

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Chérif Messaâdia de Souk-Ahras

Faculté des Sciences et de la Technologie



Mémoire de Magister

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Maintenance des installations Industrielles

Thème :

Maintenance Et Réhabilitation Des Structures Par Matériaux Composites.

Présenté par :

Mr. Hatab Salim

Soutenu le : 28/04/2016

Devant le jury composé de :

Président	Pr. Khelil Khaled	Professeur à l'Université de Souk-Ahras.
Promoteur	Dr. Khadri Youcef	MCA à l'Université d'Annaba.
Examineur	Dr. Guedri Abdelmoumene	MCA à l'Université de Souk-Ahras.
Examineur	Pr. Benretem Abdelouahab	Professeur à l'Université d'Annaba.

Remerciements

*Je tiens à remercier mon encadreur Monsieur **Youcef Khadri**, pour m'avoir suivi avec patience, pour ses conseils précieux et ses encouragements.*

*Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Monsieur **Khelil Khaled** Professeur à l'Université de Souk-Ahras, pour avoir accepté de présider le jury d'examen de ce mémoire.*

*Je remercie également Monsieur **Benretem Abdelouahab** Professeur à l'Université Badji Mokhtar Annaba, et Monsieur **Guedri Abdelmoumene** Maître de Conférences à l'Université Mohamed Chérif Messaâdia Souk-Ahras, pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir accepté de faire partie du jury et d'avoir consacré de leur temps à la lecture de ce mémoire.*

Je désire finalement exprimer toute ma gratitude pour tous ceux qui m'ont aidée de loin ou de prêt pour l'accomplissement de ce travail

Je remercie aussi mes parents pour leurs soutien et encouragements.

Enfin, Je tiens à remercier ma femme pour son soutien et ses encouragements illimités.

Liste des tableaux

Chapitre II : MATERIAUX COMPOSITES ET TECHNIQUE DE RENFORCEMENT

<i>Tableau II.1: Caractéristiques moyennes des fibres et renforts.</i>	17
<i>Tableau II.2: Principales différences entre matrices TP et TD.</i>	21
<i>Tableau II.3: Caractéristiques des matrices TD.</i>	22
<i>Tableau II.4: Caractéristiques des matrices TP.</i>	24

Chapitre IV : METHODES D'OPTIMISATION .

<i>Tableau IV.1: Exemple de sélection par rang pour 6 chromosomes.</i>	71
---	----

Chapitre V : OPTIMISATION D'UN RENFORT COMPOSITE PAR (AG).

<i>Tableau V.1 : Les caractéristiques mécaniques de l'acier, l'aluminium et les fibres.</i>	79
<i>Tableau V.2 : Valeurs des flèches de la poutre aluminium avec variation de longueur.</i>	85
<i>Tableau V.3 : Valeurs des flèches de la poutre aluminium avec variation de longueur.</i>	89
<i>Tableau V.4 : Paramètres de l'algorithme génétique.</i>	96

Liste des figures

Chapitre II : MATERIAUX COMPOSITES ET TECHNIQUE DE RENFORCEMENT

<i>Figure II.1: Fibre de verre.</i>	15
<i>Figure II.2: Fibre de carbone.</i>	16
<i>Figure II.3: Fibre d'aramide.</i>	16
<i>Figure II.4: Les renforts unidirectionnels (UD).</i>	18
<i>Figure II.5: Les renforts Toile ou taffetas.</i>	18
<i>Figure II.6: Les renforts serge</i>	18
<i>Figure II.7: Les renforts Satin.</i>	19
<i>Figure II.8: Tissu multiaxial.</i>	19
<i>Figure II.9: Tissu 3D ou tresse.</i>	19
<i>Figure II.10: Tissu hybride carbone – aramide.</i>	19
<i>Figure II.11: Exemples de charges utilisées dans les CMO : (a) micro-billes de verre, (b) noir de carbone, (c) silice.</i>	20
<i>Figure II.12: Constituants des matériaux composites.</i>	25
<i>Figure II.13: Les échelles des constituants d'un composite stratifié.</i>	25
<i>Figure II.14: Un scénario d'endommagement au cours du chargement d'un composite stratifié.</i>	26

Chapitre III : TEORIE DES POUTRES STRATIFIEES.

<i>Figure.III.1: types des poutres.</i>	32
<i>Figure.III.2: Courbure d'une poutre.</i>	33
<i>Figure. III.3: Modélisation d'un essai de flexion trois points.</i>	33
<i>Figure III.4: Définition de l'angle $\Delta\varphi$.</i>	34
<i>Figure III.5: Répartition des contraintes dans une section droite.</i>	34
<i>Figure .III.6 : Élément de poutre.</i>	35
<i>Figure III.7. Machine universelle en montage de flexion.</i>	35
<i>Figure III.8 : Un stratifié [0,90].</i>	36

<i>Figure III.9: Effet de l'orientation : deux plis orientés différemment ont des rigidités différentes dans une direction \underline{x} donnée.</i>	36
<i>Figure III.10 : Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié.</i>	42
<i>Figure III.11 : Schématisation des moments de flexion et de torsion.</i>	44
<i>Figure III.12. Elément poutre en flexion 3 points.</i>	52

Chapitre IV : METHODES D'OPTIMISATION.

<i>Figure. IV.1 : Méthodes d'optimisation déterministes.</i>	57
<i>Figure. IV.2 : Méthodes d'optimisation stochastiques.</i>	60
<i>Figure IV. 3 : Principe de fonctionnement d'un algorithme génétique.</i>	64
<i>Figure IV.4 : Les cinq niveaux d'organisation d'un algorithme génétique.</i>	66
<i>Figure IV.5 : Exemple d'un codage binaire d'un chromosome.</i>	67
<i>Figure IV.6 : Exemple d'un codage réel d'un chromosome.</i>	68
<i>Figure IV.7 : codage alphabétique d'un chromosome.</i>	68
<i>Figure IV. 8 : Exemple de codage sous forme d'arbre.</i>	69
<i>Figure IV.9 : Exemple de roulette (Wheel)</i>	71
<i>Figure. IV.10. Processus de sélection par tournoi.</i>	72
<i>Figure IV.11 : Croisement à un site.</i>	73
<i>Figure V.12 : Croisement à k sites.</i>	74
<i>Figure IV.13: Mutation dans un chromosome.</i>	75

Chapitre V : OPTIMISATION D'UN RENFORT COMPOSITE PAR (AG).

<i>Figure V.1 : Poutre métallique renforcée par couche en matériau composite.</i>	78
<i>Figure V.2: Variation de la flèche en fonction de l'orientation des fibres a renfort composite verre-époxyde et carbone époxyde (poutre en Aluminium).</i>	81
<i>Figure V.3: Variation de la flèche en fonction de l'orientation des fibres a renfort composite verre-époxyde et carbone époxyde (poutre en Acier).</i>	82

Figure V.4: Variation de la flèche de poutre aluminium renforcé par carbone-époxyde verre-époxyde orienté $[0^\circ, 90^\circ]$ a différent longueur.	83
Figure V.5: Variation de la flèche de poutre aluminium renforcé par carbone-époxyde verre-époxyde orienté $[0^\circ, 45^\circ]$ a différent longueur.	84
Figure V.6: Variation de la flèche de poutre aluminium renforcé par carbone-époxyde verre-époxyde orienté $[0^\circ, 0^\circ]$ a différents longueurs.	84
Figure V.7: Variation de la flèche de poutre aluminium renforcée par carbone-époxyde a différents orientation. $[0^\circ, 0^\circ]$ $[0^\circ, 45^\circ]$ $[0^\circ, 90^\circ]$.	86
Figure V.8: Variation de la flèche de poutre aluminium renforcée par verre-époxyde a différents orientation. $[0^\circ, 0^\circ]$ $[0^\circ, 45^\circ]$ $[0^\circ, 90^\circ]$.	87
Figure V.9: Variation de la flèche de poutre Acier renforcé par carbone-époxyde verre-époxyde orienté $[0^\circ, 90^\circ]$ a différent longueur.	88
Figure V.10: Variation de la flèche de poutre Acier renforcé par carbone-époxyde verre-époxyde orienté $[0^\circ, 45^\circ]$ a différent longueur.	88
Figure V.11: Variation de la flèche de poutre Acier renforcé par carbone-époxyde verre-époxyde orienté $[0^\circ, 0^\circ]$ a différents longueurs.	89
Figure V.12: Variation de la flèche de poutre aluminium renforcée par carbone-époxyde a différents orientation. $[0^\circ, 0^\circ]$ $[0^\circ, 45^\circ]$ $[0^\circ, 90^\circ]$.	90
Figure V.13: Variation de la flèche de poutre aluminium renforcée par verre-époxyde a différents orientation. $[0^\circ, 0^\circ]$ $[0^\circ, 45^\circ]$ $[0^\circ, 90^\circ]$.	90
Figure V.14 : Mécanisme de l’algorithme génétique.	92
Figure V.15: Operateur à un point de croisement (X1P).	94
Figure V.16: Exemple d’une mutation simple.	95
Figure V.17: Variation de la flèche de poutre en Acier en flexion 3 points renforcé par 2 couches carbone-époxyde durant 30 générations.	97
Figure V.18: Variation de la flèche de poutre en Acier en flexion 3 points renforcé par 2 couches verre-époxyde durant 30 générations.	98
Figure V.19: Variation de la flèche de poutre en Aluminium en flexion 3 points renforcé par 2 couches carbone-époxyde durant 30 générations.	99
Figure V.20: Variation de la flèche de poutre en Aluminium en flexion 3 points renforcé par 2 couches verre-époxyde durant 30 générations.	100

Nomenclature

E	: Module de Young [MPa].
Y	: distance de M par rapport à la fibre neutre [mm].
θ	: Angle unitaire de flexion [rad/mm].
E_x	: module de flexion de la poutre.
M_f	: Moment fléchissant.
I	: Moment quadratique.
S_{ij}	: Matrice de souplesse.
C_{ij}	: Matrice de rigidité.
E_L	: Module de Young longitudinal [GPa].
E_T	: Module de Young transversal [GPa].
ν_{LT}	: Coefficient de poisson [GPa] .
G_{LT}	: Module de cisaillement [GPa].
M_x, M_y	: Les moments de flexion.
M_{xy}	: Le moment de torsion.
[A]	: Matrice de rigidité en membrane.
[D]	: Matrice de rigidité de flexion.
D^*_{ij}	: Les éléments de la matrice inverse de [D_{ij}] .
[B]	: Matrice de couplage membrane-flexion-torsion.
A	: Dimension de la plaque le long de l'axe x en (mm).
B	: Dimension de la plaque le long de l'axe y en (mm).
H	: Epaisseur totale en (mm).
H	: Epaisseur d'un pli en (mm).
K_x	: Courbure dans la direction x.
K_y	: Courbure dans la direction y.
K_{xy}	: Courbure dans la direction x et y.
W_c	: La flèche au centre de la poutre.
P₀	: Population initiale.
n_c	: Nombre des chromosomes.
n_g	: Nombre des gènes.
F(x)	: Fonction d'évaluation.

Résumé

Les patchs en matériaux composites sont reconnus comme étant un des moyens les plus efficaces pour la réhabilitation et la réparation des structures métalliques présentant des dommages, une alternative à la réparation de ces structures consiste à les renforcer préventivement avant que les défauts n'apparaissent.

Le contexte de ce travail basé sur la maintenance préventive des structures métalliques dans le but de retarder l'endommagement et améliorer les caractéristiques mécaniques des structures.

Le changement de la nature du matériau des renforcements ainsi que la recherche de l'effet de l'orientation des fibres permettent de déterminer la performance de la structure métallique en mode flexion trois points pour les deux matériaux Aluminium et Acier.

Afin d'augmenter les performances des poutres métalliques en flexion trois points ; un programme d'optimisation de patchs par algorithme génétique à été développé. Les opérateurs des algorithmes génétiques (sélection, croisement et mutation) sont appliqués.

Les mots clés : Maintenance, Réhabilitation, Matériau composite, Optimisation, Algorithme génétique.

Abstract

Composite patches materials are recognized as one of the most effective ways for the rehabilitation and repair of metal structures with damage, an alternative to the repair of these structures is to strengthen preventively before the defects appear.

The context of this work based on the preventive maintenance metal structure in order to delay damage and improves the mechanical characteristics of structures.

Changing the nature of the reinforcement material as well as research of the effect of fiber orientation to determine the performance of the metal structure bending fashion three points for the two materials aluminum and steel.

In order to increasing the performance of steel beams three-point bending .a patch program optimization by genetic algorithm has been developed The operators of genetic algorithms (selection, crossover and mutation) are applied .

Keywords: *Maintenance, Rehabilitation, Composite material, Optimization, Genetic Algorithm.*

ملخص

تعرف المواد المركبة باعتبارها واحدة من أكثر الطرق فعالية لإعادة تأهيل وإصلاح الهياكل المعدنية المعرضة للضرر, كما أنها تستعمل كبديل مهم لتعزيز ووقاية هذه الهياكل قبل ظهور العيوب.

هذا العمل يعتمد على الصيانة الوقائية للهياكل المعدنية من أجل تأخير الضرر و تحسين الخصائص الميكانيكية لهذه الهياكل.

إن تغيير طبيعة مواد التعزيز فضلا عن تأثير اتجاه الألياف له أهمية كبيرة في تحديد مدى صلابة هياكل الألومينيوم و الحديد المعرضة للانحناء تحت تأثير ثلاث قوى.

من أجل رفع أداء الهياكل المعدنية المعرضة للانحناء تحت تأثير ثلاث قوى.تم إعداد برنامج على أساس الخوارزميات الجينية (الاختبار ,التهجين و التغيير) .

كلمات البحث: صيانة وإعادة التأهيل ، المواد المركبة ، التحسين ، الخوارزميات الجينية .

SOMMAIRE

<i>Introduction générale</i>	1
-------------------------------------	----------

CHAPITRE I : SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIE

I.1-Introduction	4
I.2-Caractéristiques d'un matériau composite	4
I.3-Renforcement en flexion des poutres :	6
I.3.1-Modes de rupture	6
I.3.2-Résistance et rigidité	6
I.3.3-Contrôle de la fissuration	9
I.3.4-Optimisation du renforcement	10
I.3.5-Ancrage des composites	11
I.3.6-Modèles théoriques	12
I.3.7-Ductilité	12
I.3.8-Fatigue	13
I.4-Conclusion	13

CHAPITRE II : MATERIAUX COMPOSITES ET TECHNIQUE DE RENFORCEMENT

II.1-Introduction	15
II.2-Les renforts	15
II.2.1-Fibre de verre	15
II.2.2-Fibre de carbone	16
II.2.3-Fibre d'aramide	16
II.2.4-Fibre de bore	16
II.2.5-Fibre de silice (ou de quartz) :	17
II.2.6-Fibres de polyéthylène de haut module	16
II.2.7-Caractéristiques moyennes des fibres et renforts	16
II.2.8-Architecture des renforts	18

II.3-Les charges :	19
II.4-Les matrices	20
II.4.1-Les matrices thermodurcissables	21
II.4.2-Les matrices thermoplastiques :	23
II.5-Constitution et intérêt des composites a matrice organique (CMO) pour la conception des structures	24
II.6-Constitution et approche d'échelle des matériaux composites	25
II.7-Scénario d'endommagement des stratifiés :	26
II.8-La nécessité d'un renfort structurel	27
II.9-Différents méthodes de renforcement des structures métalliques :	28
II.9.1-Les précautions à prendre lord de la réhabilitation d'une structure métallique	29
II.10-Conclusion	30

CHAPITRE III : TEORIE DES POUTRES STRATIFIEES

III.1-Introduction	32
III.2-Flexion des poutres	32
III.2.1.Définitions	32
III.2.2-Essai de flexion	33
III.2.3-Flexion simple	33
III.2.4- <i>Hypothèses</i>	34
III.2.5-Répartition des contraintes	34
III.3-Flexion des poutres composite	35
III.3.1-Machines de flexion	35
III.3.2-Les poutres stratifiées	36
III.3.3-Comportement élastique d'une couche de matériaux orthotropes	37
<i>III.3.3.1-Comportement dans les axes du matériau</i>	37

III.3.3.2- <i>Etat de contraintes planes</i>	37
III.3.3.3- <i>Champ des déformations</i>	38
III.3.3.4- <i>Champ des contraintes</i>	41
III.3.4-Expression des résultantes et des moments :	41
III.3.4.1- <i>Résultantes en membrane:</i>	41
III.3.4.2- <i>Moments de flexion et de torsion</i>	43
III.3.5-Equation constitutive	45
III.3.6-Matrice de rigidité	46
III.4-Théorie classique des stratifiés	46
III.4.1-Expressions générales	46
III.5-Conclusion	54

CHAPITRE IV : METHODES D'OPTIMISATION

IV.1-Introduction	56
IV.2-Classification des méthodes d'optimisation	56
IV.2.1-Méthodes déterministes	56
IV.2.1.1- <i>Méthode Branch&Bound</i>	57
IV.2.1.2- <i>Les méthodes utilisant les plans d'expériences</i>	57
IV.2.1.3- <i>Les méthodes heuristiques ou méthodes géométriques :</i>	58
IV.2.1.4- <i>Méthodes mathématiques</i>	58
IV.2.2-Méthodes stochastiques	59
IV.2.2.1- <i>Monte-Carlo</i>	60
IV.2.2.2- <i>Recuit simulé</i>	60
IV.2.2.3- <i>La recherche tabou (tabou search) :</i>	61
IV.2.2.4- <i>Méthodes évolutionnistes</i>	62
IV.3-Les algorithmes génétiques	62
IV.3.1-Initialisation de la population	65
IV.3.2-Codage et décodage des variables	66
IV.3.3-Génération aléatoire de la population initiale	69
IV.3.4-Evaluation et sélection	69
IV.3.4.1- <i>Sélection par roulette (Wheel)</i>	70

<i>IV.3.4.2-Sélection par rang</i>	71
<i>IV.3.4.3-Sélection par tournoi</i>	72
<i>IV.3.4.4-Elitisme</i>	72
IV.3.5-L'opérateur de croisement	72
<i>IV.3.5.1-Croisement à un site</i>	73
<i>IV.3.5.2- Croisement à k sites</i>	73
IV.3.6-L'opérateur de mutation	74
IV.3.7-Critères d'arrêt	75
IV.3.8-Avantages et inconvénients des algorithmes génétiques	75
<i>IV.3.9-Conclusion</i>	76

CHAPITRE .V : OPTIMISATION D'UN RENFORT COMPOSITE PAR (AG)

V.1-Introduction	78
V.2-Présentation du problème à résoudre	78
V.3- Effet de l'orientation des fibres de la couche composite sur la flèche de poutre	79
V.3.1-Effet de l'orientation des fibres sur la flèche des poutres chargées en flexion trois points en Acier et Aluminium renforcées à différents types de matériaux	81
<i>V.3.1.1-Renforcement par une seule couche</i>	81
<i>V.3.1.2-Renforcement par deux couches</i>	83
V.3.1.2 .1-1^{er} cas : poutre en Aluminium	84
V.3.1.2 .2-2^{eme} cas : poutre en Acier	88
V.4-Application de la méthode des algorithmes génétiques	91
V.4.1-Mécanisme de l'algorithme génétique	91
<i>V.4.1.1-Population initiale</i>	93
<i>V.4.1.2-Evaluation des individus</i>	93
<i>V.4.1.3-Classement des individus</i>	93
<i>V.4.1.4-Sélection</i>	93
<i>V.4.1.5- Croisement</i>	93
<i>V.4.1.6- La mutation</i>	95

<i>V.4.1.7-Evaluation des enfants</i>	95
<i>V.4.1.8-Construction de la nouvelle génération</i>	95
<i>V.4.1.9-Convergence</i>	95
V.5-Formulation des problèmes d'optimisation	95
V.6-Optimisation de la flèche de poutre en Acier chargée en flexion trois points à différents matériaux de renforcement	97
VI.7-Optimisation de la flèche de poutre en Aluminium chargées en flexion trois points à différents matériaux de renforcement	98
V.8-Conclusion	100
Conclusion générale	102
Références Bibliographiques	104

Introduction générale

La grande majorité des structures métalliques sont susceptible de subir des chocs accidentels lors de leur utilisation et aussi lors de leur fabrication et de leur maintenance, L'endommagement qui découle de ces chocs est rarement spectaculaire mais il peut potentiellement avoir des conséquences néfastes importantes sur le comportement mécanique de la structure.

Ceci est particulièrement vrai lorsque la structure travaille en fatigue et sous des conditions environnementales complexes (température, humidité, milieux corrosif). Dans ce cas la réparation des structures endommagées devient problématique.

Le contexte de ce mémoire s'inscrit dans un cadre de la maintenance de structures métalliques, le but étant de retarder l'apparition de défaut en renforçant préventivement les structures endommagées, une des solutions les plus pratique pour la réparation des structures métalliques consiste à substituer toute ou partie de la zone endommagée et de coller des patches sur la surface de la structure.

En effet grâce à leurs propriétés mécaniques spécifiques élevées et a leur diversité, Les matériaux composites sont de plus en plus utilisés pour réparer les structures métalliques.

Dans cette optique, l'objectif majeur de ce mémoire est de contribuer à la minimisation de la flèche des poutres métalliques en flexion 3 points a différents matériaux de renforcement .Une méthode stochastique d'optimisation par les algorithmes génétiques et appliquée pour localiser l'optimum.

Dans ce cas, le nombre de plis des structures étudiées et leur épaisseur sont considérés fixes avec des orientations des plis variables.

Pour mener à bien ce travail, Nous avons jugé utile d'organiser ce mémoire en cinq chapitres :

Le premier chapitre est consacré à l'étude bibliographique, et quelques travaux sur la réparation par patches composite sont présentés.

Le deuxième chapitre présente une généralité sur les matériaux composite et les différentes techniques et méthodes de renforcement des structures en se basant sur le renforcement par les matériaux composite.

INTRODUCTION GENERALE

Une théorie classique des poutres stratifiées est présentée dans le 3^{ème} chapitre.

Le quatrième chapitre définit les méthodes d'optimisation et leurs classifications et une étude plus détaillée des algorithmes génétiques et leur application pour résoudre les problèmes d'optimisation des structures stratifiées.

Dans le cinquième chapitre, on a appliqué ces méthodes sur des poutres métalliques à renforcement composite stratifié avec une seule couche et deux couches de renforts.

Finalement une conclusion permettra de proposer une synthèse des principaux résultats obtenus et d'envisager les perspectives découlant de ce mémoire.

CHAPITRE

I

SYNTHESE

BIBLIOGRAPHIE

I.1-Introduction :

Le sujet de renforcement à fait l'objet d'une recherche extensive durant les dernières décennies, en raison de l'augmentation des dépenses de travaux de réhabilitation des ouvrages, l'organisation et la rationalisation de l'entretien est devenu plus que nécessaire. Afin de permettre une planification et une réduction des dépenses .ces enjeux économique ont été à l'origine de la mise en place des plans de maintenance, qui vont du diagnostic au renforcement [1].diverses méthodes ont été développées pour augmenter la résistance en flexion des poutres. Le collage des plaques d'acier et l'installation de câbles de post contraintes extérieurs en acier sont les principales. Cependant, le recours à ces techniques pose des problèmes techniques liés à la manipulation de lourdes plaques d'acier, à la disponibilité des plaques de grandes dimensions, à l'ancrage des câbles, et à la corrosion de l'acier.

L'arrivée des matériaux composites en génie civil, A permis de développer des techniques innovatrices de renforcement des structures en béton armé. Citons à titre d'exemple, le confinement de colonnes, le renforcement de poutres en flexion et en cisaillement, et celui de murs de maçonnerie. L'application de laminés ou de stratifiés formés de PRF sur la face tendue des (Poutres ,Dalles) permet d'éviter les problèmes de corrosion associés aux plaques d'acier [2].

I.2-Caractéristiques d'un matériau composite :

Un matériau composite est une combinaison de deux ou plusieurs matériaux distincts à l'échelle macroscopique; les propriétés du produit fini sont améliorées par rapport à celles de ces composantes [3]. Un polymère renforcé de fibres est constitué d'un renfort de fibres et d'une matrice faite généralement d'époxy. La majeure partie des efforts sont repris par les fibres, plus rigides et plus résistantes que la matrice. Les fibres utilisées sont de carbone (PRFC), de verre (PRFV) ou d'aramide. Quant à la matrice, plus souple, elle assure le transfert des efforts entre les fibres et leur protection. Le fait que le matériau soit formé de plusieurs fibres au lieu d'un seul élément permet d'obtenir une meilleure résistance puisque la probabilité d'une rupture soudaine causée par la présence d'un défaut est largement diminuée. De plus, la propagation des fissures est moins rapide dans un PRF que dans un seul élément. Le produit fini est anisotrope et linéaire-élastique jusqu'à la rupture. Ceci est dû au fait que les propriétés mécaniques du PRF varient selon l'orientation des fibres, et que celles-ci ont un comportement linéaire-élastique sans plateau plastique.

L'utilisation des matériaux composites pour la réhabilitation et le renforcement structural présente plusieurs avantages intéressants:

- > une excellente résistance à la corrosion;
- > un rapport résistance/poids très élevé;
- > une mise en place plus facile;
- > une possibilité d'optimisation d'après le type de renforcement et l'orientation des fibres;
- > une grande rigidité pour le cas des PRFC à haut module élastique;
- > une bonne résistance à la fatigue (sauf pour les PRFV);

Cependant, les aspects limitant pour le moment l'utilisation à grande échelle de ces matériaux dans le domaine du renforcement externe sont :

- > un coût de base élevé des matériaux;
- > l'absence de normes de conception;
- > des données incomplètes sur le comportement et les propriétés du matériau à long terme.

Bien que les matériaux composites coûtent environ dix fois plus chères que l'acier pour unité de volume, les PRF permettent d'économiser sur les coûts d'installation vue leur faible poids. En effet, dans les projets de réhabilitation, les coûts des matériaux dépassent rarement 20 % du coût total du projet [4]. Une baisse éventuelle du coût des matériaux est prévisible étant donné la croissance du marché des PRF en génie civil et l'amélioration des procédés de fabrication des produits.

Pour le renforcement des structures, les matériaux composites se présentent sous deux formes :

(1) des feuilles minces et flexibles composées de fibres sèches ou pré-imprégnées.

(2) les plaques rigides de différentes largeurs et épaisseurs produites par pultrusion. Les procédés d'installation des PRF dépendent du produit, et des recommandations fournies par les fabricants.

I.3-Renforcement en flexion des poutres :

Le renforcement de nombreuses structures nécessaire afin d'améliorer leur comportement structural et d'assurer la sécurité des utilisateurs. L'application des matériaux composites sur les éléments de structure semble une technique de renforcement des plus prometteuses compte tenu des avantages cités précédemment. Ceci est confirmé par plusieurs études réalisées depuis une dizaine d'années. Les résultats expérimentaux et analytiques disponibles confirment le grand potentiel de cette méthode de renforcement pour augmenter la résistance en flexion des poutres ou des dalles. Un aperçu des recherches effectuées dans ce domaine est présenté dans les sous-sections suivantes.

I.3.1-Modes de rupture :

Le renforcement externe en flexion de poutres à l'aide de feuilles ou de plaques de PRF peut mener à des modes de ruptures différents de ceux rencontrés généralement dans les poutres conventionnelles en béton armé.

Selon [4], les modes de rupture des poutres renforcées de PRF obtenus lors des essais expérimentaux peuvent être associés au béton, au composite ou à l'interface béton-composite. Ces modes de rupture peuvent être classés selon deux catégories : les ruptures classiques et les ruptures prématurées.

Les modes de ruptures classiques se comparent à ceux déjà présents dans les poutres de béton armé conventionnelles :

- > la plastification des armatures d'acier suivie de la rupture du béton dans la zone comprimée;
- > la rupture du béton en compression sans plastification de l'acier. Ce type de rupture correspond à ce qui se produit dans les poutres surarmées;
- > la rupture en tension du composite lorsqu'il atteint sa déformation maximale.

Les ruptures prématurées se produisent généralement avant que la section renforcée puisse atteindre la charge maximale associée aux modes de rupture précédents.

