12 (2) (1957),43-118 (in Russian).

[2] M. G. Krein Remark on a theorem from the paper of V. A. Yakubouich, Sibrisk. Mat. Zh. 18 (1977), 1411-1413 (in Russian).

[3] S. G. Krein, Liner Differential Equations in Banach Spaces, Nauka, Moscow 1967 (in Russian).

[4] Yu. I. Lyubich, Conservative operators, Uspekhi Mat. Nauk 20 (5) (1969), 221-225 (in Russian).

[5] Yu. I. Lyubich and V. I. Matsaev, On operator with separated spectrum, Mat. Sb. 56 (4) (1962), 433-468 (in Russian)

[6] A. S. Markus, L. N. Niko l'skaya and N. K. Niko l'skii, On the unitary spectrum of contractions in Banach spaces, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 22 (1971), 65-74 (in Russian).

[7] G. M. Sklyar and V. Ya. Shirman, On the asympotic stability of linear differential equations in Banach spaces, Teor. Funktsii Funktsional. Anal. i Prilozhen. 37 (1982), 127-132 (in Russian).

[8] G. R. Allan. A. G. O'Farrell and T. J. Ransford, A Tauberian theorem arising in operator tgeory, Bull. London Math. Soc. 19 (1987), 537-545.

[9] W. Arend and G. Greiner, the spectral mapping theorem for one-parameter groups of positive operators on $C_0(X)$, Semigroup Forum 30 (1984), 297-330.

[10] N. Dunford and J. T. Schwatez, Linear operators, Part I, Wiley, New York, 1958.

[11] A. E. Ingham, On Wiener'a method in Tauberian theorems, Oroc. London Maath. Soc. (2) 38 (1935), 458-480.

[12] Y. Katznelson and L. Tzafriri, On power bounded operators, J. Functional Anal. 68 (1986), 313-328.

[13] J. Korevaar, On Newman's quick way to the prime number theorem, Math. Intelligencer 4 (1982), 108-115.

[14] U. Krengel, Ergodic theorems, De Gruyter, Berlin, 1985.

[15] R. Nagel (ed), One-parameter semigroups of positiv operators, Lecture Notes in Math., vol. 1184, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1986.

[16] D. J. Newman, Simple analytic proof of the prime number theorem, Amer. Math. Monthly 87 (1980), 693-696.

[17] B. Sz.-Nagy and C. Foias, Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North-holland, Amestardam, 1970.

[18] D. V. Widder, An introduction to transform theory, Academic Press, New York, 1971.

[19] M. Wolff, A remark on the spectral bound of the generator of a semigroup of positive operators with appelications to stability theory, Functional Analysis and Approximation (Proc. Conf., Oberwolfach.1980) (P. L. Butzer, B. Sz.-Nagy, E. Görlich, eds.), Birkhäuser, Basel, 1981, pp. 39-50.

[20] D. Zagier, Short proof of the prime number theorem, unpublished manuscript.

[21] ARENDT,W.AND BATTY, C.J.K.,Tauberian theorm and stability of one-parametre semigroups, Trans. Amer. Math. soc. 306(1988), 837-852.

[22] PAZY, A., “Semigroups of linear opertors and applications to partial differential equations,” Springer-Verlag, 1983.

[23] LYUBICH, YU. I. AND PHONG, V.Q., Asymptotic stability of linear differential equations in Banach spaces, Studia Math. 88 (1988) , $37 - 42$.

[24] SCHAEFER, H.H., “Banach lattices and positive operators,” Springer-Verlag, 1974.

[25] BATTY, C.J.K. AND PHONG, V.Q., Stability of individual elemnts under one-parameter semigroups, Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).

[26] CLEMENT, PH. ET AL., “One-parametre semigroupes, ” North-Holland, 1987.

[27] DAVIES, G.,“One-parametre semigroupes, ” Academie Press, 1980.

[28] GREINER, G., VOIGT, J. AND WOLFF, M., On the spectral bound of the generator of semigroups of positive operators. J. Operator Theory 5(1981), 245-256.

[29] KRENGEL, U. “Ergodic Theorems,”De Gruyter, Berlin, 1985.

[30] LYUBICH, YU. I. AND PHONG, V.Q Asymptotic stability of linear differential equation in Banach spaces, Studia Math. 88 (1988), 37-42.

[31] NAGEL, R.(ED), “One-parametre semigroups of positive operators,” Springer-Verlag.N.M.1184, Berlin-New York, 1986.

[32] ROMANELLI, S.,“Almost periodic subspaces related to operator semigroups,” Proc. of Trieste (1987), Lect. Note in pure and Appl. Math., M.Dekker 116, 1988, pp. 353-366.

[33] SCHAEFER, H.H.,“Banach lattices and positive operators,” Springer-Verlag, 1974.

[34] H. Brezis, "Analyse fonctionnelle", Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise.[Collection of Mathematics for the Master’s Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et Applications. [Theory and Applications]

[35] H. Brezis : Analyse fonctionnelle Théorie et application, Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.

[36] A. Gregoire, Analyse numérique et optimisation. Editions de l'école polytechnique, 2005.

[37] M. Hiazi, Introduction aux espaces normés, Office des publications universitaires, 1994.

[38] Klaus-Jochen Engel Rainer Nagel.,"One-parameter semigraops for linear Evolution Equations" Sprenger (1991).