Les principaux modes de ruptures prématurés des poutres renforcées de PRF sont :

- > la rupture par décollement progressif de la lamelle de PRF causée par une surface de béton non-uniforme et généralement amorcée aux extrémités du PRF.
- > la rupture par délaminage du béton de recouvrement causée par la formation de fissures de cisaillement près de l'extrémité de la plaque de PRF. Ce type de rupture est initié par la rotation en bloc d'éléments de béton produits par l'intersection de fissures verticales et diagonales.
- > la rupture inter laminaire par cisaillement, soit à l'intérieur de la couche de PRF, soit à l'interface composite-adhésif ou à l'interface béton-adhésif. Ce dernier est le plus fréquent des trois cas.
- > la rupture par décollement de l'adhésif au niveau des fissures de cisaillement causées par un effort perpendiculaire à la surface collée.
- > la rupture des armatures d'acier en tension. Ceci est observé lors d'essais de fatigue.

[5]. Afin d'augmenter les performances des poutres sandwiches en flexion trois points, un programme d'optimisation basé sur les principes des algorithmes génétiques a été développé pour maximiser la charge à la rupture en deux modes de rupture de peaux en traction et en compression, en fonction de l'orientation des plis : 0° , $+45^\circ$, -45° et 90° .

I.3.2-Résistance et rigidité :

Le renforcement en flexion avec des feuilles ou des plaques de PRF a fait l'objet de nombreuses recherches ces dernières années. Il a été démontré qu'il était possible d'augmenter la rigidité, et la capacité à l'état de service et à l'état ultime des poutres existantes. En effet, un moment résistant additionnel est engendré par une force de tension dans le PRF et par une force équivalente de compression dans le béton, augmentant ainsi la résistance de la poutre.

[6] étudié le rôle de l'interface adhésif pour la résistance d'une structure renforcée par des lamelles en composite. Afin d'améliorer la ductilité et la rigidité de l'interface adhésive, la résine réactive liquide a été mélangée avec la colle époxy.

Un modificateur à la base de caoutchouc (CTBN – Goodrich carboxyl terminated butadiene acrylonitrile copolymer) a été ajouté à raison de 10% et 20% lors de la phase expérimentale.

L'amélioration observée dans le projet a été attribuée au changement du module élastique de l'adhésif. Le changement du module élastique a été réussi grâce à l'ajout du modificateur de caoutchouc.

La diminution de rigidité de l'interface adhésive réduit la concentration des efforts aux extrémités de renforcement ainsi qu'au niveau des fissures.

[1] **M. BOUKHEZAR**, L'analyse de sections renforcées en PRFC (polymère renforcé en fibre de carbone) et non renforcées, en flexion simple, a confirmé que le renfort placé dans la partie tendue améliore la capacité flexionnelle de la poutre d'un ordre de 181.25 %. Pour le rajout de deux à trois couches (0.8 à 1.2 %) greffées sur la partie inférieure de la poutre l'augmentation de la capacité flexionnelle n'est pas constante. [elle est importante pour de petites valeurs de ρ_s (taux d'armatures tendues) d'un ordre de 23.62% et devient de moins en moins importante pour des valeurs de ρ_s se rapprochant de la valeur critique (point de cassure sur le graphe) et s'annule pour des valeurs de ρ_s supérieures à la valeur critique].

[6] **GAO, B., KIM, J.K. ET LEUNG, C.K.Y.**: ont effectué des essais statiques sur des poutres en béton armé renforcées de plaques de fibres de verre collées sur la face tendue. Cinq poutres rectangulaires et une poutre en T de 4,57 m de portée libre, ayant différentes configurations d'armature d'acier, ont été renforcées extérieurement avec la même quantité de PRF. Deux des poutres rectangulaires, dont l'une pré-fissurée, ont été cambrées lors de l'installation des composites afin de développer une pré-tension dans la plaque. La cambrure a permis de diminuer l'ouverture des fissures. Lors des essais, une augmentation significative de la capacité en flexion a été observée. Les gains de résistance obtenus étaient plus élevés pour les poutres avec de faibles quantités d'armature interne. De plus, le renforcement externe a permis d'améliorer le comportement à la fissuration en retardant l'apparition et en diminuant l'ouverture des fissures. Une diminution de la ductilité a aussi été observée sur les poutres renforcées, et elle dépendait de la ductilité de la section originale.

[8] **N.ATTARI** : La présente étude évalue un total de dix poutres et onze nœuds en béton armé ont été renforcées et testées sous un chargement cyclique pour les poutres et alterné pour les nœuds. Les résultats analysés en termes de résistance, rigidité, ductilité et mode de rupture. Ils montrent que la configuration de renfort en U a considérablement amélioré la résistance à la flexion et a contribué à la redistribution des efforts internes en permettant d'augmenter la déformabilité des poutres. Un modèle théorique basé sur la

théorie du béton armé modifié a permis de prédire avec une bonne précision le comportement des poutres renforcées. L'utilisation d'un renfort hybride en fibres de verre-carbone unidirectionnel, a montré son efficacité. C'est une solution très avantageuse pour le renforcement des structures en béton armé.

I.3.3-Contrôle de la fissuration :

Une des raisons de réhabiliter une structure, comme les poutres d'un pont, peut être la découverte de fissures. Les méthodes courantes de réparation visant à limiter la propagation des fissures sont le béton projeté, la post contrainte extérieure et le collage de plaques d'acier ou alternativement, de plaques de PRF.

[9] **ARDLIINI, M. et NANNI, A.:** ont effectué une étude sur des poutres fissurées ayant été renforcées de lamelles de fibres de carbone. Dans cette étude, plusieurs paramètres de design ont été étudiés : deux types de laminés (fibres pré imprégnées et sèches à haut et bas module), deux types de préparations de surface (sablage mécanique et abrasion au jet de sable), deux sections de poutres (rapports hauteur/largeur de 0,5 et 2,0 afin de simuler des poutres profondes et peu profondes), deux portées (1100 mm et 2100 mm), deux rapports d'armature d'acier ($f_{i_s} = 0,64 \%$ et $p_s = 0,93 \%$), et différentes configurations de renforcement en PRF (nombre de couches et orientation des fibres sur la face tendue et sur les côtés de l'âme). Parmi les dix-huit poutres fabriquées, dix ont été préalablement fissurées avant l'installation des PRF.

Une charge égale à 30 % du moment résistant nominal a été appliquée sur celles-ci afin de simuler des conditions de services raisonnables et de former trois à quatre fissures dans la région de moment constant. Pour deux des poutres fissurées, la charge appliquée a été soutenue durant l'installation des lamelles de PRF pour simuler le cas où les charges de services ne sont pas enlevées au cours du renforcement. On a observé, à la suite d'essais jusqu'à la rupture, que l'efficacité des PRF dépend de la géométrie de la membrure et de la quantité d'armature interne. L'abrasion au jet sable des surfaces de béton semble la méthode de préparation des surfaces la plus efficace. La rigidité des fibres, la direction des fibres et le nombre de couches influencent grandement la résistance en flexion des sections. De plus, l'application d'une couche à 90° sur des couches à 0° de chaque côté de l'âme semble être une méthode d'ancrage efficace.

D'autre part, la performance des poutres fissurées avant renforcement n'était pas significativement différente des poutres non fissurées. Enfin, la performance des PRF à base de fibres sèches est sensiblement la même que celle des PRF à base de fibres préimprégnées.

I.3.4-Optimisation du renforcement :

[10] **M'BAZAA, I.** A analysé l'effet de la variation des longueurs des lamelles de renforcement sur le comportement des poutres. Pour ce faire, cinq poutres rectangulaires d'une portée de 3 m, avec la même armature, ont été fabriquées et testées.

Quatre de ces poutres ont été renforcées sur la face inférieure avec trois lamelles de PRFC. Les longueurs des lamelles étaient différentes pour chaque poutre et ont été fixées à partir du diagramme des moments fléchissant. Des ancrages en U ont été installés sur une poutre aux points de chevauchement des lamelles afin d'éviter leur décollement prématuré. D'après les essais jusqu'à la rupture, la variation de la longueur des lamelles n'a pas eu d'effet significatif sur la résistance et la rigidité des poutres. D'autre part, on observe que le cisaillement est important près des extrémités des lamelles, et qu'il augmente avec l'épaisseur du composite.

De plus, le glissement entre les lamelles est plus important pour les lamelles courtes. La rupture prématurée par décollement des lamelles pour tous les cas n'a pas permis d'analyser l'optimisation du renforcement jusqu'à la rupture théorique.

[11] **J.D. MATHIAS X. BALANDRAUD M. GREDIAC** décrit l'utilisation d'un algorithme génétique a fin d'optimiser un patch composite dans un contexte de renforcement de structures métalliques. Le problème d'optimisation d'un renfort composite est présenté dans un premier temps. Les variables de conception sont la forme ainsi que les plis et la position du patch composite sur la structure. Ensuite, les bases des algorithmes génétiques sont décrites avant d'être appliquées au problème de renforcement d'une voilure endommagée.

[12] **MISSIMOUN, M.** A étudié l'effet de l'orientation des fibres de PRF sur le comportement des poutres. Cinq poutres ayant les mêmes caractéristiques ont été fabriquées. Quatre d'entre elles ont été renforcées par trois couches de fibres de carbone à différents angles par rapport à l'axe longitudinal de la poutre: $(0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$; $(\pm 6^\circ, 0^\circ)$; $(\pm 9^\circ, 0^\circ)$ et $(\pm 12^\circ, 0^\circ)$. Une étude paramétrique avait démontré que le moment résistant diminuerait avec une augmentation de l'angle θ .

La combinaison des angles θ et $-\theta$ permet de contrebalancer d'éventuels effets de torsion sur la poutre. Les gains de résistance observés par rapport à la poutre de contrôle ont dépassé 49 %. Cependant, étant donné que la rupture de chaque poutre renforcée fut

provoquée par décollement des lamelles, il n'a pas été possible de valider les résultats théoriques de la variation de l'orientation des fibres. Cette étude a confirmé l'utilité d'approfondir les connaissances sur les effets des ancrages sur la résistance des plaques.

I.3.5-Ancrage des composites :

L'application de matériaux composites a prouvé son efficacité pour augmenter la résistance et la rigidité des poutres. Cependant, dans plusieurs cas, la capacité maximale de la poutre renforcée n'est pas atteinte en raison d'un délaminage prématuré du PRF.

Les modes de rupture les plus fréquemment rencontrés sont le délaminage aux extrémités du PRF causé par des contraintes de cisaillement trop élevées près des interfaces, et le décollement de la lamelle causé par un déplacement relatif des éléments de béton au niveau d'une fissure. Afin de solliciter au maximum le renforcement, des méthodes d'ancrages ont été élaborées dans le but d'éviter ces ruptures prématurées.

[13] YLVAIN CHATAIGNER, ARNAUD GAGNON, MARC QUIERTANT, KARIM BENZARTI, CHRISTOPHE AUBAGNAC. Le Département Laboratoire d'Autun s'est intéressé aux assemblages collés entre renforts composites et supports métalliques de type acier, Cet article rappelle dans un premier temps les domaines d'utilisation de la technique de collage ainsi que ses avantages, puis s'intéresse à la caractérisation du transfert des efforts par collage entre matériaux composites et métal.

L'influence du vieillissement hygrothermique (40°C, 95% d'humidité relative) ou de pseudo cycles de fatigue sur les caractéristiques de l'assemblage collé est ensuite étudiée afin évaluer la durabilité de l'interface composite/acier.

[14] BIZINDAVYI, L. et NEALE, K. W. Ont étudié la longueur de développement et d'ancrage de joints béton-composite. Des essais d'arrachement ont été effectués sur des lamelles *de* PRF collées sur des blocs de béton.

Les paramètres étudiés étaient le type de PRF et un nombre de plis variant de 1 à 3, afin d'étudier leur influence sur les longueurs de développement. Lors de ces essais, les conditions de cisaillement à l'interface composite-béton ont été analysées, et on a déterminé la distribution des contraintes et des déformations. Il a été démontré que les longueurs de transfert dépendent du niveau de chargement, et que leur valeur initiale est égale à une certaine fraction de la

longueur totale de développement. Des longueurs permettant de développer la capacité maximale du composite ont été proposées dans leur article.

[15] **JEAN-DENIS MATHIAS**. Des essais de traction uni axiale ont été réalisés sur des éprouvettes en aluminium renforcées par des patchs en carbone/époxyde. La méthode de la grille a été utilisée pour mesurer des champs cinématiques en surface du patch composite.

Cette méthode a permis d'étudier expérimentalement le transfert des efforts entre le substrat et le renfort suivant les deux dimensions du problème et de comparer les résultats obtenus avec les différents modèles développés

I.3.6-Modèles théoriques

Dans le but de mieux comprendre physiquement le comportement des sections renforcées, et d'utiliser plus efficacement les PRF comme renforcement, il a été nécessaire de développer des modèles théoriques. Ces modèles font appel à la résistance des matériaux.

I.3.7-Ductilité :

Un des concepts fondamentaux du dimensionnement des structures est la ductilité. La ductilité est la capacité d'une membrure à subir des déformations plastiques importantes avant d'atteindre la rupture. En béton armé conventionnel, elle est mesurée en comparant la courbure à l'état ultime et au point de plastification. Ce concept est grandement utilisé dans la conception parasismique des structures.

Dans les sections sous-armées en béton armé, une ductilité adéquate est assurée par le comportement plastique des armatures d'acier. En ce qui a trait aux poutres renforcées de matériaux composites, le comportement élastique du PRF jusqu'à sa rupture diminue les déformations plastiques de la section renforcée d'où une diminution de la ductilité malgré les grandes flèches mesurées.

[16] **SPADEA, G., SWAMY et N. BENCARDINO, F.** ont examiné, à partir de résultats expérimentaux, la validité de la définition de la ductilité et de la déformabilité des sections renforcées de PRF. Un des facteurs de déformabilité est défini comme étant le rapport du ratio flèche/courbure à l'ultime sur le ratio flèche/courbure lorsque le béton atteint une déformation de $1000\mu\text{E}$.

Cette valeur correspond à la fin du comportement linéaire du béton. Les résultats de l'étude ont démontré que les facteurs de déformabilité ne représentent pas aussi fidèlement et de façon cohérente le comportement d'une section renforcée que les indices de ductilité.

I.3.8-Fatigue :

Le renforcement à l'aide de matériaux composites permet aux poutres de ponts de supporter des charges de services plus élevées. Comme le passage des véhicules produit une charge cyclique, il convient d'examiner la résistance en fatigue des sections renforcées de PRF. Peu de travaux ont été entrepris pour analyser la performance en fatigue de ce type de poutres, comparativement à la résistance en flexion et en cisaillement sous charge statique.

En ce qui concerne la résistance des matériaux composites à la fatigue, soit après plus de dix millions de cycles, les fibres de carbone conservent 80 % de leur résistance initiale, les fibres d'aramide 40 % et les fibres de verres 25 %.

I.4-Conclusion

Un examen de la documentation technique de dernière année disponible indique l'importance des matériaux composite sur la réhabilitation et le comportement des structures renforcée.

Aujourd'hui des techniques et méthodes stochastiques sont développés pour bien métrisés les caractéristiques de l'emplacement et les dimensions de ces matériaux de renforcement.

CHAPITRE

II

MATERIAUX COMPOSITES ET TECHNIQUE DE RENFORCEMENT

II.1-Introduction :

Un matériau composite peut être défini d'une manière générale comme l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux, l'assemblage final ayant des propriétés supérieures aux propriétés de chacun des matériaux constitutifs. On appelle maintenant de façon courante "matériaux composites" des arrangements de fibres, les renforts qui sont noyés dans une matrice dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible. La matrice assure la cohésion et l'orientation des fibres, elle permet également de transmettre les sollicitations auxquelles sont soumises les pièces.

Il faut différencier charges et renforts. Les charges, sous forme d'éléments fragmentaires, de poudres ou liquide, modifient une propriété de la matière à laquelle on l'ajoute (par exemple la tenue aux chocs, la résistance aux UV, le comportement au feu...).

Les renforts, sous forme de fibres, contribuent uniquement à améliorer la résistance mécanique et la rigidité de la pièce dans laquelle ils sont incorporés.

II.2-Les renforts :

II.2.1-Fibre de verre :



Figure II.1:Fibre de verre.

Elles constituent le renfort essentiel des composites de grande diffusion. Elle est obtenue à partir de sable (silice) et d'additifs (alumine, carbonate de chaux, magnésie, oxyde de bore). On distingue trois types de fibres :

- E : pour les composites de grande diffusion et les applications courantes ;
- R : pour les composites hautes performances ;
- D : pour la fabrication de circuits imprimés (propriétés diélectriques).

II.2.2-Fibre de carbone:



Figure II.2:Fibre de carbone.

C'est la fibre la plus utilisées dans les applications de hautes performances. Elle est obtenue par carbonisation de la fibre de PAN (Polyacrylonitrile). Selon la température de combustion, on distingue deux types de fibres :

- fibres haute résistance (HR) : pour une combustion de 1000 à 1500 °C ;
- fibres haut module (HM) : pour une température de combustion de 1800 à 2000 °C.

II.2.3-Fibre d'aramide:



Figure II.3:Fibre d'aramide.

Souvent appelée KEVLAR, la fibre d'aramide est issue de la chimie des polyamides aromatiques. Il est possible de trouver deux types de fibres d'aramide de rigidités différentes :

- les fibres bas module : utilisées pour les câbles et les gilets pare-balles ;
- la fibre haute module : employées dans le renforcement pour les composites hautes performances.

II.2.4-Fibre de bore :

Fibres de haut module et insensibles à l'oxydation à hautes températures, elles sont obtenues par dépôt en phase gazeuse sur un substrat en tungstène.

II.2.5-Fibre de silice (ou de quartz) :

Elles sont produites comme le verre, par fusion, et sont essentiellement utilisées pour leur haute tenue chimique et thermique dans les tuyères pour moteur de fusée.

II.2.6-Fibres de polyéthylène de haut module :

Elles présentent une très bonne résistance à la traction mais une mauvaise mouillabilité. Pour des structures peu sollicitées, on peut encore utiliser des fibres synthétiques courantes de polyamide ou polyester.

II.2.7-Caractéristiques moyennes des fibres et renforts :

Tableau II.1:Caractéristiques moyennes des fibres et renforts

Renforts	Verre E	Verre R	Carbone HM	Carbone HR	Kelvar 49	Bore	Silicate d'alumine	Polyéthylène
Masse Volumique (Kg .m ⁻³)	2600	2500	1800	1750	1450	2600	2600	960
Module d'élasticité Longitudinal (Mpa)	74000	86000	390000	230000	130000	400000	200000	100000
Module de cisaillement (Mpa)	30000		20000	50000	12000			
Coefficient de Poisson	0.25	0.2	0.35	0.3	0.4			
Contrainte de rupture(traction) (Mpa)	2500	3200	2500	3200	2900	3400	3000	3000
Allongement à rupture %	3.5	4	0.6	1.3	2.3	0.8	1.5	
Coefficient de dilatation Thermique ⁰ C ⁻¹	0.5*10 ⁻³	0.3*10 ⁻³	0.08*10 ⁻³	0.02*10 ⁻³	-0.2*10 ⁻³	0.4*10 ⁻³		

II.2.8-Architecture des renforts :

Les structures composites sont anisotropes. La plupart des renforts travaillent bien en traction, mais offrent de moins bonnes performances en compression et cisaillement. Il est donc impératif de jouer sur la texture et la géométrie des renforts pour créer une architecture adaptée.

Il existe différentes géométries et textures de renforts :

- **Les unidirectionnels (UD)** : Dans une nappe UD, les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport aux autres à l'aide d'une trame très légère. Taux de déséquilibre très grand.

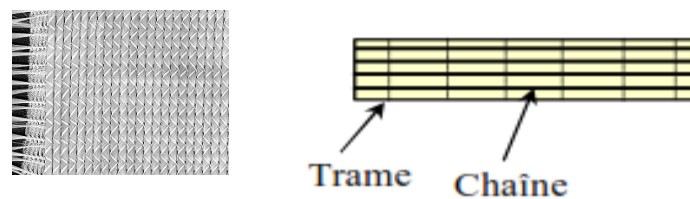


Figure II.4: Les renforts unidirectionnels (UD).

Les tissus se composent de fils de chaîne et de trame perpendiculaires entre eux.

- **Toile ou taffetas** : Chaque fil de chaîne passe dessus puis dessous chaque fil de trame, et réciproquement.

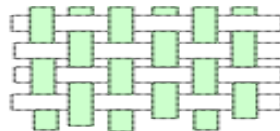


Figure II.5: Les renforts Toile ou taffetas.

Le tissu présente une bonne planéité et une relative rigidité, mais est peu déformable pour la mise en œuvre. Les nombreux entrecroisements successifs génèrent un embuvage important et réduisent les propriétés mécaniques.

- **Serge** : Chaque fil de chaîne flotte au dessus de plusieurs (n) fils de trame et chaque fil de trame flotte au dessus de (m) fils de chaîne. Armure de plus grande souplesse que le taffetas ayant une bonne densité de fils. Ci-contre, un sergé 2/2.

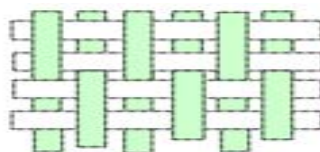


Figure II.6: Les renforts serge.

• **Satin** : Chaque fil de chaîne flotte au dessus de plusieurs (n_1) fils de trame et réciproquement. Ces tissus ont des aspects différents de chaque côté. Ces tissus sont assez souples et adaptés à la mise en forme de pièces à surfaces complexes.

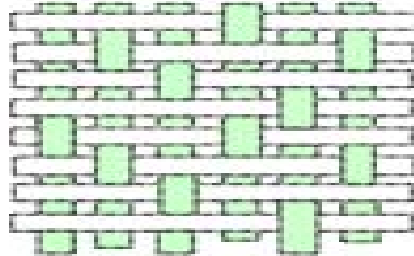


Figure II.7: Les renforts Satin.

Ce type de tissus présente une forte masse spécifique. Comme un tissu est difficilement déformable sur une surface gauche, on réalise également pour des utilisations spécifiques de l'armure bi ou tridimensionnelle.

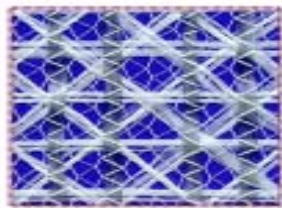


Figure II.8: Tissu multiaxial.

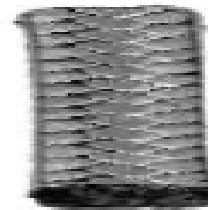


Figure II.9: Tissu 3D ou tresse.

Il est également possible de réaliser des structures de renforts hybrides en tissant des fibres de natures différentes ou, en superposant des tissus ou nappes de renforts de fibres différentes.

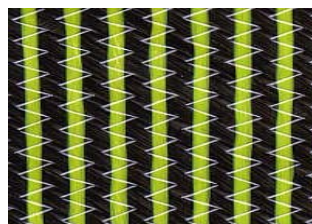


Figure II.10: Tissu hybride carbone – aramide.

II.3-Les charges :

On désigne sous le nom général de charge toute substance inerte, minérale ou végétale qui, ajoutée à un polymère de base, permet de modifier de manière sensible les propriétés mécaniques, électriques ou thermiques, d'améliorer l'aspect de surface ou bien, simplement de réduire le prix de revient du matériau transformé.

A l'inverse des matières thermoplastiques, les matières thermodurcissables ont toujours contenu des charges de nature et de forme variées, à des taux souvent élevés pouvant atteindre 60 % en masse.

Pour un polymère donné, le choix d'une charge est déterminé en fonction des modifications recherchées pour l'objet fini. Mais, d'une manière générale, les substances utilisables comme charges des matières plastiques devront d'abord satisfaire à un certain nombre d'exigences :

- Compatibilité avec la résine de base
- Mouillabilité
- Uniformité de qualité et de granulométrie
- Faible action abrasive
- Bas prix de revient



Figure II.11 : Exemples de charges utilisées dans les CMO : (a) micro-billes de verre, (b) noir de carbone, (c) silice.

II.4-Les matrices :

La matrice a pour rôle de lier les fibres renforts, répartir les contraintes encaissées, apporter la tenue chimique de la structure et donner la forme désirée au produit.

On utilise actuellement surtout des résines thermodurcissables (TD) que l'on associe à des fibres longues, mais l'emploi de polymères thermoplastiques (TP) renforcés de fibres courtes se développe fortement.

Il est important de bien situer les différences fondamentales de ces deux types de matrices.

La structure des TP se présente sous forme de chaînes linéaires, il faut les chauffer pour les mettre en forme (les chaînes se plient alors), et les refroidir pour les fixer (les chaînes se bloquent). Cette opération est réversible.

La structure des TD a la forme d'un réseau tridimensionnel qui se pont (double liaison de polymérisation) pour durcir en forme de façon définitive, lors d'un échauffement. La transformation est donc irréversible.

Tableau II.2: la différence entre matrices TP et TD

Matrice	Thermoplastique TP	Thermodurcissables TD
Etat de base	Solide prêt à l'emploi	Liquide visqueux à polymériser
Stockage	Illimité	réduit
Mouillabilité renforts	difficile	aisée
Moulage	Chauffage+refroidissement	Chauffage continu
Cycle	Court	long
Tenue au choc	Assez bonne	limitée
Tenue thermique	réduite	bonne
Chutes et déchets	recyclables	Perdus ou recyclés en charges
Conditions de travail	Propreté	Emanation pour « méthode humide »

II.4.1-Les matrices thermodurcissables :

- **Polyesters insaturés** : C'est la résine la plus utilisée dans l'application composite de grande distribution.

Une résine de polyester insaturé contenant un monomère insaturé (généralement le styrène) est réticulée à température ambiante par addition d'un catalyseur de type peroxyde organique et d'un accélérateur. Elle passe successivement de l'état liquide visqueux initial à l'état de gel, puis à l'état de solide infusible.

La réaction est exothermique et la température de la résine augmente progressivement depuis le gel jusqu'à un maximum pour redescendre ensuite lentement à la température ambiante.

Le durcissement sera d'autant plus rapide ou, si l'on préfère, le temps nécessaire dans le moule sera d'autant plus court que la courbe de température en fonction du temps se rapprochera davantage de la verticale.

La réaction de durcissement dépend de la réactivité de la résine, de la forme de l'objet fabriqué (épaisseur, etc.), de la nature et du dosage du système catalytique.

Il existe différents types de résines :

- Orthophtalique : la plus courante ;
- Isophtalique : qui donne une meilleure tenue à l'humidité ;
- Chlorée : apportant une auto extingüibilité ;
- Bisphénol : possédant de bonnes caractéristiques chimiques et thermiques.

Tableau II.3: Caractéristiques des matrices TD.

Matrice TD	Epoxyde	Phénolique	Polyester	Polycarbonate	Vinylester	Silicone	Uréthane	Polyimide
Masse Volumique (Kg .m⁻³)	1200	1300	1200	1200	1150	1100	1100	1400
Module d'élasticité Longitudinal (Mpa)	4500	3000	4000	2400	3300	2200	700à 7000	4000 à 19000
Module de cisaillement (Mpa)	1600	1100	1400					1100
Coefficient de Poisson	0.4	0.4	0.4	0.35		0.5		0.35
Contrainte de rupture (traction) (Mpa)	130	70	80	60	75	35	30	70
Allongement à rupture %	2	2.5	2.5		4		100	1
Coefficient de dilatation Thermique⁰ C⁻¹	11*10 ⁻⁵	1*10 ⁻⁵	8*10 ⁻⁵	6*10 ⁻⁵	5*10 ⁻⁵			8*10 ⁻⁵

II.4.2-Les matrices thermoplastiques :

Les polymères utilisés sont essentiellement des thermoplastiques techniques qui présentent à l'état vierge de bonnes caractéristiques mécaniques. Un renforcement de fibres courtes leur confère une tenue thermique et mécanique améliorée et, une bonne stabilité dimensionnelle.

Ce sont donc essentiellement les suivants, qui possèdent tous une tenue en température supérieure à 100 °C et sont (hors POM) auto-extinguibles :

- Polyamide (PA), tenue au choc, bonne résistance à la fatigue et aux hydrocarbures ;
- Polytéraphthalate éthylénique et butylénique (PET, PBT), bonne rigidité, bonne ténacité ;
- Polycarbonate (PC), tenue au choc ;
- Polysulfure de phénylène (PPS), résistance à l'hydrolyse ;
- Polyoxyméthylène (POM), bonne tenue à la fatigue ;
- Polysulfurés (PSU et PPS), bonne stabilité chimique et à l'hydrolyse, peu de fluage, tenue au chaud ;
- Polypropylène (PP), peu onéreux et assez stable en température, mais combustible.

De plus en plus, on utilise des thermoplastiques thermostables (tenue en température > 200 °C et bonnes propriétés mécaniques), en particulier les suivants :

- Polyamide-imide (PAI) ;
- Polyéther-imide (PEI) ;
- Polyéther-sulfone (PES) ;
- Polyéther-éther-cétone (PEEK). [17]

Tableau II.4: Caractéristiques des matrices TP.

Matrice TP	PP	PPS	PA	PES	PEI	PEEK
Masse Volumique (Kg .m ⁻³)	900	1300	1100	1350	1150	1300
Module d'élasticité Longitudinal (Mpa)	1200	4000	2000	3000	3300	4000
Coefficient de Poisson	0.4	-	0.35	-	-	-
Contrainte de rupture (traction) (Mpa)	30	65	70	85	105	90
Allongement à rupture %	20à400	100	200	60	60	50
Coefficient de dilatation Thermique ⁰ C ⁻¹	9*10 ⁻⁵	5*10 ⁻⁵	8*10 ⁻⁵	6*10 ⁻⁵	6*10 ⁻⁵	5*10 ⁻⁵

II.5-Constitution et intérêt des composites a matrice organique (CMO) pour la conception des structures :

De façon générale, il existe trois grandes familles de matériaux composites :

Les Composites à Matrice Céramique (CMC), essentiellement utilisés pour les applications à (très) hautes températures.

Les Composites à Matrice Métallique (CMM) et les Composites à Matrice Organique (CMO), les plus largement employés.

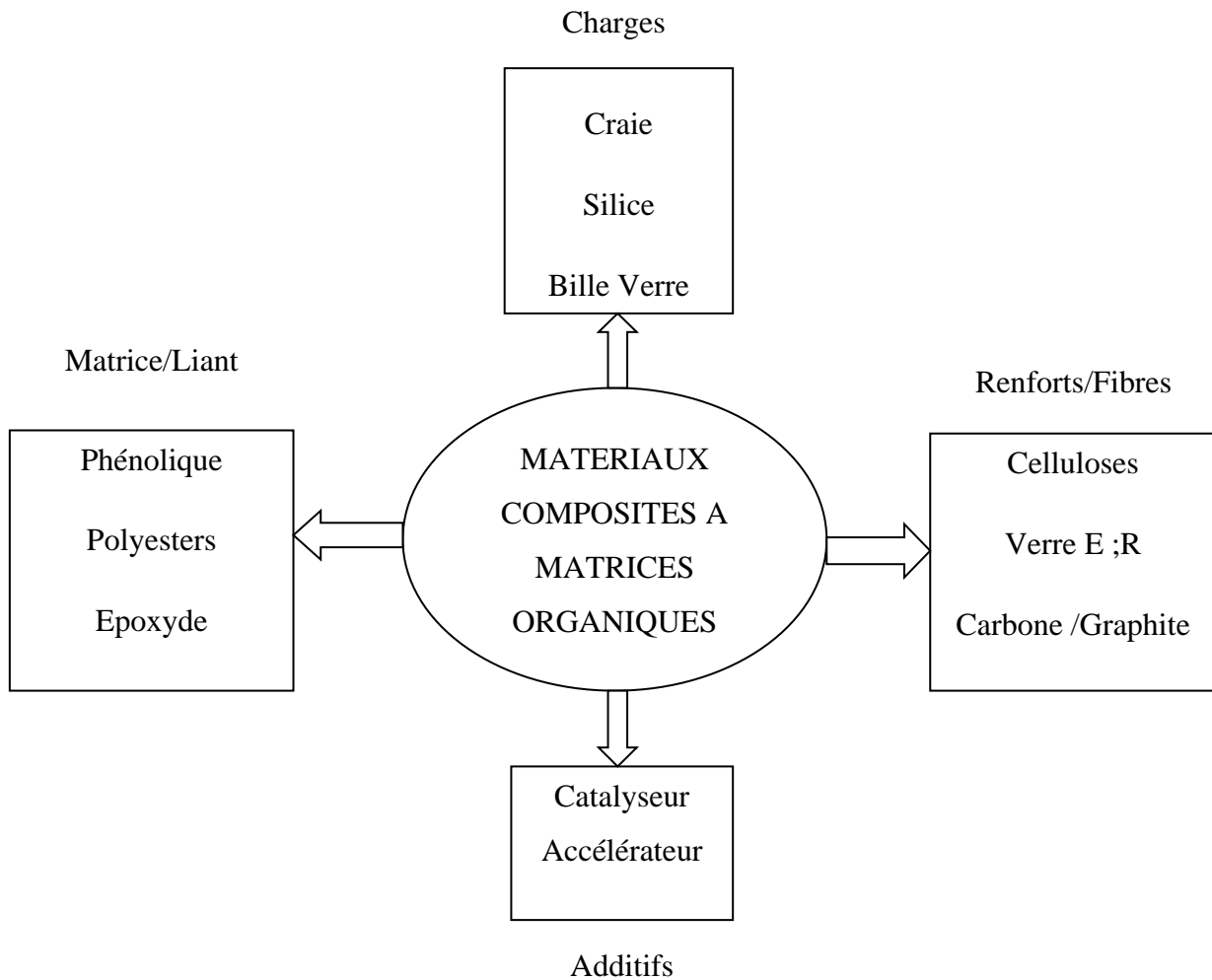


Figure II -12: Constituants des matériaux composites.

II.6-Constitution et approche d'échelle des matériaux composites :

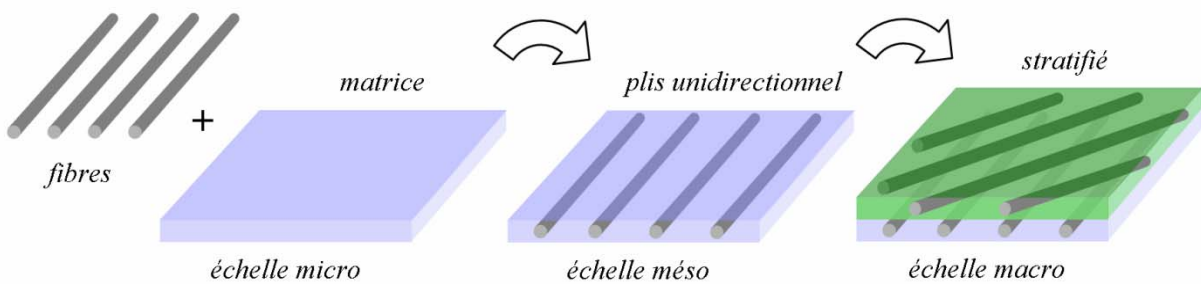


Figure II .13: Les échelles des constituants d'un composite stratifié.

La description de l'architecture du stratifié permet de mettre en évidence trois échelles pour l'analyse de son comportement (Figure II-12) :

- ✓ Microscopique : fibre et matrice,
- ✓ Mésoscopique pour le comportement homogénéisé du pli.

- ✓ macroscopique pour le comportement homogénéisé du stratifié.

II.7-Scénario d'endommagement des stratifiés :

De façon générale, on distingue quatre phases dans le scénario d'endommagement d'une éprouvette lisse constituée de l'empilement de plis unidirectionnels (Figure III-15) :

1. la décohésion entre les fibres et la matrice et la microfissuration matricielle,
2. l'apparition de fissures transverses, parallèles aux fibres et traversant le pli, résultant de la coalescence de microdommages,
3. l'apparition et l'évolution de microdélaminages en pointe de fissure transverse au niveau des interfaces entre plis,
4. la ruine finale du stratifié par rupture des fibres, et la stratification. Délaminage macroscopique ou rupture matricielle suivant le type de sollicitations

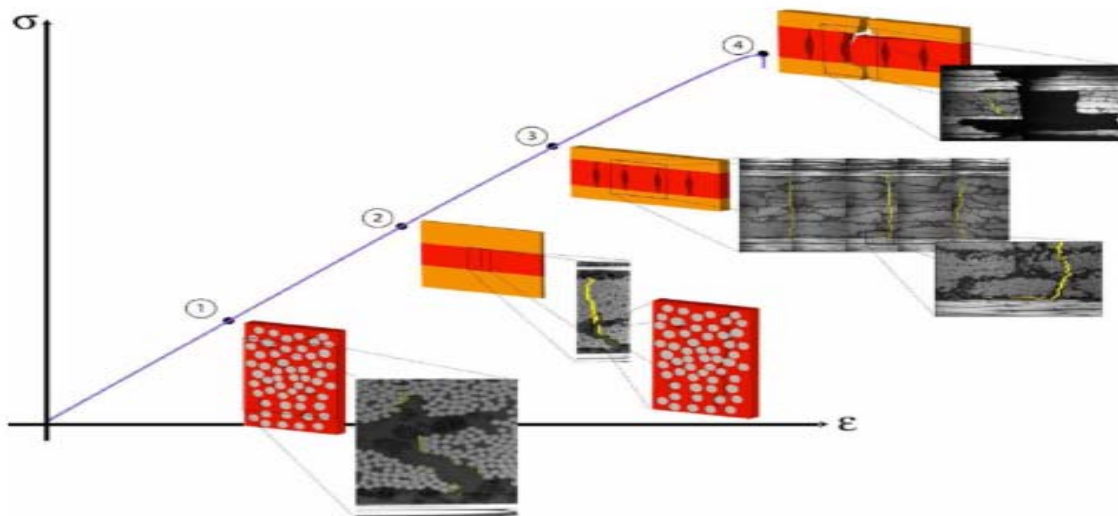


Figure II-14: Un scénario d'endommagement au cours du chargement d'un composite stratifié [18].

La séquence d'empilement, le procédé de fabrication, la nature de la matrice et des interfaces, l'environnement, etc. sont autant de facteurs qui influent sur l'ordre de création et la propagation des défauts et dégradations. De plus, la complexité des interactions entre les différents mécanismes d'endommagement est encore accrue par la complexité du chargement et celle de la géométrie de la structure. [19]

II.8-La nécessité d'un renfort structurel :

Les causes qui conduisent à un renfort structurel sont aussi nombreuses que le nombre de structures elles-mêmes, chaque cas doit être considéré comme un cas particulier. Les plus fréquentes sont :

- ***Accroissement des charges qui sollicitent la structure :***
 - Changement d'usage de la structure (exemple: bâtiment d'habitation réhabilité en centre commercial).
 - Augmentation du niveau d'activité dans la structure (exemple: anciens ponts soumis au trafic actuel).
 - Installation de machinerie lourde dans les bâtiments industriels.
- ***Défauts dans le projet ou dans l'exécution :***
 - armature insuffisante ou mal placée.
 - mauvais matériaux.
 - dimensions insuffisantes des éléments structurels.
- ***Rénovation des structures anciennes :***
 - prise en compte de renforts par des sollicitations non considérées au moment du projet ou de la construction (vibration, actions sismiques et autres).
 - connaissance des insuffisances de la méthode de calcul utilisée lors de la conception, ainsi que des limitations montrées par des structures calculées durant une époque ou une période.
 - vieillissement des matériaux avec une perte des caractéristiques initiales.
- ***Changement de la forme de la structure :***
 - suppression de poteaux, piliers, murs porteurs, élargissement de portées de calcul.
 - ouverture de passages en dalles pour escaliers ou ascenseurs.

- *Dégâts dans la structure :*
 - corrosion et diminution de la section des armatures dans le béton.
 - impacts contre la structure.
 - incendies.
- *Nécessité d'améliorer les conditions en service :*
 - diminuer les déformations et flèches,
 - réduire l'intensité des contraintes sur les armatures.
 - diminuer l'ouverture des fissures.

II.9-Différentes méthodes de renforcement et de réparation :

Dans le domaine de la construction, il existe de nombreuses procédures de renforcement ou de réparation des structures [20], les plus courantes sont :

1. Incorporation de profils en acier : il s'agit de construire une structure parallèle à celle déjà existante qui supporte les charges. Ce type de structure demande beaucoup d'espace, il est seulement viable pour de grands renforcements.

2. Collage d'éléments préfabriqués : cette méthode nécessite des ouvrages spéciaux associés.

3. Addition d'armatures en acier sans augmentation de la section en béton : cette technique est normalement employée pour le remplacement d'une ancienne armature, en cas de corrosion.

4. Augmentation de la section en béton avec ou sans addition d'armature en acier: Le béton peut être coulé ou projeté.

5. Adjonction de platines en acier: L'acier collé au béton augmente la section structurelle résistante. On l'utilise dans les poutres, dalles, murs, piliers.

6. Adjonction de lamelles, bandes ou tissus de matériaux composites: Le concept est le même que dans le cas précédent, à la différence que l'élément résistant incorporé est fait de

matériaux composites (habituellement, de résine époxy et de fibres de carbone, verre ou d'aramide).

7. Amélioration des structures par précontrainte extérieure.

8. Amélioration de la structure des bâtiments à l'aide de dispositifs amortisseur.

II.9.1-Les précautions à prendre lors de la réhabilitation d'une structure métallique :

Avant toute étude, il faut procéder à un diagnostic de la structure à réhabiliter :

- Relevé géométrique de la structure (portées, profils) ;
- Etat général (corrosion) ;
- Recherche des principes de stabilité ;
- Recherche des caractéristiques de l'acier (prélèvement, essai, soudabilité éventuelle) ;
- Recherche de la charge portante maximale admissible (poids propre + surcharges) ;
- Moyens d'assemblage.

En fonction des résultats de cette enquête, les solutions de réhabilitation et/ou renforcement pourront être envisagées. Il faudra rester dans l'esprit initial de la conception ; ainsi, des rivets défectueux pourront, par exemple, être remplacés par des boulons précontraints et non pas par des boulons. [21]

Dans le cas des infra structures métalliques, l'intérêt du renforcement par composites peu paraître moins évident car les renforts et le support métallique présentent des performances mécaniques très comparables.

Cependant, les évolutions technologiques en cours (amélioration des techniques de mise en œuvre et de la qualité des adhésifs, apparition de composites à haut module d'élasticité) laissent penser que cette méthode de réhabilitation pourrait être davantage appliquée sur les structures métalliques.

II.10-Conclusion :

Les multiples avantages des matériaux composites, Mécaniques et physico-chimiques permettent l'utilisation des matériaux composites comme méthode de renforcement et de réhabilitation des structures, l'application de tissus ou lamelles en PRFC (polymère renforcé en fibre de carbone) est une alternative intéressante aux méthodes de réparation conventionnelle.

C'est pour cette raison que le choix de renforcement à l'aide des matériaux composites (verre-époxyde, carbone-époxyde) a fait l'objet de Cette étude.

CHAPITRE

III

TEORIE DES

POUTRES

STRATIFIEES

III.1-Introduction :

La poutre est une barre, un élément longiligne utilisé en conception des structures et en construction.

En 1638, Galilée publie un traité de mécanique dans lequel il analyse le comportement d'une poutre en bois de section rectangulaire encastree dans un mur et soumise à un poids en son extrémité. Il donne les premières analyses de la résistance des matériaux.

- Une poutre est un élément longiligne dont la section transversale varie peu dans sa longueur. On l'obtient par déplacement d'une section le long d'une courbe.
- Les poutres peuvent avoir des sections de forme très variées.
- Le modèle représentant la poutre de Galilée est une barre soumise à une force ponctuelle.

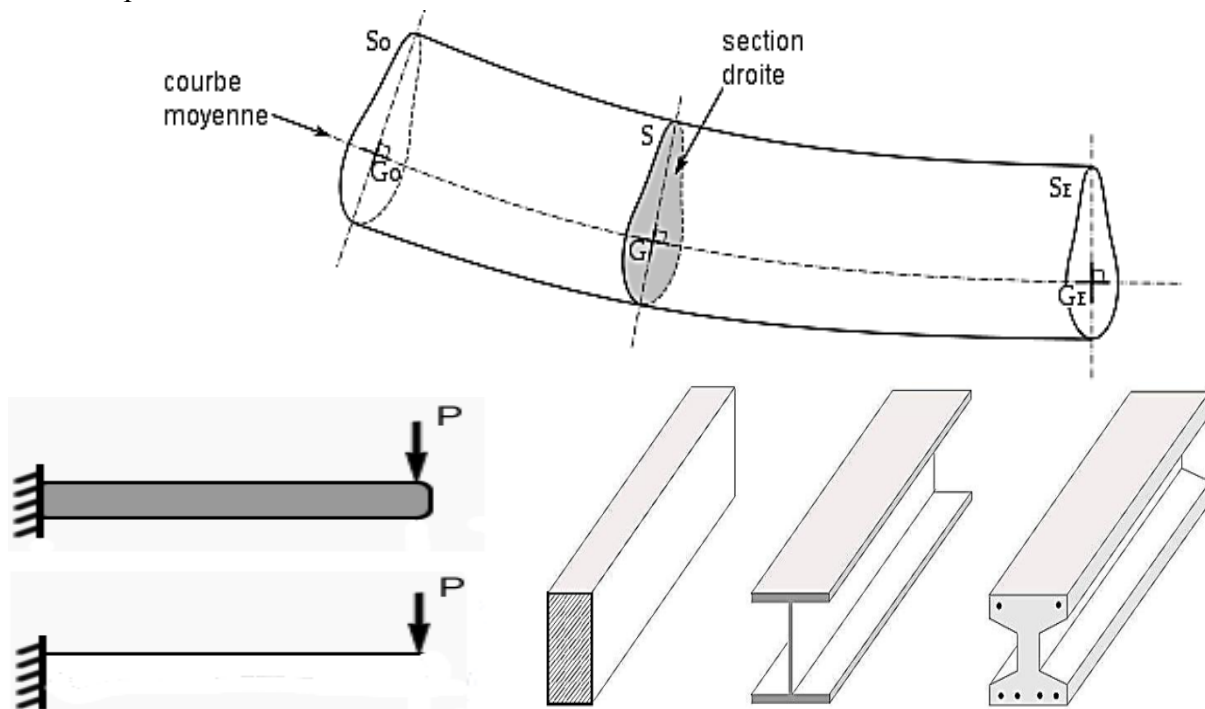


Figure.III.1:Types de poutres.

III.2-Flexion des poutres :

III.2.1.Définitions :

Une poutre est soumise à la flexion lorsque les forces qui lui sont appliquées tendent à faire varier sa *courbure* (Fig. III.2).



Figure.III.2: Courbure d'une poutre.

III.2.2-Essai de flexion :

Considérons une poutre reposant sur deux appuis soumis à une charge concentrée verticale (figure. III.3).

Après déformation, cette poutre fléchit : On constate que les fibres situées dans la partie supérieure sont sollicitées en compression tandis que celles situées en partie inférieure sont sollicitées en traction.

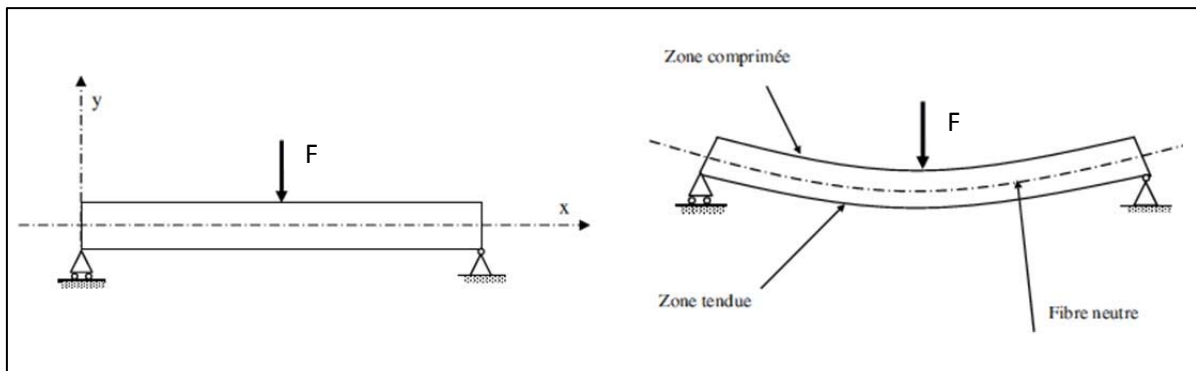


Figure. III.3: Modélisation d'un essai de flexion trois points.

Entre ces deux zones il existe une fibre qui reste ni tendue ni comprimée : la fibre neutre.

Les allongements ou raccourcissements relatifs sont proportionnels à la distance y de la fibre considérée.

III.2.3-Flexion simple :

La flexion simple est un état de charge tel que dans toute section droite d'une pièce il n'existe qu'un moment fléchissant M_f et un effort tranchant F associé.

La flexion est aussi dite simple, lorsque la poutre possède un plan de symétrie et que les forces fléchissant agissent dans ce plan, perpendiculairement au grand axe de la poutre.

III.2.4-Hypothèses :

- ✓ Les déformations sont élastiques et suffisamment petites pour ne pas modifier l'intensité des forces ni leurs distances respectives.
- ✓ Toute fibre contenue dans un plan de symétrie demeure dans ce plan pendant la déformation.
- ✓ Hypothèse de Navier-Bernoulli(1705): les sections droites de la poutre demeurent planes et perpendiculaires à l'axe de celle-ci après déformation.

III.2.5-Répartition des contraintes :

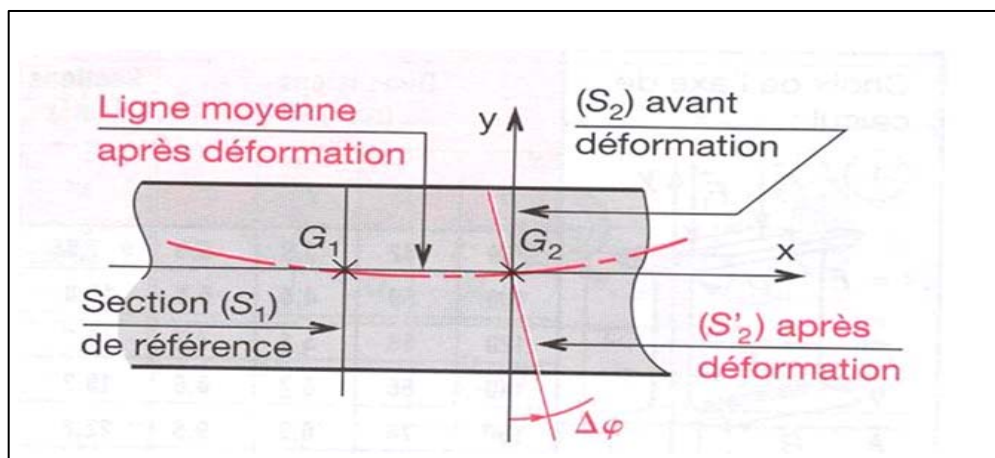


Figure III.4: Définition de l'angle $\Delta\varphi$.

Lorsque la poutre fléchit (Figure. III.4), la section droite pivote d'un angle $\Delta\varphi$.

Les contraintes normales engendrées sont proportionnelles à la distance qui les sépare du plan des fibres moyennes, d'où : $\sigma_M = -E\theta y$

E : Module de Young [MPa]

Y : distance de M par rapport à la fibre neutre [mm].

$\theta = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$: Angle unitaire de flexion [rad/mm]

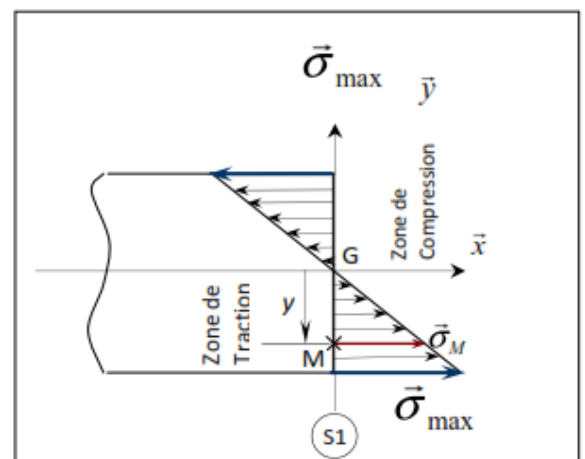


Figure III.5: Répartition des contraintes dans une section droite.

III.3-Flexion des poutres composite :

L'intérêt de mettre en place une analyse sur le comportement en flexion des poutres est liée à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux stratifiés et d'autre part à l'utilisation des poutres comme éléments de base dans la réalisation des structures.

Le type d'essais le plus employé pour déterminer les caractéristiques mécaniques et le comportement des matériaux composites est en fait la flexion.

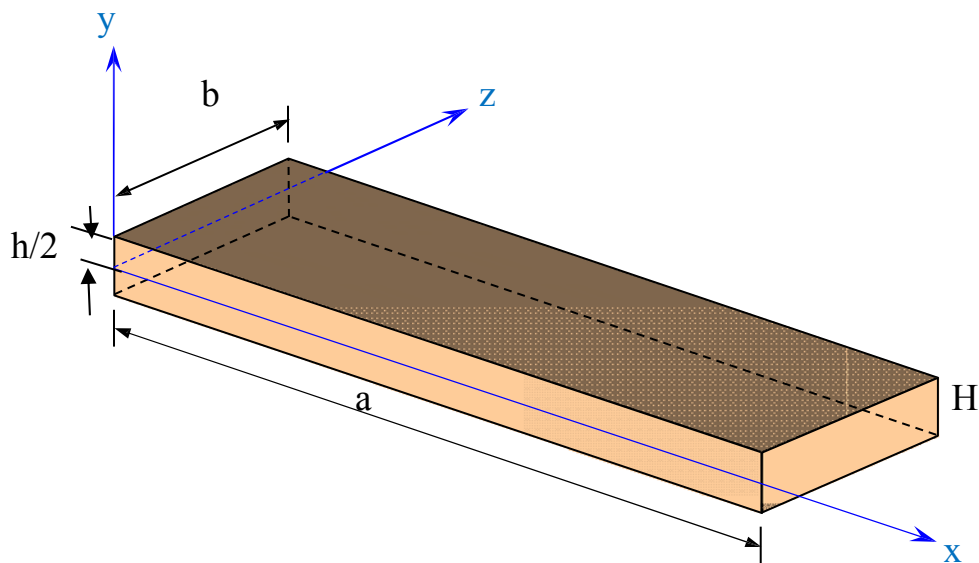


Figure .III.6 : Élément de poutre.

III.3.1-Machines de flexion :

La plupart des machines de flexion sont aujourd'hui dites universelles (traction, flexion, compression, fluage...), (voir figure III.7)

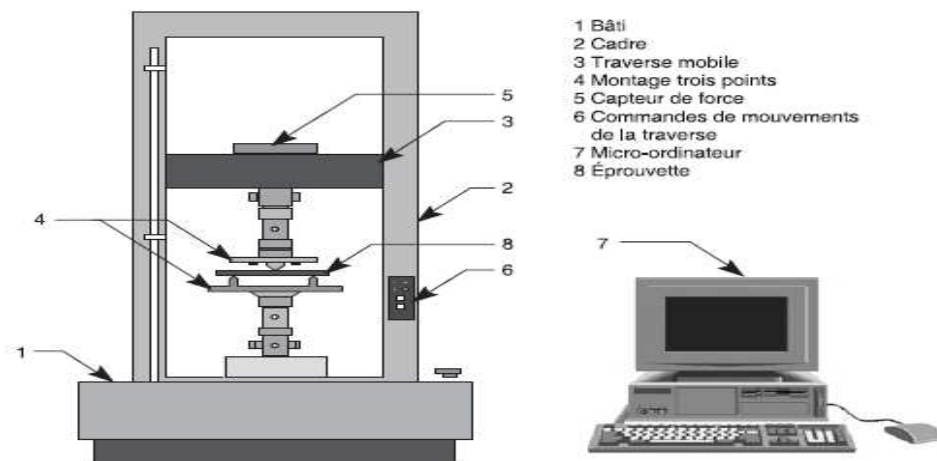


Figure III.7. Machine universelle en montage de flexion.

III.3.2-Les poutres stratifiées :

Les stratifiés sont des structures composites courantes, formées par l'empilement de plusieurs couches adhérant l'une à l'autre. Les couches étant anisotropes et possédant des orientations différentes, ces structures ont des comportements compliqués, que les modèles homogènes et isotropes ne permettent pas de simuler correctement. Cette ressource s'intéresse au cas particulier des poutres stratifiées, et montre comment la résistance des matériaux peut être adaptée pour prévoir leur comportement.

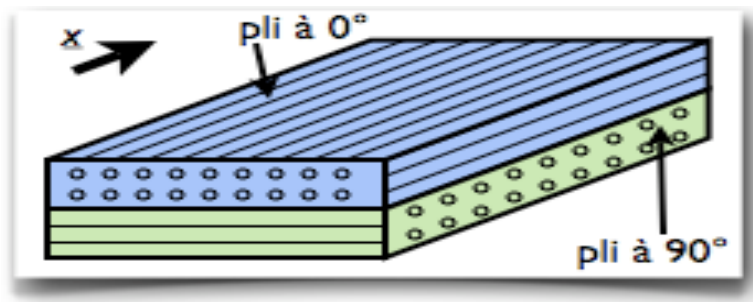


Figure III.8 : Un stratifié [0,90].

Pour connaître le comportement de chacun des plis, nous souhaitons modéliser la pièce stratifiée afin de simuler son comportement sous charge, dans son environnement. Pour ce faire, il est important de se souvenir que la rigidité d'un pli n'est pas la même dans toutes les directions de l'espace : elle dépend de l'angle entre la direction des fibres et la direction des sollicitations.

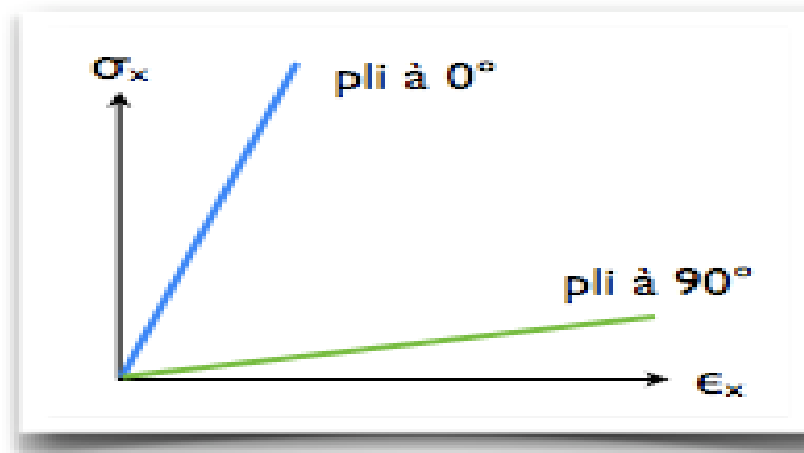


Figure III.9: Effet de l'orientation : deux plis orientés différemment ont des rigidités différentes dans une direction x donnée.

III.3.3-Comportement élastique d'une couche de matériaux orthotropes :

III.3.3.1-Comportement dans les axes du matériau :

Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope, rapporté à ses axes principaux est décrit en introduisant soit sa par matrice de rigidité C_{ij} .

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Soit sa matrice de souplesse S_{ij}

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

III.3.3.2-Etat de contraintes planes :

Dans le cas de la théorie des stratifiés, on est amené à considérer un état de contraintes planes défini par :

$$\sigma(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{66} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Dans ce cas, les relations d'élasticité sont explicitées à partir de la matrice de rigidité réduite Q du matériau :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{66} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Où les constantes de rigidité s'expriment en fonction des rigidités suivantes :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= C_{11} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} & Q_{22} &= C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} \\ Q_{12} &= C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}} & Q_{66} &= C_{66} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Les constantes de rigidité s'expriment en fonction des modules de l'ingénieur : E_L module de Young longitudinal, E_T module de Young transversal, ν_{LT} coefficient de poisson et G_{LT} module de cisaillement, suivant les expressions :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT}^2} & Q_{22} &= \frac{E_T}{E_L} Q_{11} \\ Q_{12} &= \nu_{LT} Q_{11} & Q_{66} &= G_{LT} \end{aligned} \quad (3.6)$$

III.3.3.3-Champ des déformations :

On écrit le champ des déplacements, en se basant sur la théorie classique des stratifiés, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

Le champ de déformations se déduit des déplacements (u, v, w) et s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\
\gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\
\gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \\
\gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Ce champ des déformations est celui d'un schéma du 1er degré avec cisaillement transverse.

Dans la théorie classique des stratifiés, on émet une hypothèse supplémentaire qui consiste à négliger le cisaillement transverse et à considérer, dans ce cas, les déformations en cisaillement transverse nulles, soit :

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = 0 \tag{3.9}$$

D'après (4.9), cette hypothèse implique :

$$\varphi_x(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \varphi_y(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \tag{3.10}$$

Le tenseur des déformations en un point M est :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Le champ des déformations est la superposition :

➤ *Des déformations en membrane :*

$$\varepsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

s'exprimant exclusivement en fonction des déplacements (u_0, v_0) dans le plan (Oxy) des points de ce plan

➤ *des déformations en flexion et en torsion :*

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

s'écrivant en fonction des angles de rotation de la déformée du plan moyen et de la cote z du point M . Généralement, les déformations en flexion et torsion s'expriment suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = z\kappa(x, y) \quad (3.14)$$

Ou bien

$$\varepsilon_f(M) = z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

La matrice $\kappa(x, y)$ est appelée matrice des courbures de la plaque sollicitée en flexion.

Finalement, le champ des déformations s'écrit :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_m(M) + \varepsilon_f(M) \quad (3.16)$$

Où

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

III.3.3.4-Champ des contraintes :

L'état de contraintes en un point M du stratifié s'exprime en fonction du champ des déformations. Les schémas de déformation les plus simples et les plus utilisés sont ceux du premier degré de la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Le tenseur des contraintes au point M est donc de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Le champ de contrainte se réduit aux seules contraintes en membrane : $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$.

III.3.4-Expression des résultantes et des moments :

III.3.4.1-Résultantes en membrane :

Le champ des résultantes en membrane, noté $N(x, y)$, est défini par :

$$[N(x, y)] = \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_k(M)] dz \quad (3.20)$$

Ou $\sigma_k(M)$ est la matrice des contraintes en membrane dans la couche k. Soit :

$$[N(x, y)] = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (3.21)$$

N_x, N_y, N_{xy} sont respectivement les résultantes, par unité de longueur de plaque, des contraintes normales suivant les axes x et y et des contraintes de cisaillements, dans le plan (x, y) . Elles sont schématisées symboliquement à la (figure III.10):

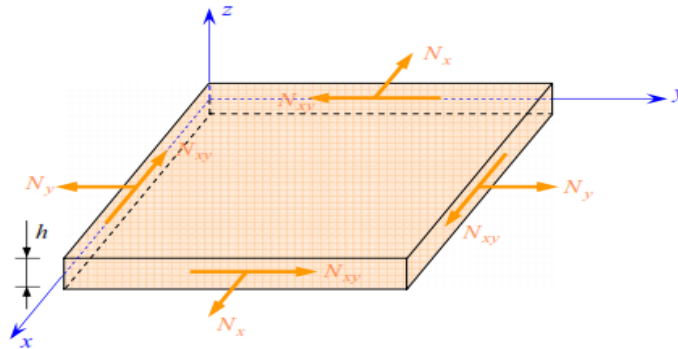


Figure III.10 : Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié.

La discontinuité des contraintes en passant d'une couche à l'autre conduit à réécrire la relation (3.20) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (3.22)$$

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z Q'_k k(x, y)] dz$$

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \left[Q'_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^h dz \right] + \sum_{k=1}^n \left[Q'_k k(x, y) \int_{h_{k-1}}^h z dz \right] \quad (3.23)$$

$$N(x, y) = \left[\sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right] k(x, y)$$

Soit en définitive:

$$N(x, y) = A\varepsilon_m(x, y) + Bk(x, y) \quad (3.24)$$

En introduisant les matrices :

$$A = \sum_{k=1}^1 (h_k - h_{k-1}) Q'_k$$

$$A = [A_{ij}] \quad (3.25)$$

Avec

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (Q'_{ij})_k$$

$$B = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \quad (3.26)$$

$$B = [B_{ij}]$$

Avec

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (Q'_{ij})_k \quad (i, j) = (x, y)$$

Ces équations montrent que dans le cas d'un stratifié, les résultantes en membrane ne sont pas seulement fonctions des déformations en membrane comme dans le cas de plaques homogènes, mais sont également fonction des courbures en flexion et en torsion.

III. 3.4.2-Moments de flexion et de torsion :

Les relations fondamentales des stratifiés font intervenir les moments résultants des contraintes exercées sur un élément du stratifié. Les moments de flexion et de torsion sont définis par :

$$[M_f(x, y)] = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (3.27)$$

M_x et M_y sont les moments de flexion

M_{xy} le moment de torsion. Ils sont schématisés à la (figure III.11).

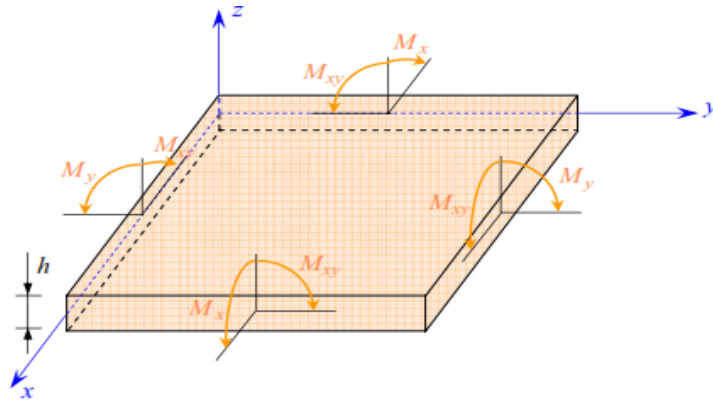


Figure III.11 : Schématisation des moments de flexion et de torsion.

Le champ des moments s'explique comme suit :

$$M_f(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [zQ'_k \varepsilon_m(x, y) + z^2 Q'_k k(x, y)] dz \quad (3.28)$$

$$M_f(x, y) = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k \right] k(x, y)$$

Soit :

$$M_f(x, y) = B \varepsilon_m(x, y) + D k(x, y) \quad (3.29)$$

En introduisant les matrices :

$$D = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k \quad (3.30)$$

Avec

$$[D_{ij}] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{ij})_k \quad (i, j) = (x, y)$$

Les moments de flexion et de torsion sont donc fonctions des courbures en flexion et en torsion, mais sont également fonction des déformations en membrane.

III.3.5-Equation constitutive :

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et moments en fonctions des déformations en membrane et des courbures.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.31a)$$

Ou sous la forme contractée :

$$\begin{bmatrix} N \\ - \\ M_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ - & - \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ - \\ k \end{bmatrix} \quad (3.31b)$$

Les termes des matrices introduites donnés par les expressions (3.25), (3.26) et (3.30) sont également exprimés en introduisant l'épaisseur e et la cote z au centre de la couche k , sous la forme :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k z_k \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k \left(e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

III.3.6-Matrice de rigidité :

La matrice intervenant dans l'expression (3.30) est la matrice de rigidité du stratifié décrivant le comportement élastique macroscopique du stratifié au point $M_0(x,y)=M(x,y,0)$.

La matrice A est la matrice de rigidité en membrane.

D est la matrice de rigidité de flexion.

B la matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

Ce couplage existe même si les matériaux des couches sont isotropes. Il résulte de la structure en couches de matériaux de caractéristiques mécaniques différentes.

Le couplage est nul ($B=0$) seulement dans le cas où le stratifié est symétrique. La symétrie implique une symétrie de propriétés des couches, de leurs cotes et de leurs orientations.

Divers couplages sont observés et mis en évidence. Le couplage torsion cisaillement provient des termes A_{16} et A_{26} . Le couplage membrane-flexion résulte des termes B_{11} B_{12} et B_{22} , alors que le couplage membrane-torsion résulte des termes B_{16} et B_{26} . Enfin, le couplage flexion-torsion résulte des coefficients D_{16} et D_{26} .

III.4-Théorie classique des stratifiés :

III.4.1-Expressions générales :

Dans le cas d'une flexion pure d'un stratifié symétrique, l'équation constitutive (3.31a) se réduit à :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Où k_x , k_y et k_{xy} sont définis dans les relations :

$$k_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad k_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad k_{xy} = -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (3.34)$$

L'équation (3.33) s'écrit sous la forme inverse suivante :

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{21}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

où D_{ij}^* sont les éléments de la matrice inverse de $[D_{ij}]$.

$$\begin{aligned} D_{12}^* &= \frac{1}{\Delta} (D_{16} D_{26} - D_{12} D_{66}) \\ D_{22}^* &= \frac{1}{\Delta} (D_{11} D_{66} - D_{16}^2) \\ D_{66}^* &= \frac{1}{\Delta} (D_{11} D_{22} - D_{12}^2) \\ D_{11}^* &= \frac{1}{\Delta} (D_{22} D_{66} - D_{26}^2) \\ D_{16}^* &= \frac{1}{\Delta} (D_{12} D_{26} - D_{16} D_{22}) \\ D_{26}^* &= \frac{1}{\Delta} (D_{12} D_{16} - D_{26} D_{11}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Et Δ est le déterminant de la matrice D_{ij} .

$$\Delta = D_{11} D_{22} D_{66} + 2 D_{12} D_{16} D_{26} - D_{11} D_{26}^2 - D_{22} D_{16}^2 - D_{66} D_{12}^2$$

La théorie des poutres fait l'hypothèse que, dans le cas d'une flexion suivant l'axe x, les moments M_y et M_{xy} sont nulles :

$$M_y = M_{xy} = 0 \quad (3.37)$$

Les relations (3.34) et (3.35) conduisent donc à :

$$k_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = D_{11}^* M_x \quad (3.38)$$

Enfin, la théorie des poutres fait l'hypothèse supplémentaire que la flèche n'est fonction que de x :

$$w_0 = w_0(x) \quad (3.39)$$

La plus grande attention doit toutefois être apportée à cette dernière hypothèse. En effet, les équations (3.34) et (3.35) montrent que les courbures K_y et K_{xy} sont fonctions du moment de flexion M_x soit :

$$k_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = D_{12}^* M_x \quad (3.40)$$

$$k_{xy} = -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = D_{12}^* M_x$$

Ces relations montrent que la flèche w_0 dépend a priori de la variable y . Cet effet est particulièrement important dans le cas d'éprouvettes de flexion de laboratoire, de forme plus proche d'une lame que d'une poutre.

Il en résulte que la flexion et la torsion induite par les termes D_{12}^* et D_{16}^* dans les équations (3.40) tendent à produire un décollement partiel de la poutre sur ses supports. Cet effet est toutefois négligeable dans le cas où le rapport de la longueur à la largeur (L/b) est suffisamment élevé. Dans cette hypothèse (3.39), l'équation (3.41) s'écrit :

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = -D_{11}^* M_x \quad (3.41)$$

Il est usuel d'écrire cette équation sous la forme :

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = -\frac{M}{E_x I} \quad (3.42)$$

En introduisant :

➤ Le module de flexion E_x de la poutre :

$$E_x = \frac{12}{h^3 D_{11}^*} \quad (3.43)$$

➤ Le moment quadratique I de la section droite de la poutre par rapport au plan (y,x) :

$$I = I_{xy} = \frac{bh^3}{12} \quad (3.44)$$

➤ Le moment M de flexion :

$$M = bM_x \quad (3.45)$$

L'équation de flexion des plaques se réduit ici à :

$$\frac{dM_x}{dx^2} + q = 0 \quad (3.46)$$

En tenant compte de (3.41), cette équation s'écrit :

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} = D_{11}^* q \quad (3.47)$$

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} = \frac{p}{E_x I}$$

Avec : $p = b.q$

L'équation différentielle (3.47) en w_0 a la même forme que l'équation différentielle

$$\frac{d^4 w_0}{dx^2} = \frac{A}{D} q \quad \text{Obtenue dans le cas de la flexion cylindrique.}$$

Les deux équations diffèrent par les coefficients introduits : D_{11}^* dans la flexion de poutre et $1/D_{11}$ (stratifié symétrique) dans le cas de la flexion cylindrique.

Dans le problème statique, les déplacements sont indépendants du temps. On a alors :

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_x \quad (3.48)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q$$

En posant :

$$Q = b Q_x \quad (3.49)$$

Les contraintes dans la couche k du stratifié s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^k \\ \sigma_{yy}^k \\ \sigma_{xy}^k \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & Q_{16}^k \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & Q_{26}^k \\ Q_{16}^k & Q_{26}^k & Q_{66}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

En notant, pour simplifier, Q_{ij}^k les coefficients de rigidité Q_{ij} de la couche k rapportés aux axes de la plaque, d'où :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= z \left(Q_{11}^k D_{11}^* + Q_{12}^k D_{12}^* + Q_{16}^k D_{16}^* \right) M_x \\ \sigma_{yy}^k &= z \left(Q_{12}^k D_{11}^* + Q_{22}^k D_{12}^* + Q_{26}^k D_{16}^* \right) M_x \\ \sigma_{xy}^k &= z \left(Q_{16}^k D_{11}^* + Q_{26}^k D_{12}^* + Q_{66}^k D_{16}^* \right) M_x \end{aligned} \quad (3.51)$$

Les expressions de ces contraintes sont réécrites en introduisant M et I sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= z a_{xx}^k \frac{M}{I} \\ \sigma_{yy}^k &= z a_{yy}^k \frac{M}{I} \\ \sigma_{xy}^k &= z a_{xy}^k \frac{M}{I} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Avec

$$\begin{aligned} a_{xx}^k &= \left(Q_{11}^k D_{11}^* + Q_{12}^k D_{12}^* + Q_{16}^k D_{16}^* \right) \frac{h^3}{12} \\ a_{yy}^k &= \left(Q_{12}^k D_{11}^* + Q_{22}^k D_{12}^* + Q_{26}^k D_{16}^* \right) \frac{h^3}{12} \\ a_{xy}^k &= \left(Q_{16}^k D_{11}^* + Q_{26}^k D_{12}^* + Q_{66}^k D_{16}^* \right) \frac{h^3}{12} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Les expressions précédentes des contraintes ne sont correctes qu'à une distance assez éloignée (h) des bords de la poutre. Les résultats précédents ne sont donc pas applicables

qu'au cas des poutres ayant un rapport h/b assez élevé. D'autre part, dans le cas de poutres en matériaux homogènes, les relations (3.53) deviennent : $a_{xx} = 1$ et $a_{yy} = a_{xy} = 0$.

Les équations (3.51) se réduisent aux équations de la théorie classique des poutres.

La contrainte de cisaillement dans les couches se déduit de l'équation d'équilibre :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial z} = 0$$

Soit :

$$\frac{d\sigma_{xz}^k}{dz} = -\frac{d\sigma_{xx}^k}{dx} = -\sigma_{xx}^k \frac{1}{I} \frac{dM}{dx} z$$

D'où :

$$\sigma_{xz}^k = -\frac{Q}{2I} a_{xx}^k (z^2 + c_k) \quad (3.54)$$

Les constantes c_k dans chaque couche sont déterminées en annulant σ_{xz} sur les faces supérieure et inférieure, et en assurant la continuité de σ_{xz} entre chaque couche.

Dans le cas d'une poutre constituée d'un matériau homogène, nous avons $a_{xx} = 1$ et la contrainte de cisaillement transverse s'annule sur les faces inférieure et supérieure : $\sigma_{xz} = 0$ pour $z = \pm h/2$. Il en résulte :

$$\sigma_{xz} = -\frac{Qh^2}{8I} \left[1 - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] = \frac{3Q}{2bh} \left[1 - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad (3.55)$$

La contrainte de cisaillement est maximum pour $z = 0$, soit :

$$\sigma_{xz}(z=0) = \tau_0 = \frac{3Q}{2bh} \quad (3.56)$$

La relation (4.54) peut alors être réécrite sous la forme :

$$\sigma_{xz}^k = -a_{xx}^k \tau_0 \left[4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 + d_k \right] \quad (3.57)$$

Où d_k sont de nouvelles constantes à déterminer en assurant la continuité de σ_{xz} dans l'épaisseur de la poutre. Pour une poutre constituée d'un matériau homogène, la relation (3.57) se réduit à (3.55), soit :

$$\sigma_{xz}^k = \tau_0 \left[1 - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad (3.58)$$

III.4.2-Application à la flexion 3 points :

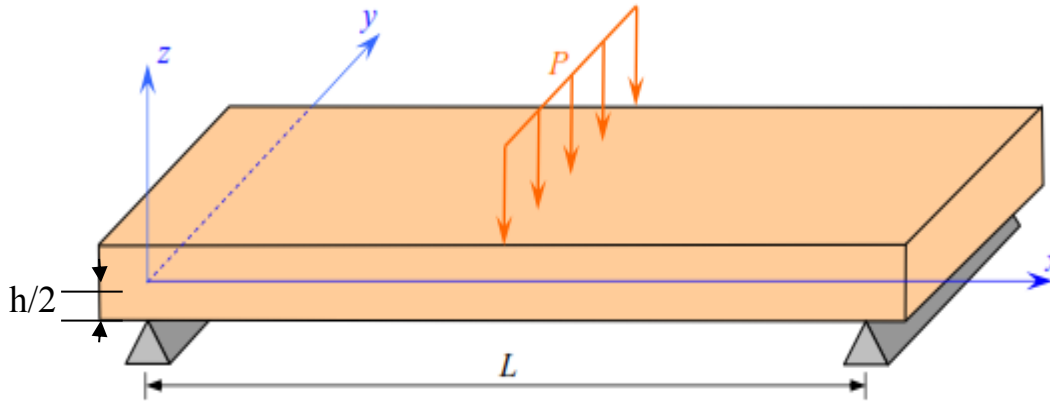


Figure III.12. Elément poutre en flexion 3 points.

Considérons une poutre en flexion 3 points, la symétrie du problème conduit à ne considérer qu'une moitié de poutre, comme illustré à la (figure .III.13):

Le moment de flexion s'exprime par la relation :

$$M = -\frac{P_x}{2} \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad (3.59)$$

Où P est la charge totale exercée au milieu de la poutre.

En rapportant cette expression dans (3.42), il vient :

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = -\frac{P_x}{2E_x I} \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad (3.60)$$

Dans le cas d'appuis simples, les conditions aux frontières sont, pour $x=0$:

$$M = 0 \quad w_0 = 0 \quad (3.61)$$

D'autre part, la symétrie impose, pour $x = L/2$:

$$\frac{dw_0}{dx} = 0 \quad (3.62)$$

L'intégration de (3.60) associée à (3.61) et (3.62) conduit à

$$w_0 = -\frac{PL^2}{48E_x I} x \left[3 - \left(\frac{2x}{L} \right)^2 \right] \quad (3.63)$$

La flèche w_c au centre de la poutre ($x = L/2$) s'écrit :

$$w_c = \frac{PL^3}{48E_x I} = \frac{PL^3}{48b} D_{11}^* \quad (3.64)$$

Cette relation peut être utilisée pour déterminer soit le module de flexion de la poutre, soit le coefficient D_{11}^* , connaissant la flèche w_c au centre pour une charge imposée P :

$$E_x = \frac{PL^3}{48Iw_c} = \frac{PL^3}{4bh^3 w_c} D_{11}^* \quad (3.65)$$

$$D_{11}^* = \frac{48bw_c}{PL^3} \quad (3.66)$$

Les contraintes dans la couche k s'écrivent d'après (3.52).

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= -6a_{xx}^k \frac{P}{bh^3} xz \\ \sigma_{yy}^k &= -6a_{yy}^k \frac{P}{bh^3} xz \\ \sigma_{xy}^k &= -6a_{xy}^k \frac{P}{bh^3} xz \end{aligned} \quad (3.67)$$

Ces contraintes sont maximales pour $x = L/2$, soit :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= -3a_{xx}^k \frac{PL}{bh^3} z \\ \sigma_{yy}^k &= -3a_{yy}^k \frac{PL}{bh^3} z \\ \sigma_{xy}^k &= -3a_{xy}^k \frac{PL}{bh^3} z \end{aligned} \quad (3.68)$$

Dans le cas d'une poutre en matériau homogène isotrope : $a_{xx} = 1$, et la contrainte normale s'écrit :

$$\sigma_{xx} = \frac{3PL}{2bh^2} \quad (3.69)$$

La contrainte de traction maximale est atteinte sur la face inférieure ($z = -h/2$), et s'exprime suivant :

$$\sigma_{xx \max} = \sigma_0 = \frac{3PL}{2bh^2} \quad (3.70)$$

Les contraintes dans la couche k d'un stratifié peuvent donc s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= -2a_{xx}^k \sigma_0 \frac{z}{h} \\ \sigma_{yy}^k &= -2a_{yy}^k \sigma_0 \frac{z}{h} \\ \sigma_{xy}^k &= -2a_{xy}^k \sigma_0 \frac{z}{h} \end{aligned} \quad (3.71)$$

III.5-Conclusion :

Le but de ce chapitre est de présenter le comportement mécanique de poutres stratifiées en flexion trois points en tenant compte de l'effet de la flexion.

Dans la première section de ce chapitre, on a présenté les poutres stratifiées objet de l'étude.

Dans la seconde section les hypothèses de la théorie des poutres stratifiées sont détaillées afin de formuler la loi de comportement globale de la structure stratifiée en se basant sur la théorie de poutres stratifiées en tenant compte de l'effet de la flexion.

La troisième section décrit la loi de comportement de poutres stratifiées soumises à la flexion trois points.

CHAPITRE

IV

**METHODES
D'OPTIMISATION**

IV.1-Introduction :

En 1906 l'optimisation multi-objective remonte à un ouvrage de W. Pareto sur l'économie politique, dans lequel l'auteur définit pour la première fois ce qu'est un optimum multi-objective.

Donc l'optimisation multi-objective aux problèmes d'ingénierie remonte, aux alentours de la seconde guerre mondiale, elle est longtemps restée une science « Anecdotique » à cause de son aspect hermétique, dû à la nécessité de maîtriser un bagage mathématique théorique assez important. [22]

Nombreuses sont les méthodes d'optimisation. On peut cependant les classer en deux grandes catégories : les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques.

Dans la première classe, on rencontre toutes les méthodes qui cherchent le minimum d'une fonction en se basant sur la connaissance d'une direction de recherche, souvent donnée par le gradient de cette fonction. Dans le cas d'optima multiples, elles s'arrêtent sur le premier rencontré.

Les méthodes stochastiques sont une alternative pour palier cet inconvénient. Les trois méthodes stochastiques les plus répandues sont les algorithmes génétiques, le recuit simulé et la recherche taboue. Elles sont capables de trouver le minimum global d'une fonction même dans des cas très difficiles, mais le temps de calcul peut être élevé.

IV.2-Classification des méthodes d'optimisation :

Les méthodes d'optimisations sont classées, selon le mode de recherche de l'optimum, en deux grands groupes : les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques.

IV.2.1-Méthodes déterministes :

Ces méthodes peuvent être subdivisées en plusieurs sous classes, les méthodes heuristiques, les méthodes statistiques, les méthodes Branch&Bound, les méthodes mathématiques, et les méthodes d'apprentissage automatique. Cette classification est illustrée dans la figure IV.1.

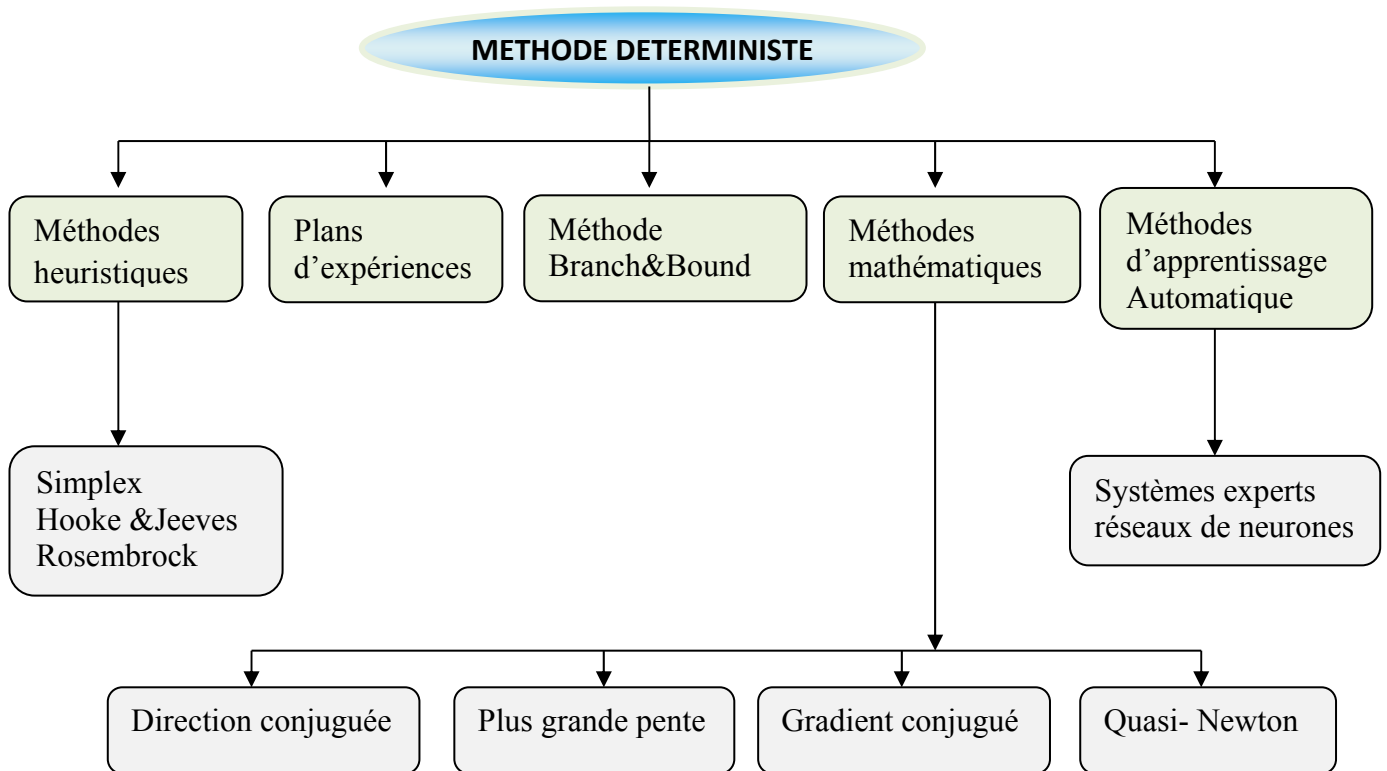


Figure. IV.1 : Méthodes d'optimisation déterministes.

IV.2.1.1-Méthode Branch&Bound :

Branch&Bound est une méthode algorithmique classique pour résoudre un problème d'optimisation combinatoire. Il s'agit de rechercher une solution optimale dans un ensemble combinatoire de solutions possibles. La méthode repose d'abord sur la séparation (branch) de l'ensemble des solutions en sous-ensembles plus petits. L'exploration de ces solutions utilise ensuite une évaluation optimiste pour majorer (bound) les sous-ensembles, ce qui permet de ne plus considérer que ceux susceptibles de contenir une solution potentiellement meilleure que la solution courante.

IV.2.1.2-Les méthodes utilisant les plans d'expériences :

Ces méthodes concentrent sur la mise au point de stratégies d'optimisation utilisant une suite de plans d'expériences, elles sont bien adaptées aux divers problèmes et habituellement employées lorsque le nombre de paramètres est faible, en tous cas inférieur à 10.

IV.2.1.3-Les méthodes heuristiques ou méthodes géométriques :

La stratégie de Hooke et Jeeves, la méthode de Rosenbrock ou la méthode du Simplex sont les plus souvent employées. Toutes ces techniques sont déterministes et locales mais elles sont beaucoup plus robustes que les méthodes mathématiques, en particulier lorsque la fonction objectif est discontinue. Par contre, elles deviennent moins robustes lorsque le nombre de paramètres est élevé.

IV.2.1.4-Méthodes mathématiques :

Les exemples les plus significatifs des méthodes mathématiques sont la méthode de Cauchy ou méthode de la plus grande pente et la méthode du gradient conjugué qui sont d'ordre un. D'autres techniques de gradient c'est-à-dire des dérivées secondes comme les méthodes DFP et BFGS qui sont dites quasi-Newton.

Parmi ces méthodes, la méthode du gradient conjugué, la méthode quasi-Newton, la méthode SQP et la méthode de Powell sont présentées brièvement. Elles sont comparées par la suite avec les méthodes stochastiques.

✓ La méthode de gradient conjugué

La méthode de gradient conjugué est une variante améliorée de la méthode de la plus grande pente, qui consiste à suivre la direction opposée au gradient. Cette méthode évite l'inconvénient de créer des directions de recherche orthogonales, ce qui ralentit la convergence de l'algorithme. La méthode de Fletcher et Reeves résout ce problème en déterminant la nouvelle direction de recherche à partir du gradient aux pas courant et précédent.

✓ Méthode quasi-Newton

Les méthodes quasi-Newton consistent à imiter la méthode de Newton où l'optimisation d'une fonction est obtenue à partir de minimisations successives de son approximation au second ordre. Elles ne calculent pas le Hessien mais elles utilisent une approximation définie positive du Hessien qui peut être obtenue soit par l'expression proposée par Davidon-Fletcher-Powell (DFP), soit par celle proposée par Broyden-Fletcher Goldfarb-Shanno (BFGS).

✓ Méthode PQS

La méthode de programmation quadratique séquentielle (PQS), développée par Schittkowski en 1983, est une méthode de programmation non-linéaire. Elle a été reconnue comme étant une des méthodes les plus efficaces pour résoudre des problèmes d'optimisation avec contraintes de taille petite et moyenne. Comme son nom le suggère, la méthode PQS trouve la solution optimale par une séquence de problèmes de programmation quadratique. A chaque itération, une approximation quadratique de la fonction objective et des approximations linéaires des contraintes sont utilisées. Le Hessien est construit par la méthode BFGS. Une analyse canonique fournit le minimum de la fonction Lagrangienne et un déplacement est fait vers ce point.

✓ La méthode des directions conjuguées de Powell

Lorsqu'il n'est pas possible de calculer le gradient, la méthode de direction conjuguée propose de trouver l'optimum uniquement par des recherches linéaires. Elle effectue n recherches linéaires successives suivant des directions conjuguées qui sont modifiées à chaque itération pour accélérer la convergence. [23]

IV.2.2-Méthodes stochastiques :

Lorsqu'une exploration de type déterministe est difficile à résoudre, on fait appel aux méthodes stochastiques. Ces méthodes s'appuient sur des mécanismes de transition probabilistes et aléatoires. Cette caractéristique indique que plusieurs exécutions successives de ces méthodes peuvent conduire à des résultats différents pour une même configuration initiale d'un problème d'optimisation. Ces méthodes ont une grande capacité à trouver l'optimum global du problème.

Contrairement à la plupart des méthodes déterministes, elles ne nécessitent ni point de départ, ni la connaissance du gradient de la fonction objectif pour atteindre la solution optimale. Elles sont d'ordre zéro. Cependant, elles demandent un nombre important d'évaluations de la fonction objectif. La figure IV.2 présente les méthodes stochastiques les plus utilisées.

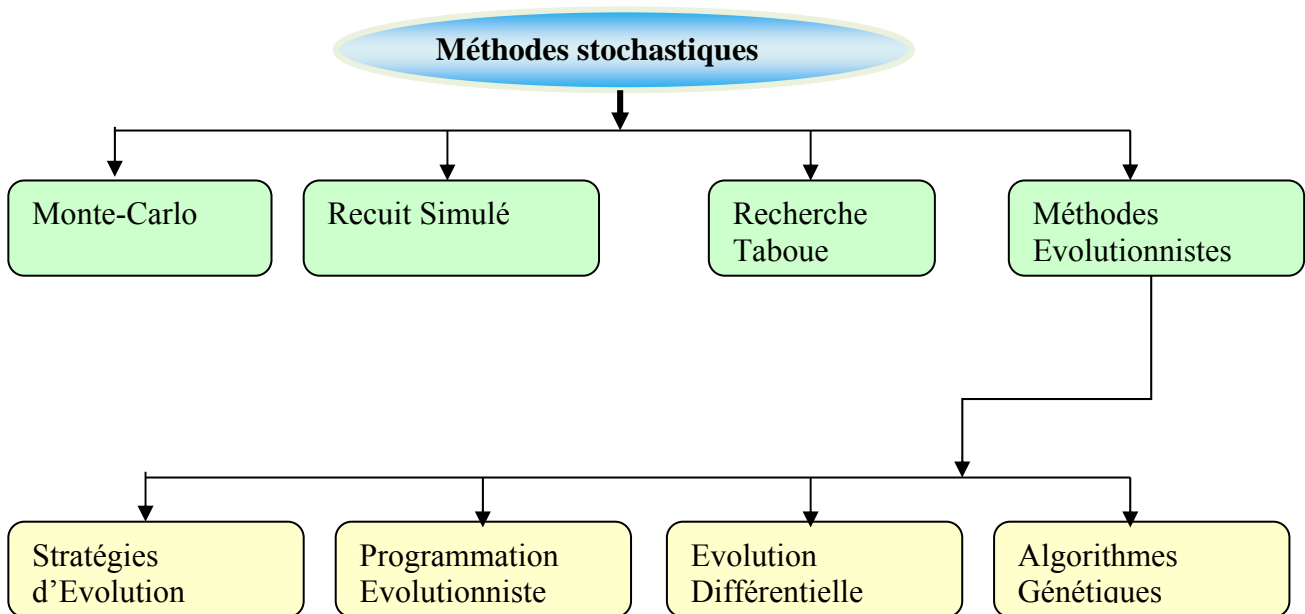


Figure. IV.2 : Méthodes d'optimisation stochastiques.

Parmi ces méthodes stochastiques, les méthodes Monte-Carlo et les méthodes évolutionnistes seront présentés brièvement.

IV.2.2.1-Monte-Carlo :

Basées sur le tirage de nombres aléatoires. L'utilisation de la méthode de Monte-Carlo est devenue possible grâce à l'amélioration des performances des ordinateurs (il est devenu plus efficace de simuler numériquement le comportement d'un système complexe que de l'observer expérimentalement) car pour obtenir des estimations suffisamment exactes de la grandeur recherchée, il faut réaliser le calcul d'un très grand nombre de cas particuliers et dépouiller ensuite la statistique d'un volume énorme de données. Le grand avantage de cette méthode est sa simplicité. Or son inconvénient est le temps de calcul. Les méthodes Monte Carlo permettent une bonne exploration puisque tout point a une probabilité identique d'être atteint, toutefois, elles ne permettent pas d'exploitation des résultats déjà obtenus [24].

IV.2.2.2-Recuit simulé :

Le recuit simulé est une méthode stochastique, c'est à dire incluant des tirages aléatoires, qui consiste à construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permettant d'approcher le minimum global de la fonction $J : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Son principe est inspiré du procédé physique de recuit où la température d'un cristal est progressivement réduite par pallies à fin d'amener celui-ci à sa structure d'énergie minimale.

La traduction mathématique de ce procédé est la suivante :

- Initialisation : choix des paramètres initiaux $R > 0$ et $T > 0$ et tirage aléatoire de $x_0 \in \mathbb{R}^m$.
- Itération n : tirage aléatoire de $y \in B(x_n, R)$. Deux possibilités se présentent :
Si $J(y) \leq J(x_n)$; alors $x_{n+1} = y$

si $J(y) > J(x_n)$; alors $x_{n+1} = y$ avec une probabilité x_p ou x_n . Sinon: $\left(-\frac{J(y) - J(x_n)}{T} \right)$

- Actualisation des paramètres : toutes les N_{it} itérations, $T \rightarrow \alpha T$ et $R \rightarrow \alpha R$,
avec $\alpha \in]0; 1[$.

IV.2.2.3-La recherche tabou (tabou search) :

La recherche tabou (TS) est une méthode de recherche locale combinée avec un ensemble de techniques permettant d'éviter d'être piégé dans un minimum local ou la répétition d'un cycle. La recherche tabou est introduite principalement par Glover (Glover 1986), Hansen (Hansen 1986),

Glover et Laguna dans (Glover et Laguna 1997). Cette méthode a montré une grande efficacité pour la résolution des problèmes d'optimisation difficiles. En effet, à partir d'une solution initiale s dans un ensemble de solutions local S , des sous-ensembles de solution $N(s)$ appartenant au voisinage S sont générés. Par l'intermédiaire de la fonction d'évaluation nous retenons la solution qui améliore la valeur de f , choisie parmi l'ensemble de solutions voisines $N(s)$.

L'algorithme accepte parfois des solutions qui n'améliorent pas toujours la solution courante. Nous mettons en œuvre une liste tabou (tabou list) T de longueur k contenant les k dernières solutions visitées, ce qui ne donne pas la possibilité à une solution déjà trouvée d'être acceptée et stockée dans la liste tabou. Alors le choix de la prochaine solution est effectué sur un ensemble des solutions voisines en dehors des éléments de cette liste tabou. Quand le nombre k est atteint, chaque nouvelle solution sélectionnée remplace la plus ancienne dans la liste. La construction de la liste tabou est basée sur le principe FIFO, c'est-à-dire le premier entré est le premier sorti. Comme critère d'arrêt on peut par exemple fixer un nombre maxi. [25]

IV.2.2.4-Méthodes évolutionnistes :

Les méthodes évolutionnistes font partie de la dernière grande classe de méthodes stochastiques. Elles reposent sur une analogie avec la théorie de l'évolution naturelle des espèces de Darwin selon laquelle, les individus les mieux adaptés à leur environnement survivent et peuvent se reproduire pour donner des enfants encore mieux adaptés de génération en génération [26].

Ces méthodes s'affirment peu à peu comme les techniques d'optimisation les plus robustes. Elles peuvent être appliquées à des problèmes très divers car elles sont indépendantes du processus à optimiser et n'utilisent pas les dérivées.

Parmi les algorithmes évolutionnistes cités précédemment, les algorithmes génétiques occupent une place particulière car ils réunissent les trois opérateurs de sélection, croisement et mutation.

IV.3-Les algorithmes génétiques :

Les algorithmes génétiques reposent sur l'analogie entre la théorie de l'évolution naturelle et l'optimisation. Ils ont été initialement développés par John Holland, Goldberg. Selon la théorie de Darwin, leurs champs d'application sont très vastes, les individus d'une population les mieux adaptés à leur environnement ont une plus grande probabilité de survivre et de se reproduire, en donnant des descendants encore mieux adaptés. Comme dans les mécanismes naturels de la reproduction, les principaux opérateurs qui affectent la constitution d'un chromosome, qui code les caractéristiques des individus, sont le croisement et la mutation.

Les particularités des algorithmes génétiques sont :

- Ils utilisent un codage des paramètres et non les paramètres eux mêmes.
- Ils travaillent sur une population de points au lieu d'un point unique.
- Ils n'utilisent que la valeur de la fonction étudiée et non sa dérivée ou une autre connaissance auxiliaire.
- Ils utilisent des règles de transition probabilistes et non déterministes.

Un algorithme génétique implémente une version très simplifiée et très schématique des mécanismes de l'évolution biologique. Il recherche le ou les extrema d'une fonction

définie sur un espace de données. Pour l'utiliser, on doit disposer des cinq éléments suivants [27].

- ✚ ***Un principe de codage de l'élément de population.*** Cette étape associe à chaque point de l'espace d'état d'une structure de données. Elle se place généralement après une phase de modélisation mathématique du problème traité. La qualité du codage des données conditionne le succès des algorithmes génétiques. Les codages binaires ont été très utilisés à l'origine.
- ✚ ***Un mécanisme de génération de la population initiale.*** Ce mécanisme doit être capable de produire une population d'individus non homogène qui servira de base pour les générations futures. Le choix de la population initiale est important car il peut rendre plus ou moins rapide la convergence vers l'optimum global. Dans le cas où l'on ne connaît rien du problème à résoudre, il est essentiel que la population initiale soit répartie sur tout le domaine de recherche.
- ✚ ***Une fonction à optimiser qui retrouve une valeur de R^+ appelée fitness ou fonction d'évaluation de l'individu***
- ✚ ***Des opérateurs permettant de diversifier la population au cours des générations et d'explorer l'espace d'état.*** L'opérateur de croisement recompose les gènes d'individus existant dans la population. L'opérateur de mutation a pour but de garantir l'exploration de l'espace d'état.
- ✚ ***Des paramètres de dimensionnement :*** taille de la population, nombre total de générations ou critère d'arrêt, probabilités d'application des opérateurs de croisement et de mutation.

Les (AG), utilisent un vocabulaire similaire à celui de la génétique, cependant, les processus auxquels ils font référence sont beaucoup plus complexes.

Les AG ne se basent pas sur un individu, mais sur une population d'individus qui vont évoluer de génération en génération pour obtenir un résultat se rapprochant de la solution optimale.

Pour un problème d'optimisation donné, un individu représente un point de l'espace d'état ou une solution possible du problème donné il est composé d'un ou plusieurs chromosomes. Les chromosomes sont eux-mêmes constitués de gènes qui contiennent les caractères héréditaires de l'individu. A chaque individu est attribué un "fitness" qui mesure la qualité de la solution qu'il représente, souvent c'est la valeur de la fonction à optimiser.

Ensuite, une nouvelle population des solutions possibles est produite en sélectionnant les parents parmi les meilleurs de la "génération" actuelle pour effectuer des croisements et des mutations [28].

La sélection a pour but de favoriser les meilleurs éléments de la population, tandis que le croisement et la mutation assurent une exploration efficace de l'espace d'état. Les meilleurs individus d'une génération vont créer une nouvelle génération plus adaptée au problème dont la nouvelle population contient une plus grande proportion de caractéristiques des meilleurs individus de la génération précédente.

La figure IV.3, illustre la structure générale de l'algorithme génétique. Nous détaillerons dans la suite les diverses phases qui le constituent et les mécanismes associés à chacune d'entre elles.

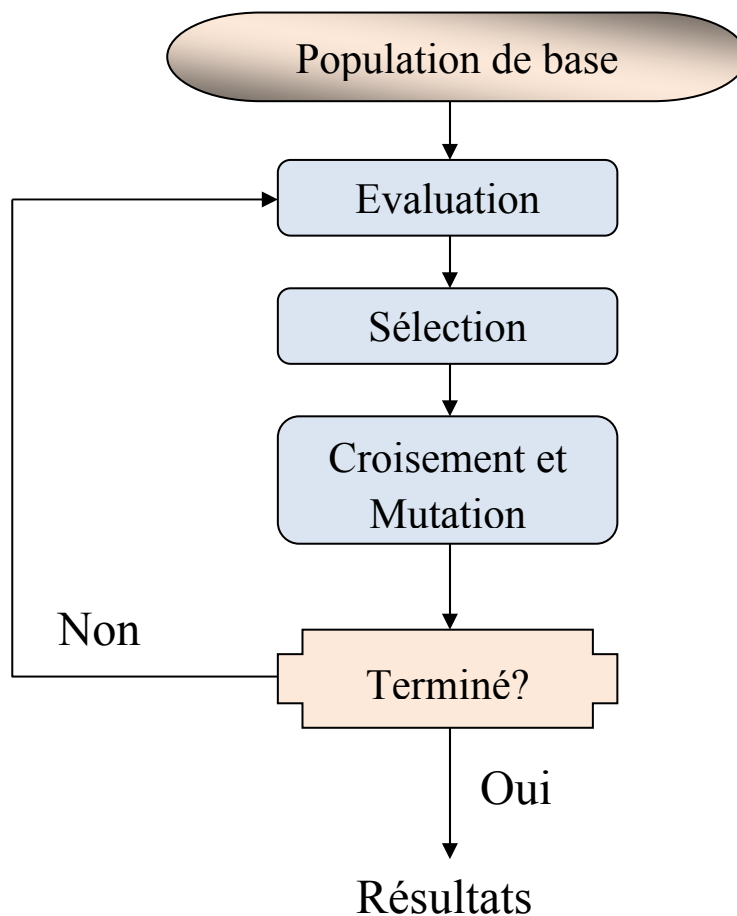


Figure IV. 3 : Principe de fonctionnement d'un algorithme génétique.

1. **Initialisation** : Une population initiale de v chromosomes est tirée aléatoirement
2. **Évaluation** : Chaque chromosome est décodé, puis évalué.
3. **Sélection**: Création d'une nouvelle population de N chromosomes par l'utilisation d'une méthode de sélection appropriée.
4. **Reproduction** : Possibilité de croisement et de mutation au sein de la nouvelle population.
5. **Retour** : Retour à la phase d'évaluation tant que la condition d'arrêt du problème n'est pas satisfaite.

Cet exemple illustre en générale les différentes étapes. Nous allons maintenant les expliquer plus en détails.

La mise en œuvre des algorithmes génétiques nécessite donc plusieurs étapes.

L'idée fondamentale est que: la population choisie contient potentiellement la solution, ou plutôt la meilleure solution, à un problème donné. Cette solution n'est pas exprimée car la combinaison génétique sur laquelle elle repose est dispersée chez plusieurs individus. Ce n'est que par l'association de ces combinaisons génétiques au cours de la reproduction que la solution pourra s'exprimer. Lors de la reproduction et de la recombinaison génétique associée, un individu hérite, par hasard, d'un des gènes de chacun de ses parents.

L'originalité des mécanismes repose en particulier sur le fait qu'il n'a pas considéré les seules mutations comme source d'évolution mais aussi et surtout les phénomènes de croisement. C'est en croisant les solutions potentielles existant que l'on peut se rapprocher de l'optimum [29].

IV.3.1-Initialisation de la population :

Comme dans tout problème d'optimisation, une connaissance de ``bons" points de départ conditionne la rapidité de la convergence vers l'optimum. Si la position de l'optimum dans l'espace d'état est totalement inconnue, il est naturel de générer aléatoirement des individus en faisant des tirages uniformes dans chacun des domaines associés aux composantes de l'espace d'état, en veillant à ce que les individus produits respectent les contraintes [29].

La génération de la population initiale peut se faire en prenant des individus régulièrement répartis dans l'espace. Néanmoins, une initialisation aléatoire est plus simple à réaliser. Les valeurs $N(x_i)$ des gènes est alors tirées au hasard selon une distribution uniforme.

Le choix de la population initiale peut conditionner fortement la rapidité de l'algorithme. Dans le cas où l'on ne connaît rien du problème à résoudre, il est essentiel que la population initiale soit assez bien répartie sur tout le domaine de recherche. Une population trop petite évoluera probablement vers un optimum local intéressant alors qu'une population trop grande sera inutile car le temps de convergence sera excessif. La taille de la population doit être choisie de façon à réaliser un bon compromis entre temps de calcul et qualité du résultat

IV.3.2-Codage et décodage des variables :

Pour utiliser les AGs, il faut savoir tout d'abord la façon de décrire un individu, c'est à dire, comment coder les paramètres ?

La réponse à cette question a une influence forte sur l'implémentation des mécanismes de croisement et de mutation. Un gène correspond de fait à un paramètre et un seul G. Un chromosome est constitué par un ensemble de gènes et décrit complètement un individu. L'ensemble des individus est appelé population. On aboutit ainsi à une structure présentant cinq niveaux d'organisation (figure IV.4).

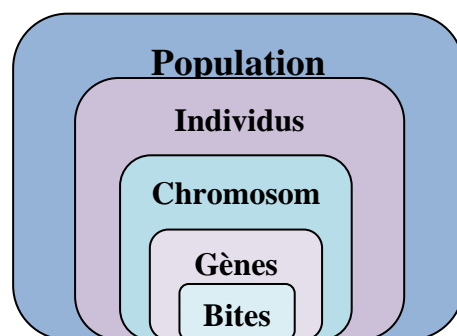


Figure IV.4 : Les cinq niveaux d'organisation d'un algorithme génétique.

L'efficacité d'un algorithme génétique dépend du choix du codage d'un chromosome.

Trouver une structure de données et un codage adéquat est dès lors un des objectifs les plus importants. Pour illustrer l'importance d'un choix adéquat, on peut considérer l'exemple suivant. On peut désigner des personnes par leurs noms, leurs prénoms, leurs numéros de téléphone, leurs professions, leurs adresses. Lorsqu'on veut envoyer une lettre à une personne,

on n'a besoin que du nom de la personne et de son adresse. Pour pouvoir téléphoner à une personne, on n'a besoin que de son numéro de téléphone. A chaque usage correspondra une structure de données plus appropriée qu'une autre.

En effet, le choix du type de codage ne peut pas être effectué de manière évidente. La méthode actuelle à appliquer dans le choix du codage consiste à choisir celui qui semble le plus naturel en fonction du problème à traiter [30].

Parmi les codages les plus utilisés, on peut citer :

a) Codage binaire :

Le codage binaire est un codage élémentaire dont le principe consiste à coder la solution selon une chaîne de bits. Une chaîne de bits est une suite de chiffres, chacun d'entre eux pouvant prendre la valeur 0 ou 1. La structure de données traditionnellement utilisées est un tableau, appelé aussi vecteur, de variables booléennes. Chaque composante x_j , $j = 0 \dots\dots\dots N$ de ce vecteur est une valeur booléenne prise par la variable [31].

0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Figure IV.5 : Exemple d'un codage binaire d'un chromosome.

Un des avantages du codage binaire est que l'on peut ainsi facilement coder toute sorte de paramètres : réels, entiers, booléens et chaînes de caractères. Cela nécessite simplement l'usage de fonctions de codage et décodage pour passer d'une représentation à l'autre. Ce choix le rend virtuellement applicable à tous les problèmes dont les solutions sont numériques, c'est-à-dire calculées par des ordinateurs [23].

La fonction de décodage la plus simple qui permet la transformation d'une chaîne binaire

$A = \{b_1, b_2, \dots\dots\dots b_n\}$ en un nombre entier x s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^n b_i 2^{n-i} \quad (4.1)$$

Ainsi le chromosome $A = \{1, 0, 1, 1\}$ vaut :

$$1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 8 + 2 + 1 = 11$$

b) Codage réel :

Pour des problèmes d'optimisation dans des espaces de grande dimension, le codage binaire peut rapidement devenir mauvais. Généralement, chaque variable est représentée par une partie de la chaîne de bits et la structure du problème n'est pas bien reflétée. [32]

Une autre approche semblable est de coder les solutions en tant que des suites de nombres entiers ou de nombres réels, avec chaque position représentant encore un certain aspect particulier de la solution. Cette approche tient compte d'une plus grande précision et de complexité par rapport au codage basé sur les nombres binaires. Ce type de codage est intuitivement plus proche à l'environnement des problèmes à résoudre.

5	1	4	3	2
---	---	---	---	---

Figure IV.6 : Exemple d'un codage réel d'un chromosome.

c) Codage à l'aide de suite alphabétique :

Une troisième approche est de représenter des individus dans un AG comme une suite de caractères, où chaque caractère représente encore un aspect spécifique de la solution. Ce type de codage est utilisé dans de nombreux cas poussés des algorithmes génétiques comme en bioinformatique [33].

C	B	E	A	D
---	---	---	---	---

Figure IV.7 : codage alphabétique d'un chromosome.

d) Codage sous forme d'arbre :

Ce codage utilise une structure arborescente. Un arbre est une structure de données munie d'une racine dans laquelle peuvent être issus un ou plusieurs enfants. Parmi les avantages de ce type de codage, son utilisation dans le cas de problèmes où les solutions n'ont pas une taille finie [33].

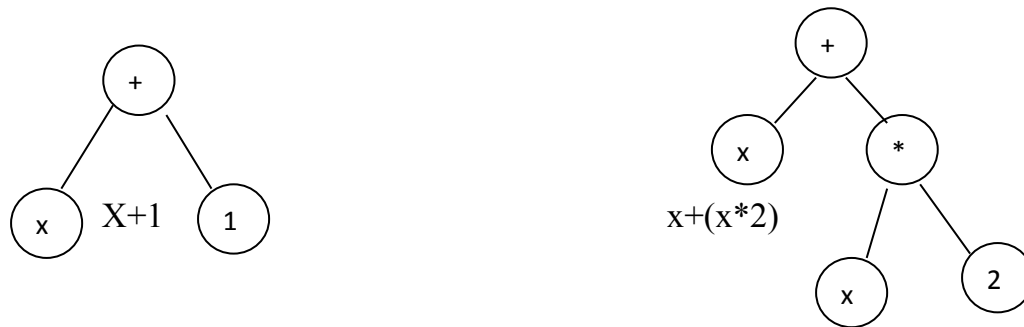


Figure IV. 8 : Exemple de codage sous forme d'arbre.

IV.3.3-Génération aléatoire de la population initiale :

Comme dans tout problème d'optimisation, une connaissance de bons points de départ conditionne la rapidité de la convergence vers l'optimum. Si la position de l'optimum dans l'espace d'état est totalement inconnue, il est naturel de générer aléatoirement des individus en faisant des tirages uniformes dans chacun des domaines associés aux composantes de l'espace d'état, en veillant à ce que les individus produits respectent les contraintes [5].

La population initiale générée en prenant des individus régulièrement répartis dans l'espace. Les valeurs des gènes sont alors tirées au hasard selon une distribution uniforme. Le choix de la population initiale peut conditionner fortement la rapidité de l'algorithme. Il doit être capable de produire une population d'individus non homogène qui servira de base pour les générations futures, et capable de rendre plus ou moins rapide la convergence vers l'optimum global.

IV.3.4-Evaluation et sélection :

L'évaluation d'un individu ne dépend pas de celle des autres individus. Le résultat fourni par la fonction d'évaluation va permettre de sélectionner ou de refuser un individu pour ne garder que les individus meilleurs en fonction de la population courante, c'est le rôle de la fonction de fitness. Cette méthode permet de s'assurer que les individus performants seront conservés, alors que les individus peu adaptés seront progressivement éliminés de la population. En d'autres termes, elle permet, à partir d'un chromosome, de calculer un point de l'espace de recherche, de quantifier numériquement la validité de la solution qu'il représente et de mesurer la santé et le degré d'adaptation d'un individu à son environnement.

Traditionnellement, cette fonction est croissante avec la qualité de la solution. La sélection permet d'identifier statistiquement les meilleurs individus de la population courante qui seront autorisés à se reproduire. Cette opération est fondée sur la performance des individus, estimée à l'aide de la fonction d'adaptation. Il existe différents principes de sélection : [5].

IV.3.4.1-Sélection par roulette (Wheel) :

Elle consiste à associer à chaque individu un segment dont la longueur est proportionnelle à sa fitness. Ces segments sont ensuite concaténés sur un axe gradué que l'on normalise entre 0 et 1. On tire alors un nombre aléatoire de distribution uniforme entre 0 et 1, puis on regarde quel est le segment sélectionné, et on reproduit l'individu correspondant. Avec cette technique, les bons individus seront plus souvent sélectionnés que les mauvais, et un même individu pourra avec cette méthode être sélectionné plusieurs fois. Néanmoins, sur des populations de petite taille, il est difficile d'obtenir exactement l'espérance mathématique de sélection à cause du faible nombre de tirages.

Le cas idéal d'application de cette méthode est bien évidemment celui où la population est de taille infinie. On aura donc un biais de sélection plus ou moins fort suivant la dimension de la population. Un autre problème rencontré lors de l'utilisation de la sélection par roulette est lorsque la valeur d'adaptation des chromosomes varie énormément. Si la meilleure fonction d'évaluation d'un chromosome représente 90% de la roulette alors les autres chromosomes auront très peu de chance d'être sélectionnés et on arriverait à une stagnation de l'évolution. La répartition des probabilités de sélection des individus selon la méthode de roulette sera exprimée par l'équation (4.2), [23].

$$P_s(x_i) = \frac{f(x_i)}{\sum_{k=1}^N F(x_k)}$$

$f(x_i)$:est l'aptitude de l'individu i dans la population.

N : est le nombre d'individus dans la population (4.2)

La figure (IV.9) illustre une roulette dans laquelle chaque individu se voit attribuer un secteur dont l'angle est proportionnel à sa performance:

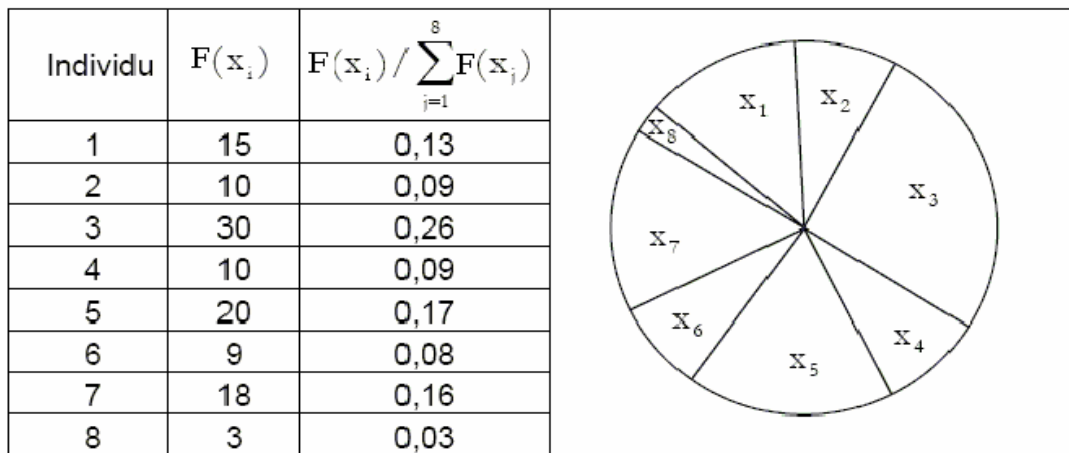


Figure IV.9 : Exemple de roulette (Wheel) [23].

IV.3.4.2-Sélection par rang :

La sélection par rang trie d'abord la population par évaluation. Ensuite, chaque individu se voit associé un rang en fonction de sa position. Ainsi le meilleur individu aura le rang 1, le suivant 2, et ainsi de suite jusqu'au mauvais individu qui aura le rang N, pour une population de N individus. La sélection par rang d'un individu est identique à la sélection par roulette, mais les proportions sont en relation avec le rang plutôt qu'avec la valeur d'évaluation. La probabilité P_s l'individu x_i selon son rang k est définie par [23]:

$$p_s(x_i) = \frac{2(N - k + 1)}{N(N + 1)} \tag{4.3}$$

Avec cette méthode de sélection, tous les individus ont une chance d'être sélectionnés. Cependant, elle conduit à une convergence plus lente vers la bonne solution. Ceci est dû au fait que les meilleurs individus ne diffèrent pas énormément des plus mauvais.

Chromosomes	1	2	3	4	5	6
$F(x_i)$	80	5	1	4	3	2
Rang	1	2	6	3	4	5
Probabilités	29%	24%	5%	19%	14%	9%

Tableau IV.1:Exemple de sélection par rang pour 6 chromosomes.

IV.3.4.3-Sélection par tournoi :

Un nombre p d'individus est sélectionné parmi les N individus de la population. Le meilleur, c'est à dire celui dont la fonction d'adaptation est la plus élevée, est sélectionné. Ce procédé est répété jusqu'à obtenir N individus. Il est tout à fait possible que certains individus participent à plusieurs tournois. Ils ont donc droit d'être copiés plusieurs fois, En général quatre individus sont sélectionnés pour chaque tournoi, $p = 4$.

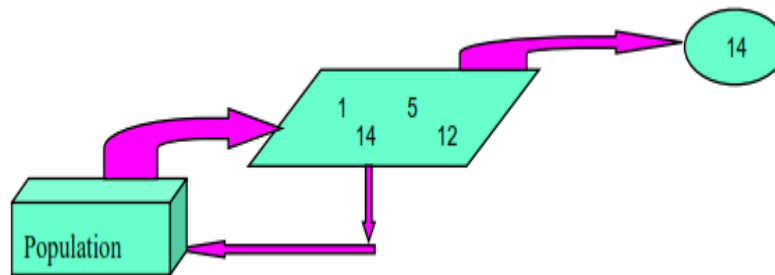


Figure. IV.10. Processus de sélection par tournoi.

IV.3.4.4-Elitisme :

Cette méthode améliore considérablement les algorithmes génétiques, car elle permet de ne pas perdre les meilleures solutions. A la création d'une nouvelle population, il y'a de grandes chances que les meilleurs chromosomes soient modifiés, et donc perdus après les opérations d'hybridation et de mutation. Pour éviter cela, on utilise la méthode élitiste.

L'élitisme consiste à conserver à chaque génération un certain nombre des meilleurs chromosomes de la population qui pourraient disparaître par les opérations de mutation, croisement ou sélection. De plus, elle s'occupe à copier un ou plusieurs des meilleurs chromosomes dans la nouvelle génération. Ensuite, on génère le reste de la population selon l'algorithme de reproduction usuel

IV.3.5-L'opérateur de croisement :

Le phénomène de croisement est une propriété naturelle de l'ADN. C'est par analogie qu'ont été conçus les opérateurs de croisement dans les (AG). Le croisement combine les gènes des deux individus parents pour donner deux nouveaux chromosomes d'individus enfants (descendants) possédant des caractéristiques issues des deux parents.

La zone de croisement est généralement choisie aléatoirement dans les chromosomes. Les méthodes de croisement sont liées au codage mais leur principe est identique. Il a pour

but d'enrichir la diversité de la population en manipulant la structure des chromosomes, il favorise l'exploration de l'espace de recherche et permet d'explorer l'ensemble des solutions possibles. Classiquement, les croisements sont envisagés avec deux parents et génèrent deux enfants. Dans un groupe de parents arbitrairement choisis dans la population chaque paire dans la population formée va subir le croisement avec une probabilité P_{cross} [29].

IV.3.5.1-Croisement à un site :

Il consiste à échanger les gènes de chacun des parents de longueur l en vérifiant la probabilité P_c . Le site de croisement S doit être choisi entre 1 et $(l - 1)$. Le changement va se faire entre le site sélectionné et la position finale l des deux chaînes comme le montre la figure (IV.11).

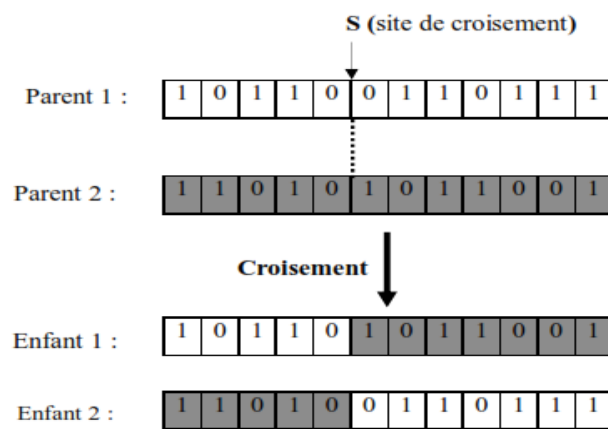


Figure IV.11 : Croisement à un site. [34]

IV.3.5.2- Croisement à k sites :

On choisit au hasard k points de croisements successifs. Cet opérateur généralement considéré comme plus efficace que le précédent. Le changement va se faire entre deux sites successifs des deux chaînes comme le montre la figure (IV.12).

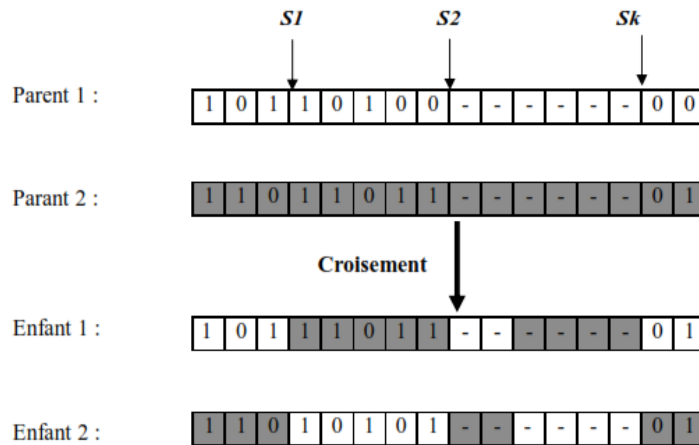


Figure V.12 : Croisement à k sites. [34]

IV.3.6-L'opérateur de mutation :

Contrairement au croisement qui est un opérateur d'exploitation, la mutation est principalement un opérateur d'exploration de l'espace de recherche. La mutation est l'opérateur qui permet d'éviter la dégénérescence de la population. Cette dégénérescence peut se traduire par une convergence des individus vers un optimum local, d'où l'importance de la mutation. Ce phénomène génétique d'apparition de "mutants" est rare mais permet d'expliquer les changements dans la morphologie des espèces, toujours dans le sens d'une meilleure adaptation au milieu naturel. [5].

Classiquement, la mutation modifie aléatoirement, un petit nombre de gènes, avec un faible taux de probabilité, ceci revient à modifier aléatoirement la valeur d'un paramètre du dispositif. Les individus de la population issus du croisement vont ensuite subir un processus de mutation avec une probabilité P mutation qui est exécuté bit à bit.

Comme pour le croisement, la mutation dépend du problème posé, la principale différence se situe dans le taux de mutation qui est généralement faible et se situe entre 0.5% et 1% de la population totale. Ce taux faible permet d'éviter une dispersion aléatoire de la population et n'entraîne que quelques modifications sur un nombre limité d'individus [35].

Comme pour les croisements, de nombreuses méthodes de mutation ont été développées dans la littérature mais l'une des plus efficaces est celle qui consiste à muter chaque paramètre de la fonction à optimiser avec une probabilité dépendant des informations contenues dans les gènes des individus. Dans le cas du codage binaire, chaque bit est remplacé selon une probabilité P mutation par son inverse. C'est ce qu'illustre la figure (IV.13).

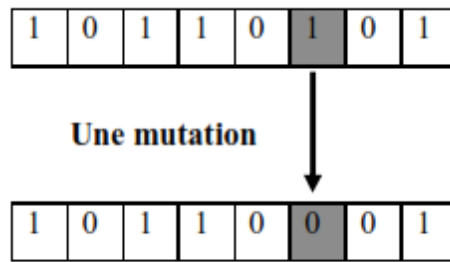


Figure IV.13: mutation dans un chromosome. [34]

IV.3.7-Critères d'arrêt :

Le critère d'arrêt indique que la solution est suffisamment approchée de l'optimum. Plusieurs critères d'arrêt de l'algorithme génétique sont possibles. On peut arrêter l'algorithme :

- Après un nombre de générations suffisant pour que l'espace de recherche soit convenablement exploré. Ce critère peut s'avérer coûteux en temps de calcul si le nombre d'individus à traiter dans chaque population est important.
- Lorsque la population n'évolue plus suffisamment rapidement.
- Lorsque la fonction d'adaptation d'un individu dépasse un seuil fixé au départ.

IV.3.8-Avantages et inconvénients des algorithmes génétiques :

Les principaux avantages des algorithmes génétiques par rapport aux autres techniques d'optimisation sont :

- Autorisent la prise en compte de plusieurs critères simultanément, et qu'ils parviennent à trouver de bonnes solutions sur des problèmes très complexes.
- L'exploration de l'espace de recherche, basée sur des paramètres, grâce à une recherche parallèle. Cette méthode permet de traiter des espaces de recherche importants (beaucoup de solutions).
- L'exploration de meilleures solutions disponibles à un moment donné.
- L'élimination de solutions non valides.
- Nombre de solutions important.
- Relativité de la qualité de la solution selon le degré de précision demandé.

Ils présentent, aussi, un certain nombre de limitations :

- difficultés à gérer des contraintes nombreuses et complexes.
- Afin de garantir la robustesse des algorithmes génétiques, le calcul d'un très grand nombre de fitness parfois de l'ordre de plusieurs centaines de milliers est généralement nécessaire avant l'obtention d'une bonne solution. Ce nombre important de calcul peut s'avérer problématique quand le coût de calcul de la fitness est important surtout, lorsqu'on travaille par exemple en grande dimension sur des fonctions à complexité importante.
- Choix délicat de la fonction d'évaluation.
- Les nombreux paramètres qui les contrôlent sont délicats à régler (probabilités de croisement et de mutation notamment, ainsi que le codage des chromosomes qui peut faire varier radicalement la vitesse de convergence).

IV.3.9-Conclusion :

Les méthodes déterministes peuvent trouver le minimum global de la fonction sous certaines hypothèses comme la convexité et la différentiabilité, Mais souvent convergent vers un des minimums locaux de la fonction objectif. Par contre avec les méthodes stochastique (G A) on' est pas obligé de satisfaire les hypothèses de continuités ; Malgré le nombre important d'évaluations, les algorithmes stochastiques présentent le grand avantage par rapport aux méthodes déterministes, d'avoir la capacité de trouver l'optimum global.

Les méthodes stochastiques les plus prometteuses sont les algorithmes génétiques. le recuit simulé et la recherche taboue.

Nous pouvons conclure que les AG sont des algorithmes simples de conception et peuvent résoudre des problèmes assez complexes.

CHAPITRE

V

OPTIMISATION D'UN RENFORT COMPOSITE PAR (AG)

V.1-Introduction :

Aujourd'hui les chercheurs sont occupés quotidiennement à des problèmes technologiques de complexité croissante qui surgissent surtout à la résistance des matériaux et le comportement des structures en rupture.

Actuellement on parle beaucoup de l'optimisation dans tous les secteurs industriels et spécialement pour la conception de structures, ces derniers et après un certain temps au cycle de travail subit à la fatigue et perde ces propriétés mécaniques et physiques.

Pour éviter ces problèmes concret on a pense sur la réhabilitation et le renforcement de ces structures en utilisant les matériaux composite, Le choix du type et la nature du renfort ainsi que l'arrangement des fibres sont toujours faits en fonction des propriétés finales recherchées.

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'effet de l'orientation des fibres de renfort en matériaux composite stratifié à la flèche en flexion 3 points des poutres. La méthode d'optimisation appliquée est celle qui se base sur les principes des algorithmes génétiques tels qu'ils ont été décrits au chapitre précédent.

Les équations utilisées pour évaluer les individus de la population résultent de la théorie classique des stratifiés avec des variables discrètes.

V.2-Présentation du problème à résoudre :

Le problème qu'en va résoudre consiste à renforcer une poutre en aluminium ou acier chargée en flexion 3 points par matériau composite. (fig. V.1)

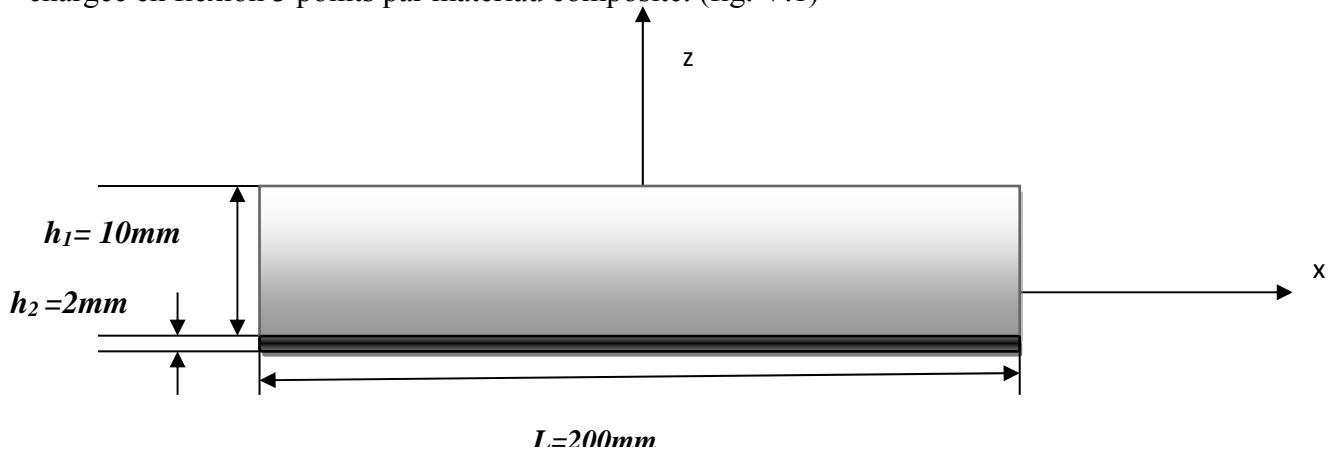


Figure V.1 : Poutre métallique renforcée par couche en matériau composite.

Les renforts, dont le rôle est d'assurer les fonctions mécaniques, se présentent généralement sous forme de fibres dont l'orientation au sein du matériau composite dépend de la sollicitation mécanique appliquée. Les fibres en verre et en carbone sont principalement utilisées dans la formulation des résines et contribuent à l'amélioration de la résistance et de la rigidité du matériau composite.

Les caractéristiques mécaniques de l'acier, l'aluminium et les fibres sont présentées dans le tableau (V.1).

	Verre	Carbone	Acier	Aluminium
Module d'Young longitudinal $E_L(\text{Gpa})$	46	230	210	70
Module d'Young transversal $E_{LT}(\text{Gpa})$	10	14.4	210	70
Module de cisaillement longitudinal $G_{LT}(\text{Gpa})$	4.6	4.9	/	/
Coefficient de poisson $\nu_{LT}(\text{Gpa})$	0.31	0.32	0.29	0.34

Tableau V.1 : Les caractéristiques mécaniques de l'acier, l'aluminium et les fibres.

La poutre utilisée dans ce travail est de longueur, $L = 200$ mm, de largeur $b = 40$ mm, et hauteur $h = 10$ mm.

Le renforcement de la poutre par matériaux composites (Carbone /époxyde, Verre /époxyde) est réalisé par une couche de hauteur $h = 2$ mm et de deux couches $h = 2$ mm.

V.3-Effet de l'orientation des fibres de la couche composite sur la flèche de poutre :

En raison de la nature anisotrope de structures composites, il est difficile d'envisager directement leurs caractéristiques et leur comportement mécanique. Cette étude a été réalisée pour fournir plus de détails sur la flèche de la poutre composite travaillant en flexion trois points. La flèche de la poutre est donnée par l'équation (3.64) pour $x=L/2$ (au milieu de la poutre)

$$w_c = \frac{PL^3}{48E_x I} = \frac{PL^3}{48b} D_{11}^*$$

$$\text{Ou } D_{11}^* = \frac{1}{D_{11}} \quad (5.1)$$

$$w_c = \frac{PL^3}{48b D_{11}} \quad (5.2)$$

D'après (Vinson et Sierakowski) le paramètre équivalent de rigidité D est :

$$D_{11} = \sum_{k=1}^n b E_x^k \frac{(h_k^3 - h_{k-1}^3)}{3} \quad (5.3)$$

En introduit l'équation (5.3) sur notre fonction objective (3.64).

En trouve :

$$w_c = \frac{PL^3}{48b \left[\sum_{k=1}^n b E_x^k \frac{(h_k^3 - h_{k-1}^3)}{3} \right]} \quad (5.4)$$

Avec le module équivalent d'élasticité de chaque couche s'écrit sous la forme : [36].

$$\frac{1}{E_x^k} = \left(\frac{\cos^4(\theta_k)}{E_{11}} \right) + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_{11}} \right) \cos^2(\theta_k) \sin^2(\theta_k) + \frac{\sin^4(\theta_k)}{E_{22}} \quad (5.5)$$

La flèche dû à la flexion de la poutre dépend de divers paramètres, parmi lequel en peut citer :

L'orientation des fibres, la géomètre de la structure, le type de chargement et l'environnement.

Dans ce qui suit, nous allons étudié l'effet de l'orientation des fibres sur la flèche des poutres en aluminium ou acier renforcer par différents matériaux : carbone- époxyde, verre- époxyde avec 1seul couche et 2 couches de renfort.

Afin d'étudier l'effet de renfort en composite sur la flèche, nous avons établi un programme informatique sous MATLAB.

V.3.1- Effet de l'orientation des fibres sur la flèche des poutres chargées en flexion trois points en Acier et Aluminium renforcées à différents types de matériaux :

V.3.1.1-Renforcement par une seule couche :

1^{er} cas : poutre en Aluminium.

La variation de la flèche de la poutre Aluminium renforcée par une couche en carbone-époxyde ou verre-époxyde en fonction de l'orientation des fibres est donnée dans la figure V.2.

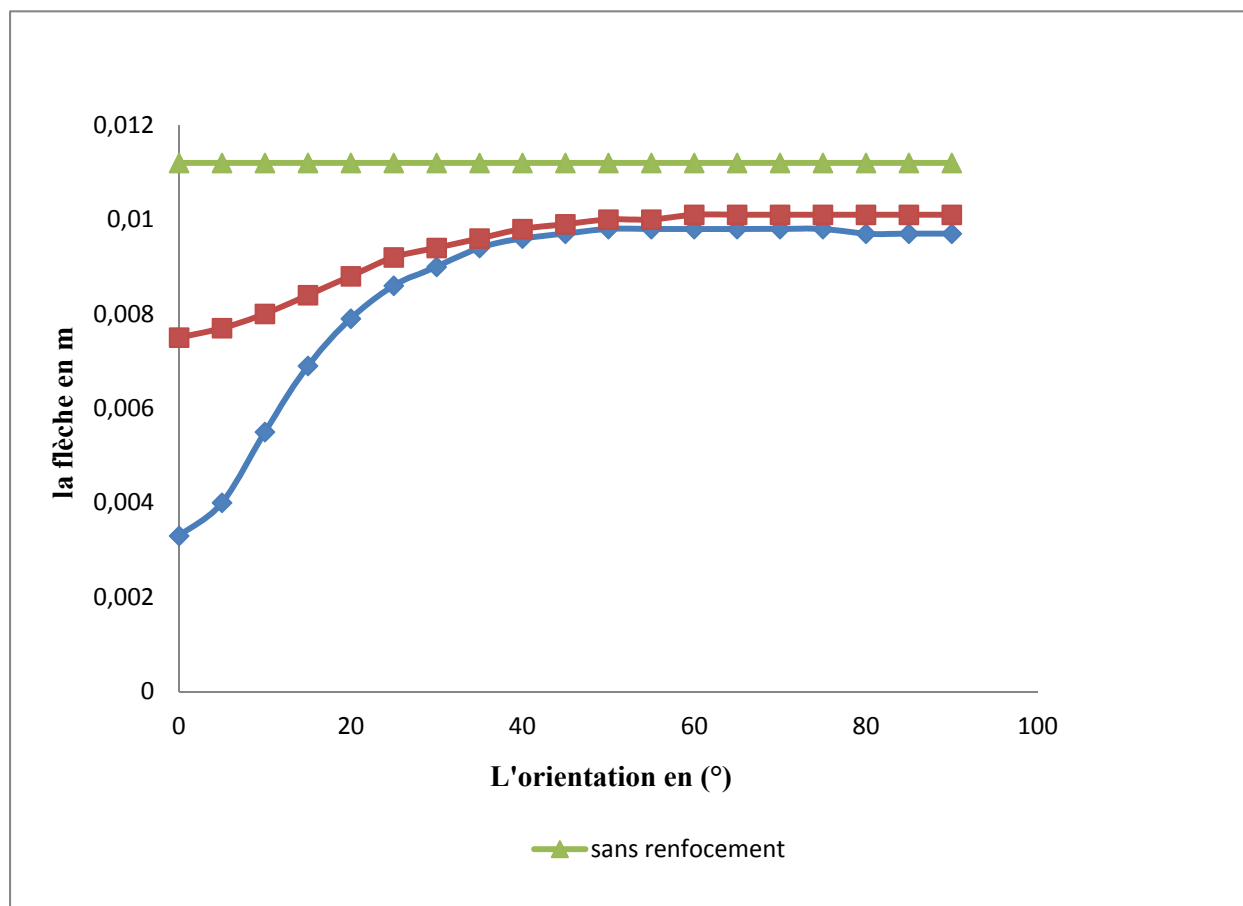


Figure V.2: Variation de la flèche en fonction de l'orientation des fibres a renfort composite verre-époxyde et carbone époxyde (poutre en Aluminium).

Les différents résultats montrent que pour l'orientation 0° la flèche est minimale, mais à partir de l'orientation 5° la flèche augmente avec l'augmentation de θ jusqu'à $\theta = 45^\circ$, puis la flèche se stabilise pour les orientations des fibres sont comprise entre 50° et 75° .

Cette figure montre que pour l'orientation des fibres avec $\theta = 0^\circ$ la couche de renforcement en carbone-époxyde donne une flèche minimale par rapport à celle en verre-époxyde, c'est la nature et les caractéristiques mécaniques du matériau de fibre de carbone qui à provoquée cette faible flèche.

La différence en flèche pour les deux matériaux composite est de l'ordre de 56% pour une orientation 0° alors que la différence diminue avec l'augmentation de θ on constate aussi que les valeurs de la flèche coïncident à partir de $\theta = 40^\circ$.

2^{em} cas : poutre en Acier.

La variation de la flèche de la poutre en Acier renforcée par une couche en carbone-époxyde ou verre-époxyde en fonction de l'orientation des fibres est donnée dans la figure V.3

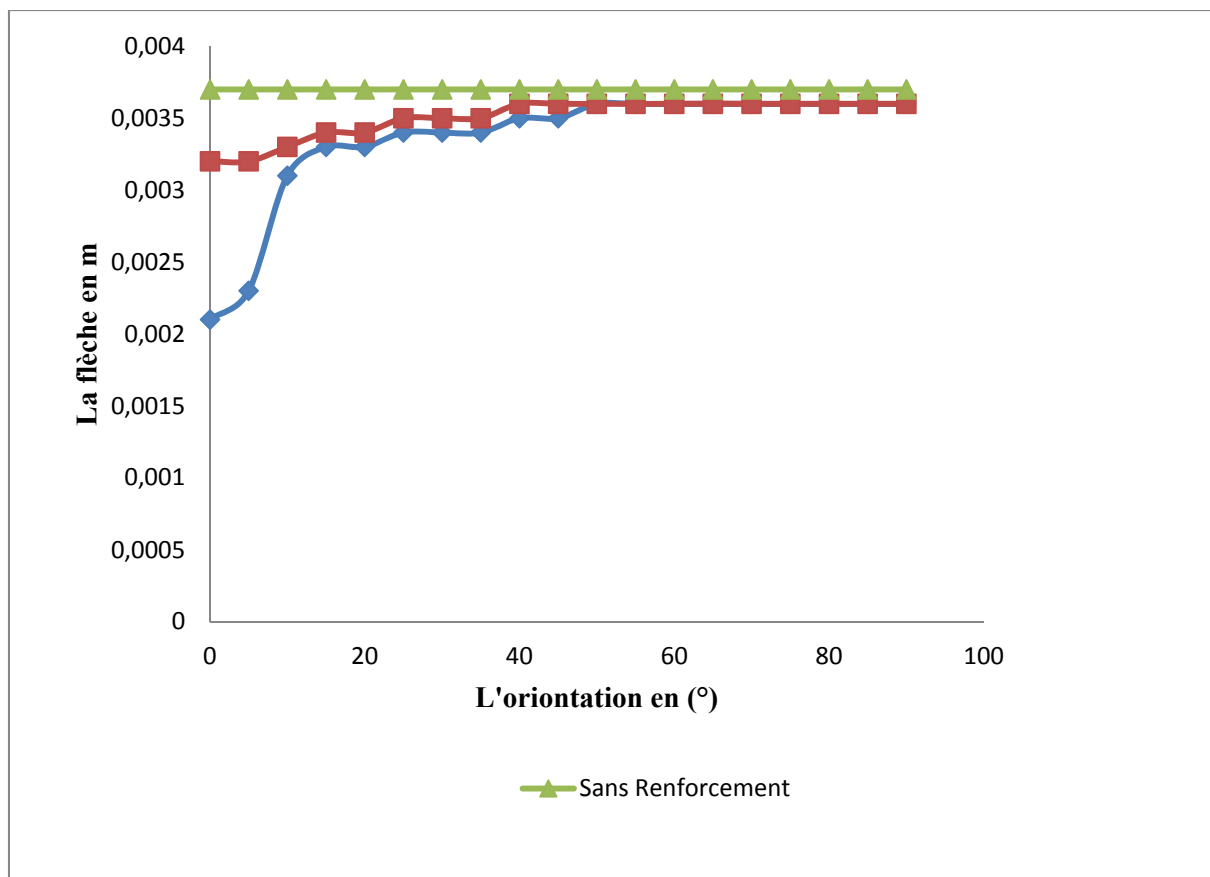


Figure V.3: Variation de la flèche en fonction de l'orientation des fibres a renfort composite verre-époxyde et carbone époxyde (poutre en Acier).

Les différents résultats montrent que pour l'orientation 0° la flèche est minimale, la flèche augmente avec l'augmentation de θ jusqu'à $\theta = 25^\circ$, à partir de cette valeur la flèche se stabilise entre 3.4 mm et 3.6 mm.

Les résultats montrent que la flèche est presque similaire pour les deux cas ; mais la différence est de l'ordre 1.1 mm pour $\theta = 0^\circ$, et elle diminue jusqu'à $\theta = 15^\circ$. La couche de renforcement en carbone-époxyde est meilleure par rapport à la couche en verre-époxyde dans l'intervalle $\theta = [0^\circ - 15^\circ]$.

V.3.1.2-Renforcement par deux couches :

Dans cette partie, nous considérons le cas des poutres en aluminium renforcées par deux couches en matériaux composites avec les empilements suivants $[0^\circ, 90^\circ]$, $[0^\circ, 45^\circ]$ et $[0^\circ, 0^\circ]$ à différentes longueurs. Notre but est d'étudier l'influence de la géométrie et l'orientation des fibres sur la flèche de la poutre.

V.3.1.2 .1-1^{er} cas : poutre en Aluminium.

Effet de la longueur : l'effet de la longueur de poutre en aluminium renforcé par carbone-époxyde et verre-époxyde avec deux couches $[0^\circ, 90^\circ]$; $[0^\circ, 45^\circ]$; $[0^\circ, 0^\circ]$ sur la flèche est donnée par les figures (V.4), (V.5), (V.6).

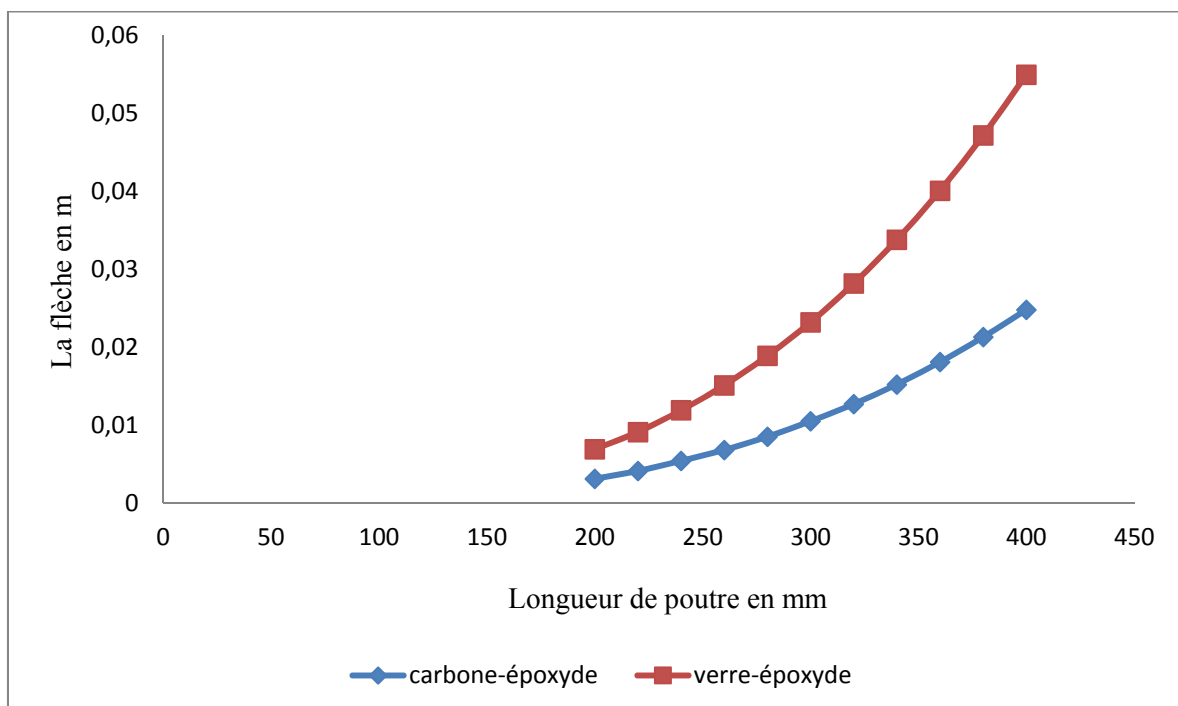


Figure V.4: Variation de la flèche de poutre aluminium renforcé par carbone-époxyde verre-époxyde orienté $[0^\circ, 90^\circ]$ à différentes longueurs.

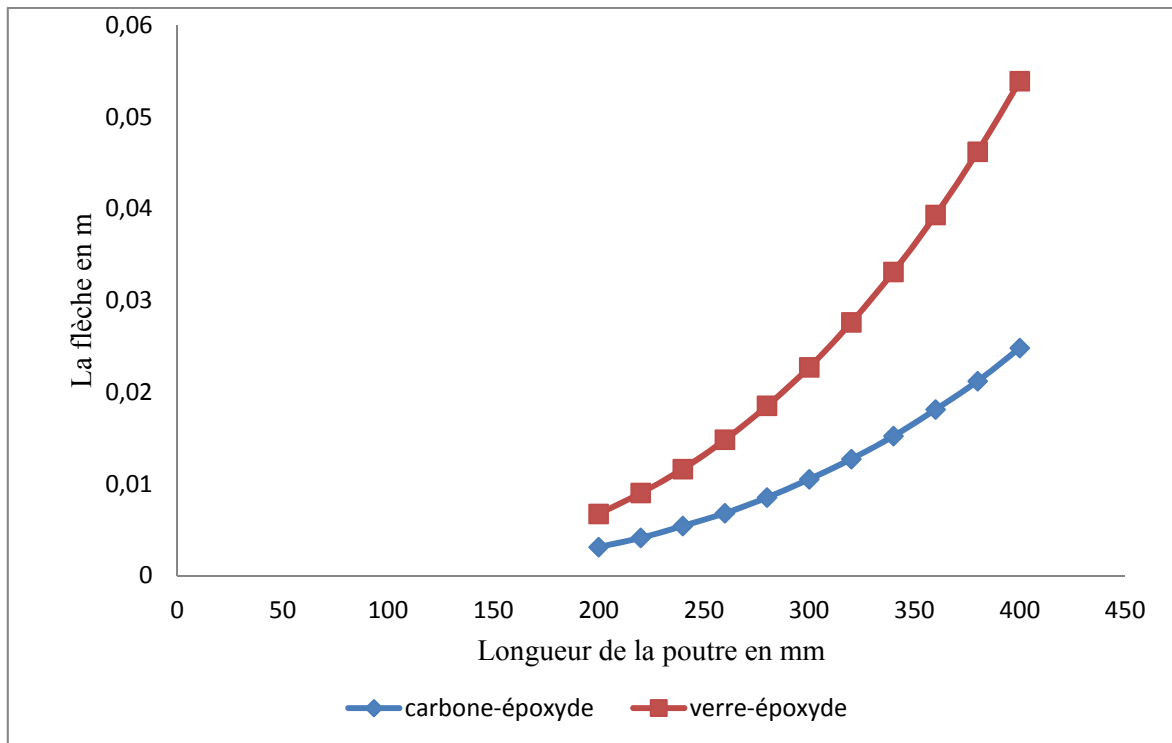


Figure V.5: Variation de la flèche de poutre aluminium renforcé par carbone-époxyde verre-époxyde orienté $[0^\circ, 45^\circ]$ à différent longueur.

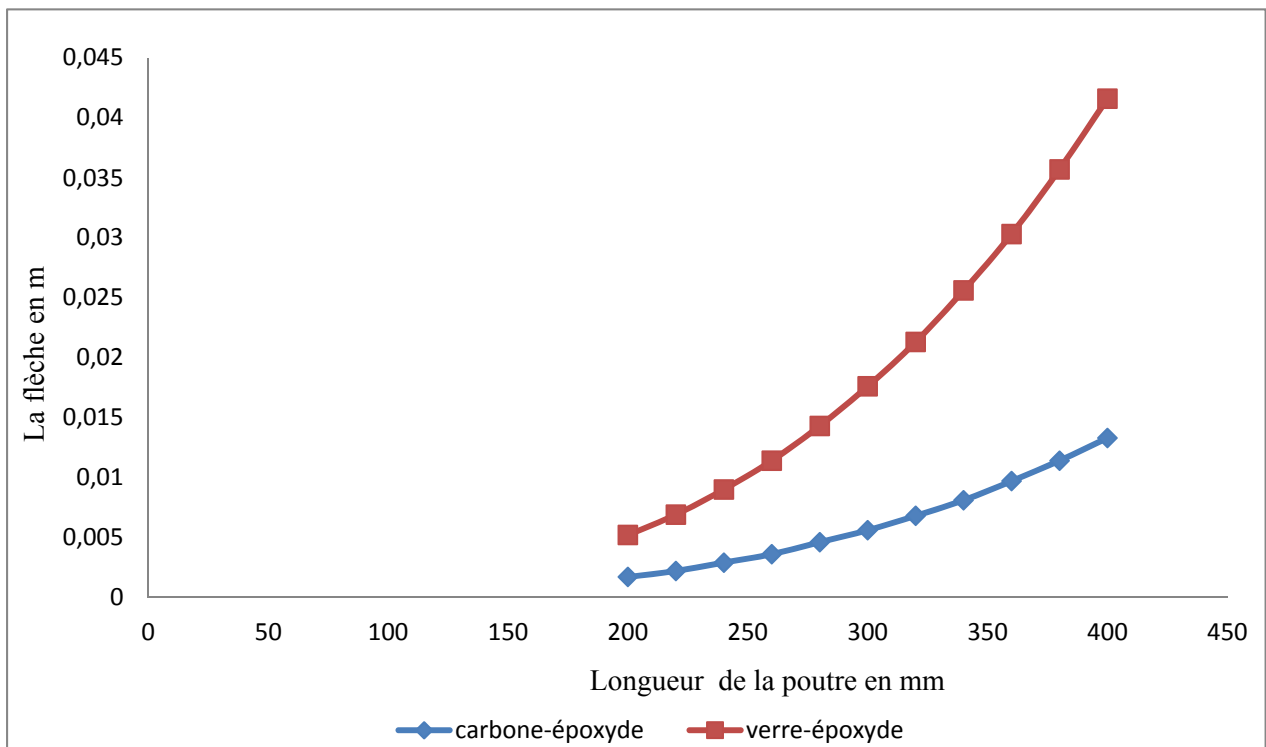


Figure V.6: Variation de la flèche de poutre aluminium renforcé par carbone-époxyde verre-époxyde orienté $[0^\circ, 0^\circ]$ à différents longueurs.

Tableau V.2 : valeurs des flèches de la poutre aluminium avec variation de longueur.

Longueur de la poutre	200 mm			400mm		
Matériau	Carbone-époxyde	Verre-époxyde	Déférence En %	Carbone-époxyde	Verre-époxyde	Déférence En %
Orientation	Flèche de la poutre en m					
[0°,90°]	0.0031	0.0069	53.6%	0.0248	0.0555	55.3%
[0°,45°]	0.0031	0.0067	53.7%	0.0248	0.0539	53.9%
[0°,0°]	0.0017	0.0052	67.3%	0.0133	0.0416	68%

Le tableau V.2 illustre les valeurs de la flèche de poutre en aluminium renforcée par les deux matériaux carbone-époxyde verre-époxyde orienté respectivement à [0°,90°], [0°,45°], [0°,0°] pour deux valeurs de longueur L= 200 mm et L= 400 mm .

Les résultats obtenus montrant que pour les différents orientations [0°,90°], [0°,45°], [0°,0°] la valeur de la flèche à L= 200 mm et L= 400 mm est plus importante pour le renfort verre-époxyde.

Ces résultats confirment l'utilisation du renfort carbone-époxyde.

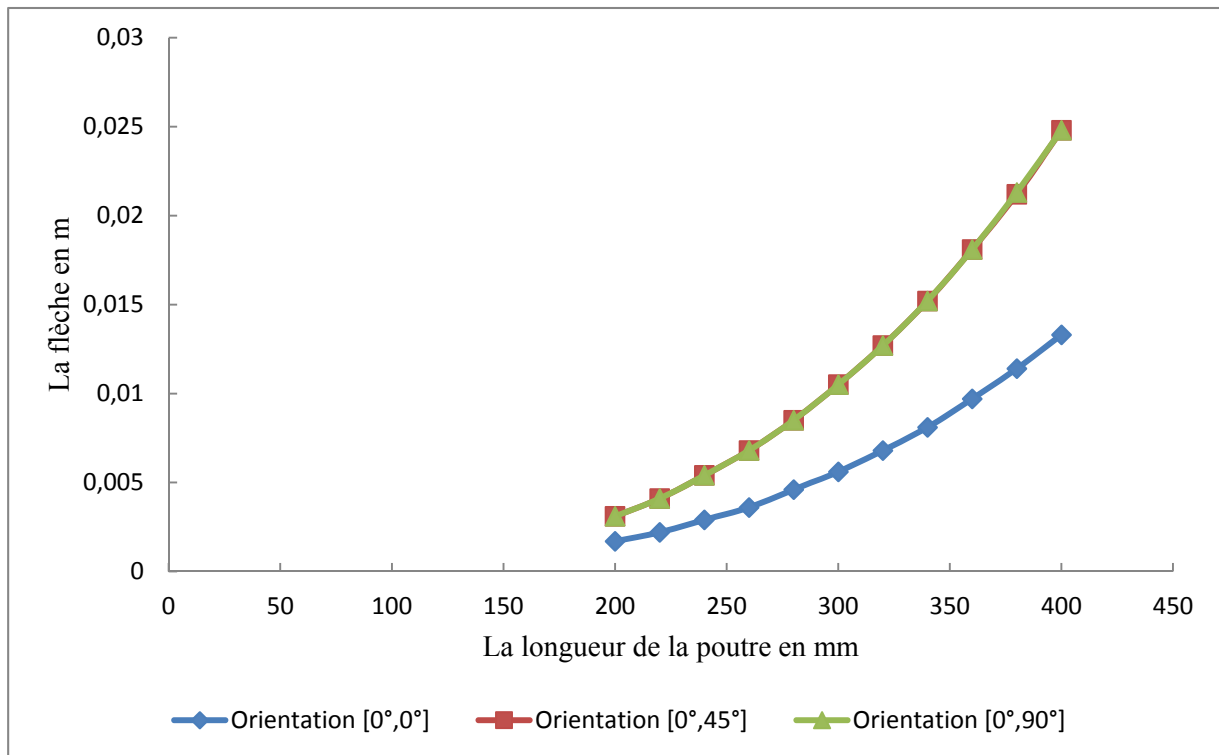
Effet de l'orientation :

Figure V.7: Variation de la flèche de poutre aluminium renforcée par carbone-époxyde a différents orientation. $[0^\circ,0^\circ]$ $[0^\circ,45^\circ]$ $[0^\circ,90^\circ]$

La figure V.7 présente la variation de la flèche de poutre aluminium renforcée par carbone-époxyde pour différentes orientations. $[0^\circ,0^\circ]$, $[0^\circ,45^\circ]$, $[0^\circ,90^\circ]$. Les différents résultats montrent que les valeurs de la flèche coïncident pour les deux empilements $[0^\circ,45^\circ]$ $[0^\circ,90^\circ]$ avec l'augmentation de la longueur, la comparaison des courbes montre que l'empilement $[0^\circ,0^\circ]$ améliore la flèche de 46%. L'empilement $[0^\circ,0^\circ]$ est meilleure par rapport aux empilements $[0^\circ,45^\circ]$, $[0^\circ,90^\circ]$ dans l'intervalle $L = [200-400]$ mm.

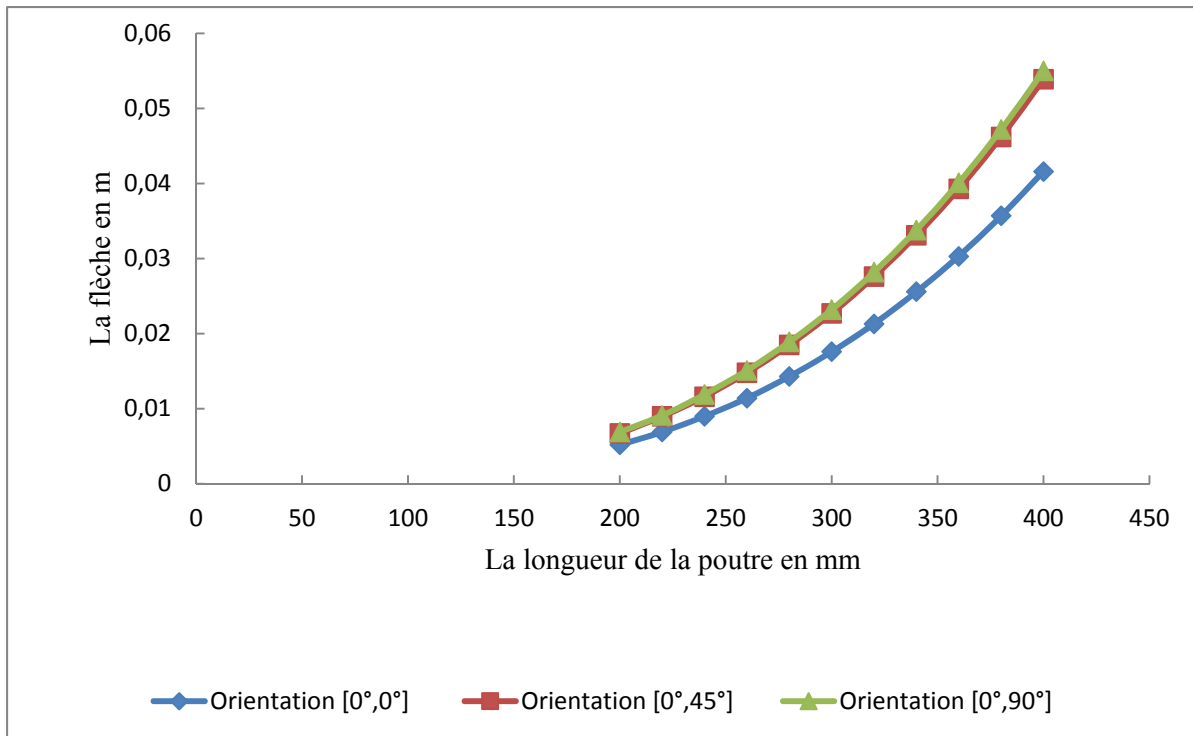


Figure V.8: Variation de la flèche de poutre aluminium renforcée par verre-époxyde a différents orientation. $[0^\circ,0^\circ]$ $[0^\circ,45^\circ]$ $[0^\circ,90^\circ]$.

La comparaison des courbes montre que la flèche est presque similaire pour les empilements $[0^\circ,0^\circ]$ $[0^\circ,45^\circ]$ $[0^\circ,90^\circ]$ avec un différence très petit de l'ordre de 13 % on comparant l'empilement $[0^\circ,0^\circ]$ avec les deux autres .

V.3.1.2 .2- 2^{ème} cas : poutre en Acier.*Effet de la longueur :*

Dans cette partie, nous considérons le cas des poutres en Acier renforcé par différent matériaux composite orienté à $[0^\circ, 90^\circ]$, $[0^\circ, 45^\circ]$ et $[0^\circ, 0^\circ]$ pour différentes longueurs.

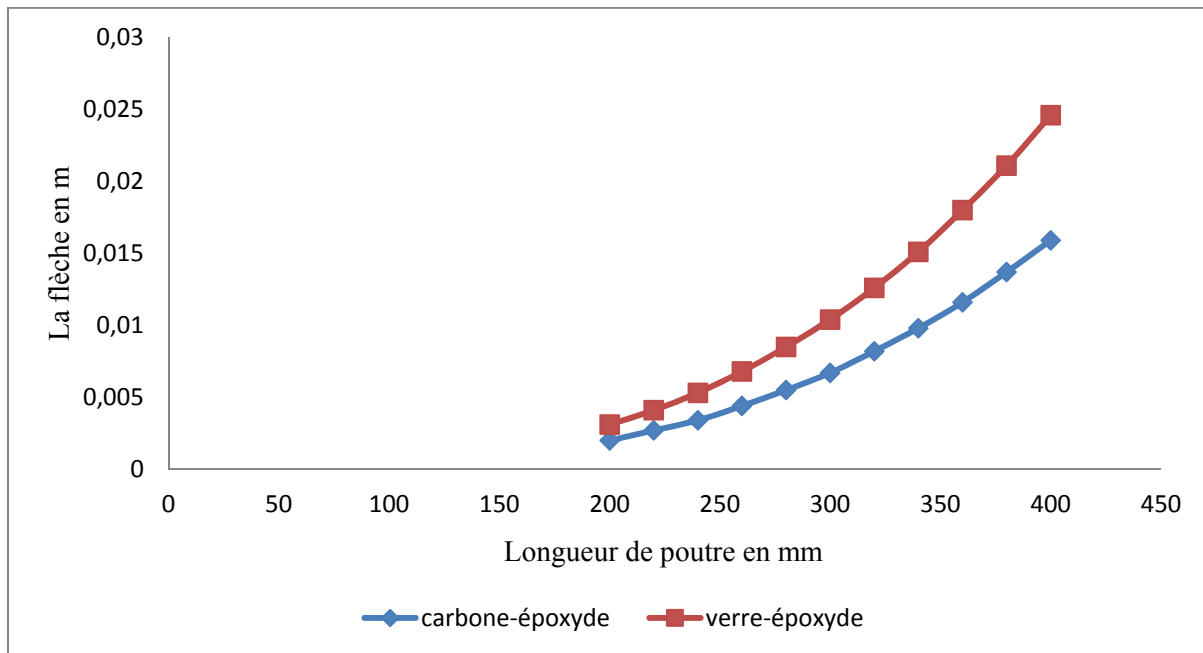


Figure V.9: Variation de la flèche de poutre Acier renforcé par carbone-époxyde verre-époxyde orienté $[0^\circ, 90^\circ]$ a différent longueur.

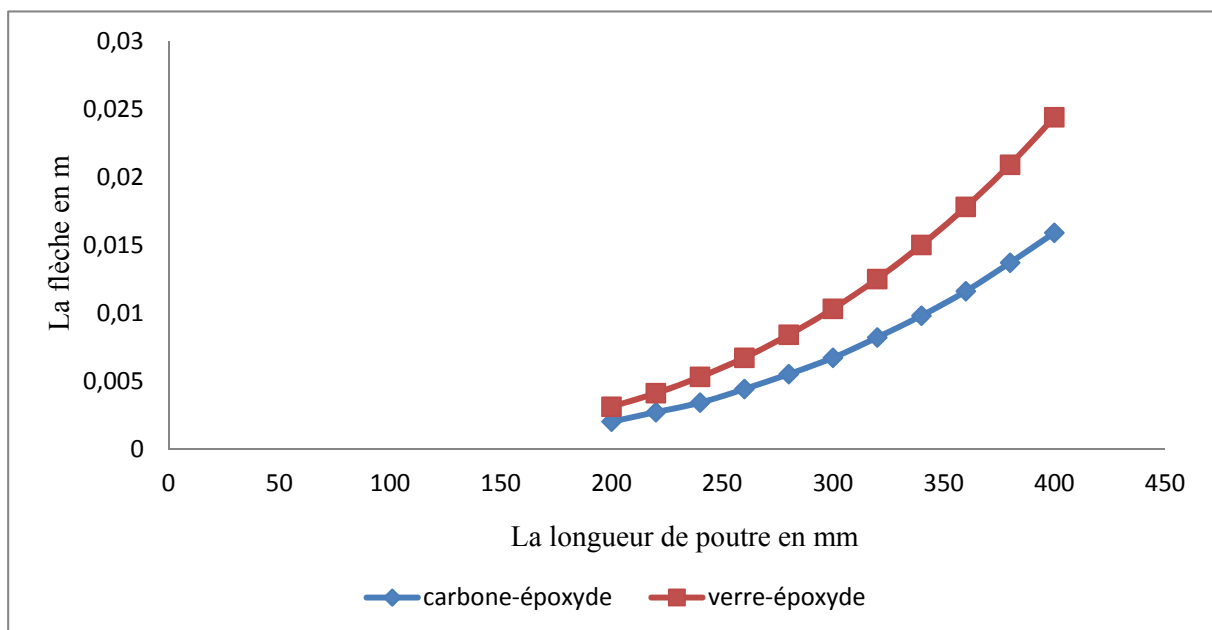


Figure V.10: Variation de la flèche de poutre Acier renforcé par carbone-époxyde verre-époxyde orienté $[0^\circ, 45^\circ]$ a différent longueur.

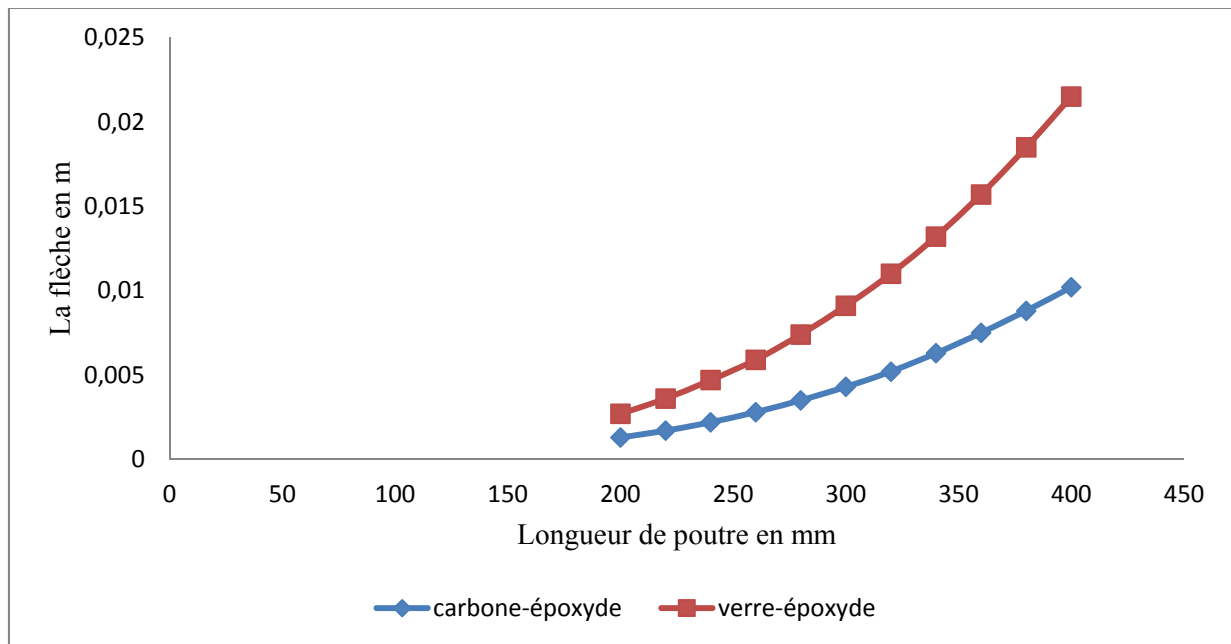


Figure V.11: Variation de la flèche de poutre Acier renforcé par carbone-époxyde verre-époxyde orienté $[0^\circ, 0^\circ]$ à différents longueurs.

Les figures V.9, V.10, V.11 présentent la variation de la flèche de poutre en Acier renforcée par les matériaux carbone-époxyde et verre-époxyde avec des orientations respectivement à $[0^\circ, 90^\circ]$, $[0^\circ, 45^\circ]$, $[0^\circ, 0^\circ]$ à différents longueurs. Les résultats confirment l'influence de la nature des matériaux constituant la fibre renforçant la poutre en acier. C'est le matériau carbone-époxyde qui se caractérise par sa haute résistance à la flèche par rapport à celui verre-époxyde.

Tableau V.3 : valeurs des flèches de la poutre Acier avec variation de longueur.

Longueur de la poutre	200 mm			400mm		
	Carbone-époxyde	Verre-époxyde	Déférence En %	Carbone-époxyde	Verre-époxyde	Déférence En %
Orientation	Flèche de la poutre en m					
$[0^\circ, 90^\circ]$	0.002	0.0031	35.4 %	0.0159	0.0246	35.3%
$[0^\circ, 45^\circ]$	0.002	0.0031	35.4 %	0.0159	0.0244	34.8%
$[0^\circ, 0^\circ]$	0.0013	0.0027	51.8 %	0.0102	0.0215	52.55%

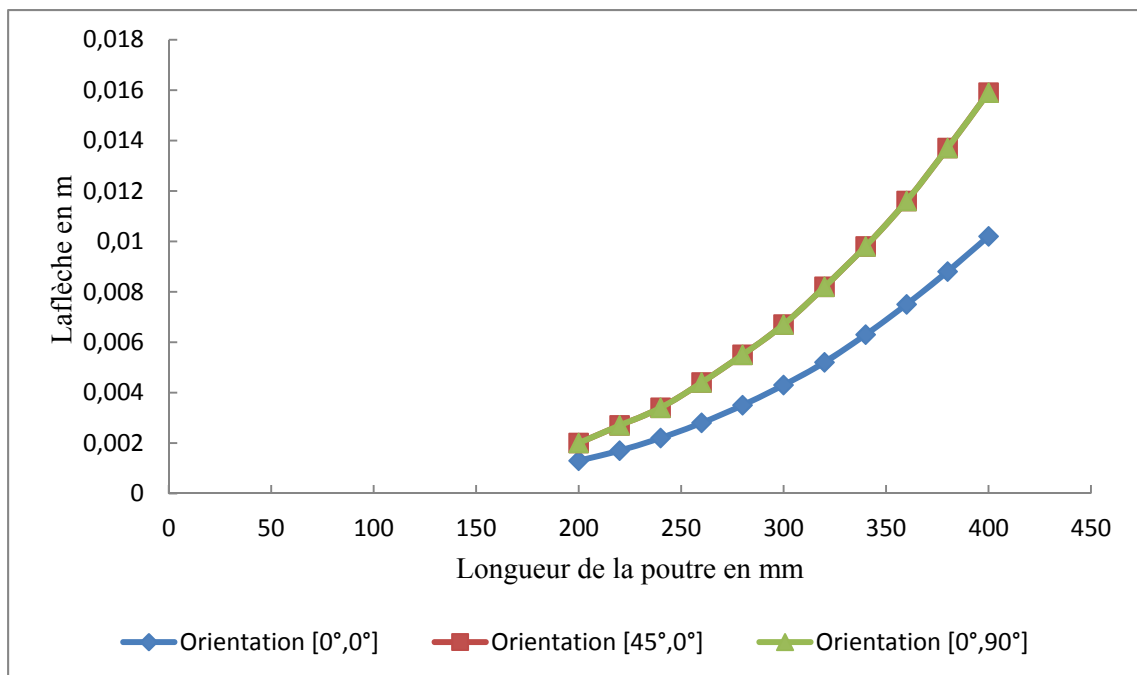
Effet de l'orientation:

Figure V.12: Variation de la flèche de poutre en Acier renforcée par carbone-époxyde a différents orientation. $[0^\circ, 0^\circ]$ $[0^\circ, 45^\circ]$ $[0^\circ, 90^\circ]$.

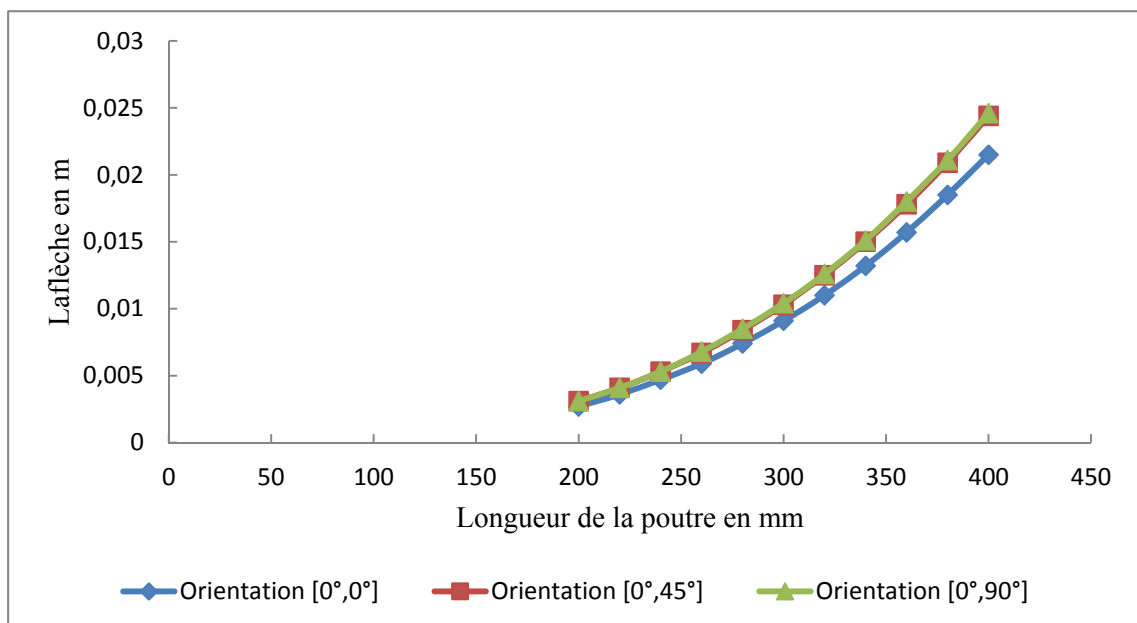


Figure V.13: variation de la flèche de poutre en Acier renforcée par verre-époxyde a différents orientation. $[0^\circ, 0^\circ]$ $[0^\circ, 45^\circ]$ $[0^\circ, 90^\circ]$.

D'autre part les figures montrent clairement que l'orientation des fibres n'influe pas beaucoup sur la flèche des poutres en Acier en comparant les 2 figures (V.12 et V.13).

Les résultats obtenus confirment l'utilisation du carbone-époxyde comme matériaux de renforcement avec les deux matériaux acier et aluminium.

V.4-Application de la méthode des algorithmes génétiques :

A ce stade nous intéressons à des applications plus concrètes. Le but est de montrer comment modéliser les problèmes de minimisation de la flèche à partir des algorithmes génétiques et des divers opérateurs que nous avons à disposition. Ceci nous conduira ensuite à montrer les avantages de cet outil par rapport à une résolution par une méthode analytique.

Cette étude porte donc sur l'optimisation de la flèche de flexion de structures métalliques renforcées par différents matériaux composites. Pour cela nous avons développé un programme de calcul d'optimisation sous le logiciel MATLAB en se basant sur la méthode des algorithmes génétiques et la théorie classique des stratifiés. Nous avons considéré des poutres métalliques en Acier et en Aluminium chargées en flexion 3 point ; renforcées par des couches en composites stratifiés carbone /époxyde et verre /époxyde dont les propriétés de ces matériaux sont données au tableau(V.1). L'orientation possible des plis sont autour de quatre orientations distinctes : 0° , $+45^\circ$, -45° et 90° .

V.4.1-Mécanisme de l'algorithme génétique :

Les étapes définissant la procédure d'optimisation par l'algorithme génétique sont illustrées à la figure (V.14). Une population initiale est créée aléatoirement. Puis des individus sont évalués et classés selon un indice de performance. Parmi les meilleurs, certains sont sélectionnés pour former un ensemble de parents. Grâce à un opérateur de reproduction, des enfants sont issus du groupe de parents. Après avoir créé et modifié l'ensemble d'enfants, la performance de ceux-ci est évaluée afin de comparer leur degré de performance par rapport au reste de la population et pour guider la construction de la nouvelle génération, c'est ainsi qu'une nouvelle population, possédant une partie des meilleures caractéristiques des générations précédentes, est créée. Ce processus se répète à partir de cette nouvelle génération jusqu'à ce que soit atteint le critère d'arrêt défini au départ.

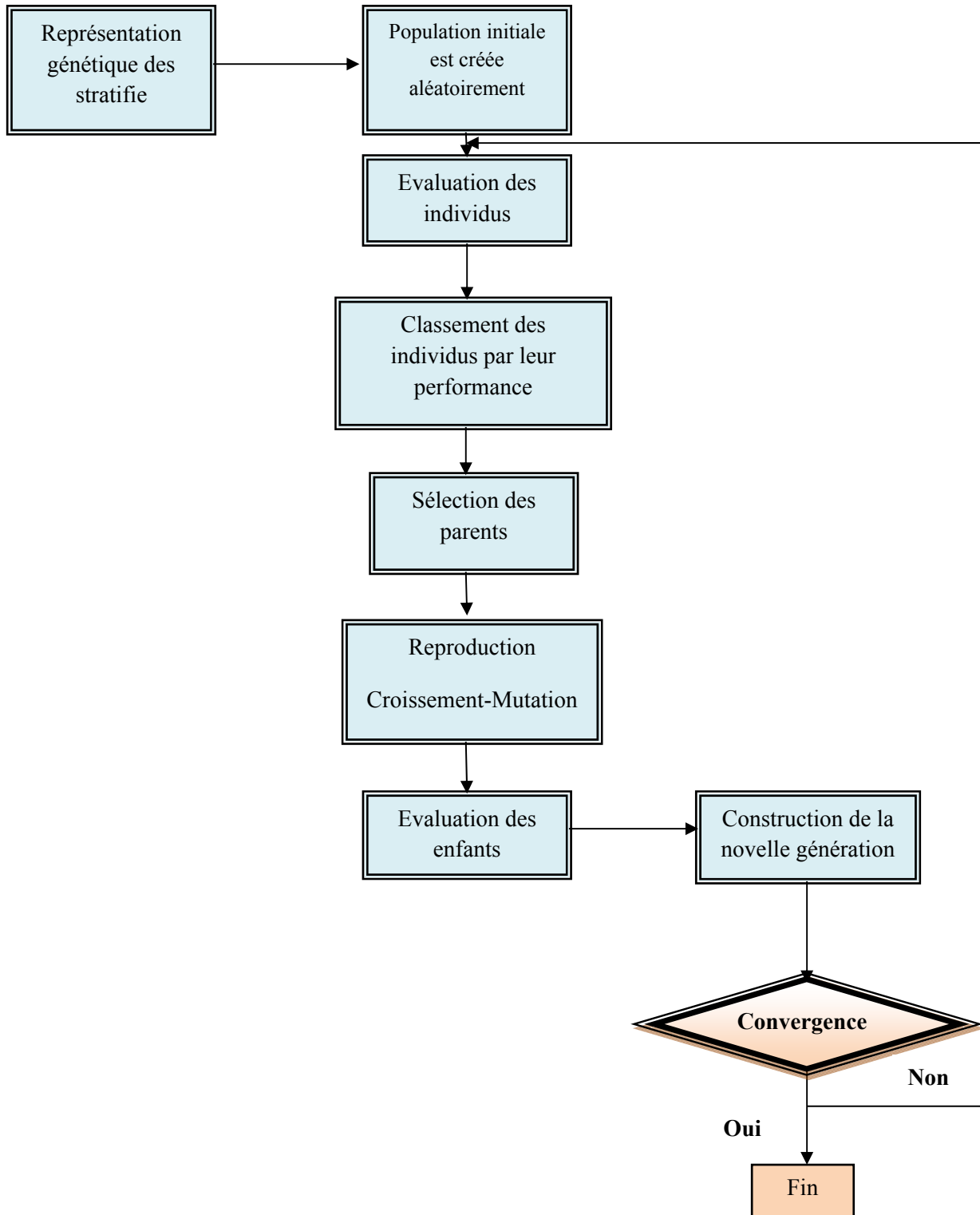


Figure V.14 : Mécanisme de l'algorithme génétique.

V.4.1.1-Population initiale :

La population initiale P_0 est générée de façon aléatoire selon le nombre des chromosomes n_c de chaque individu, le nombre de gènes de chaque chromosome $n_g(i)$, le domaine des gènes de chaque chromosome ω_i et le nombre d'individus dans la population N .

V.4.1.2-Evaluation des individus :

Une des caractéristiques des algorithmes génétiques est que la recherche se base uniquement sur la valeur de performance $F(x)$ des individus et aucunement sur les dérivées de la fonction objective et des contraintes. C'est cette particularité qui rend cette méthode pratique et efficace pour la réalisation de problèmes avec des variables discrètes.

V.4.1.3-Classement des individus :

Après avoir évalué les individus, on classe en ordre décroissant par rapport à la valeur de leur fonction d'évaluation $F(x)$.

V.4.1.4-Sélection :

Création d'une nouvelle population de N chromosomes par l'utilisation d'une méthode de sélection appropriée.

V.4.1.5- Croisement :

Prenons l'exemple lorsque chaque individu est composé d'un seul chromosome. Le domaine des gènes de celui-ci est ω (1, 2, 3,4) qui représentent respectivement les plis 0° , $+45^\circ$, -45° et 90° . La figure V.15 démontre le croisement à un point (X1P) d'un couple de parents P_1 , P_2 . Pour créer les deux enfants $C1$, $C2$ il faut tirer un nombre au hasard afin de déterminer le point de croisement qui est défini par le caractère « / » dans les prochaines figures. Ce nombre aléatoire est compris entre 1 et n_g-1 , ou n_g est le nombre total de gènes du chromosome. L'enfant C est alors constitué des gènes du parent 1 (P) précédant le point de croisement et des gènes du parent 2 (P) suivant le point de croisement.

Codage d'un individu de six plis :

Parents

P_1	1	2	3	4	1	2
P_2	3	2	1	3	2	1

Enfants

C_1	1	2	3	4	2	1
C_2	3	2	1	3	1	2

Décodage d'un individu de six plis :

Parents

P_1	0^0	$+45^0$	-45^0	90^0	0^0	$+45^0$
P_2	-45^0	$+45^0$	0^0	-45^0	$+45^0$	0^0

Enfants

C_1	0^0	$+45^0$	-45^0	90^0	$+45^0$	0^0
C_2	-45^0	$+45^0$	0^0	-45^0	0^0	$+45^0$

Figure V.15: Operateur à un point de croisement (X1P).

V.4.1.6- La mutation :

La mutation simple est appliquée aux enfants selon une probabilité P_m . Lors de la mutation un gène v_k d'un enfant C est choisi au hasard. Ce gène est alors modifié aléatoirement par une valeur différente de v_k appartenant au domaine ω . Le troisième gène v_3 est muté et sa valeur change de 3 à 1 (figure V.16).

Avant mutation	1	2	3	4	1	2
Après mutation	1	2	1	4	1	2

Avant mutation	0°	+45°	-45°	90°	0°	+45°
Après mutation	0°	+45°	0°	90°	0°	+45°

Figure V.16: Exemple d'une mutation simple.

V.4.1.7-Evaluation des enfants :

Après l'étape de création et modification des enfants, l'évaluation et la performance sera calculé de la même façon que les parents.

V.4.1.8-Construction de la nouvelle génération :

Après avoir été soumis à la mutation, les enfants sont alors prêts à être réinsérés dans la prochaine génération.

V.4.1.9-Convergence :

La recherche se termine lorsque le critère de convergence est atteint. Ce dernier peut prendre différentes formes. Sur notre étude en a fixé un nombre d'itération maximal.

V.5-Formulation des problèmes d'optimisation :

Les paramètres de l'algorithme génétique utilisés lors de la génération des résultats sont donnés par le (tableau V.4). En résumé, les résultats sont obtenus avec une population initiale de 30 individus dont les 5 meilleurs sont conservés à chaque génération (stratégie multi élitiste décrite au chapitre 4). La sélection est effectuée par la méthode du rang, de plus un opérateur à un point de croisement est appliqué à tous les couples de parents de l'ensemble de reproduction avec une probabilité de 1,00. Ensuite, un opérateur de mutation est appliqué à

l'ensemble d'enfants générés par le croisement est appliqué à chaque gène de chaque enfant avec une probabilité de 0,10. Le critère d'arrêt utilisé est de fixer le nombre maximal de générations à 30 et de chercher la performance $F(x)$ des individus évolués dans cette période.

Tableau V.4 : Paramètres de l'algorithme génétique.

N	N_k	Croisement	Mutation	Critère d'arrêt
		X1P	simple	t_n
30	5	1	0.1	30

Ces paramètres ont été définis de façon générale, le but de ce travail n'est pas de déterminer les paramètres permettant d'obtenir les résultats le plus rapidement possible, mais d'avoir une méthode d'optimisation pouvant résoudre le problème de minimisation de la flèche.

Le principe d'optimisation est appliqué à une poutre en Acier au Aluminium à différents matériaux de renforcement verre-époxyde, carbone-époxyde en deux couches dans les caractéristique mécanique et géométrique sont présenté a la section V.2, le problème d'optimisation est présente comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser : } w_c = \frac{PL^3}{48b \left[\sum_{k=1}^n bE_x^k \frac{(h_k^3 - h_{k-1}^3)}{3} \right]} \\ \text{En changeant : l'orientation de deux plis } (\theta_k). \\ \text{Sous contrainte de la charge P applique au centre de la poutre.} \end{array} \right.$$

V.6-Optimisation de la flèche de poutre en Acier chargée en flexion trois points pour différents matériaux de renforcement :

L'objectif de cette partie est de minimiser la flèche de flexion de poutre en acier renforcées à deux couches de composite à différents matériaux.

La figure V.17 illustre l'optimisation de la flèche d'une structure en acier renforcé par 2 couches carbone-époxyde par l'application de la méthode des algorithmes génétique durant 30 générations.

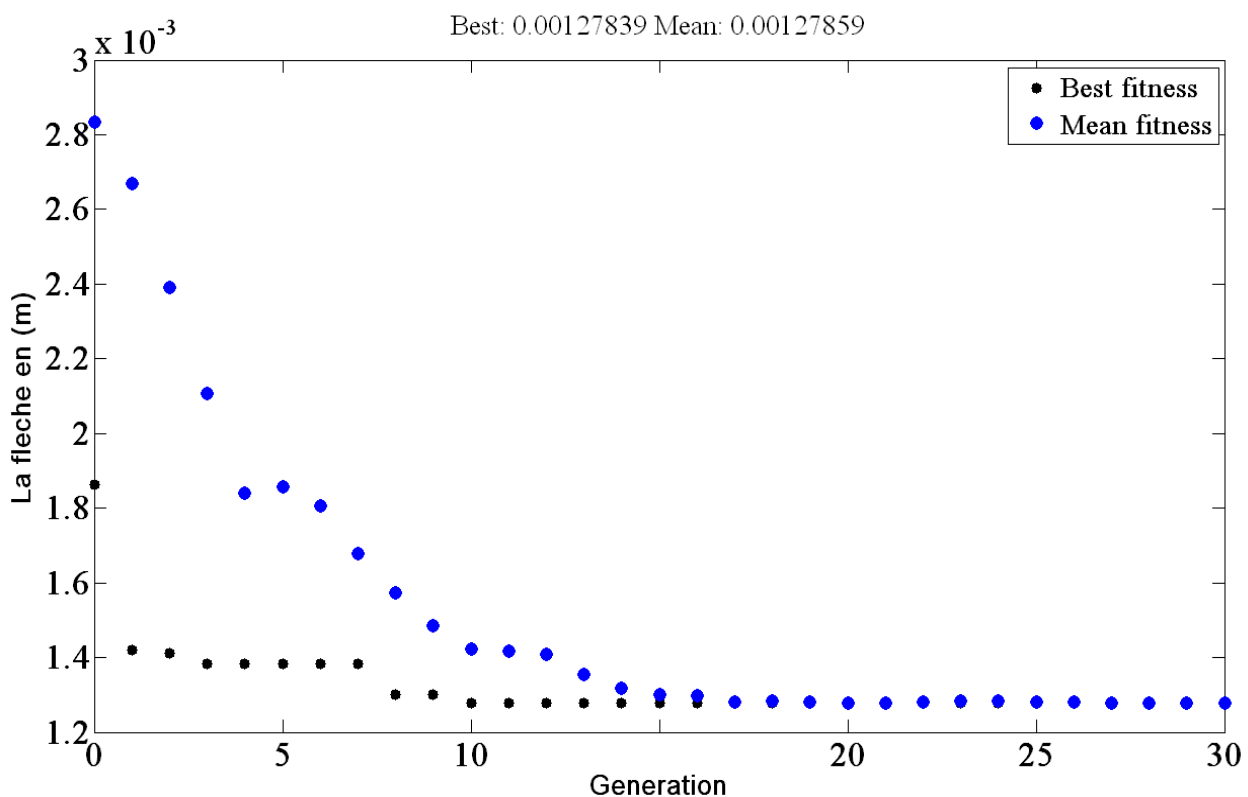


Figure V.17: Variation de la flèche de poutre en Acier en flexion 3 points renforcé par 2 couches carbone-époxyde durant 30 générations.

La flèche commence à diminuer, signifiant l'augmentation de la performance des enfants par rapport aux parents durant les 17 générations où l'algorithme génétique trouve la valeur minimale optimale pour un empilement de $[0^\circ, 0^\circ]$. A partir la 18^{ème} génération la valeur de la flèche se stabilise et prenant des valeurs constante (1.27839 mm).

Le changement de la nature du matériau de renforcement vers le verre-époxyde et l'application de la méthode des algorithmes génétiques

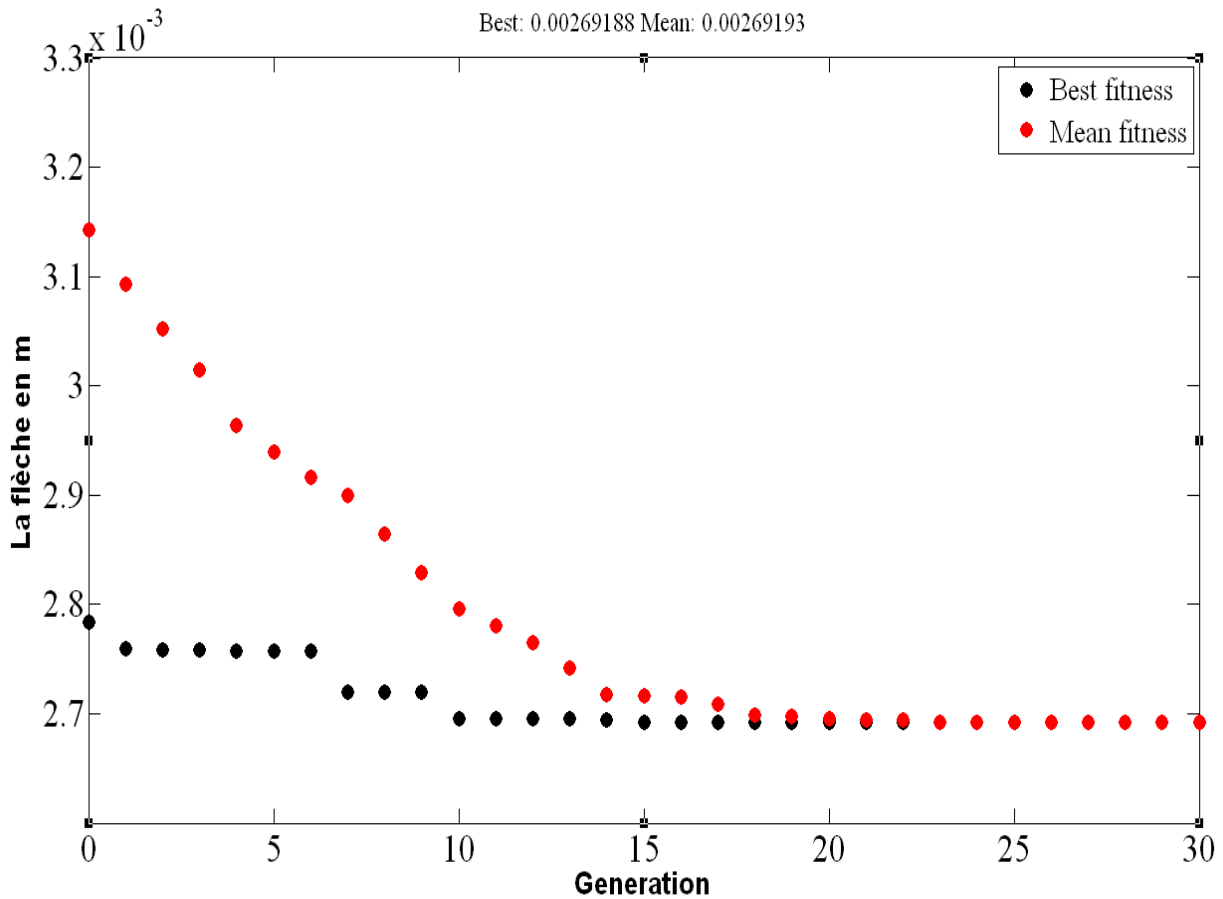


Figure V.18: Variation de la flèche de poutre en Acier en flexion 3 points renforcé par 2 couches verre-époxyde durant 30 générations.

La Figure V.18 montre que la flèche atteint sa valeur minimale à la 22^{ème} génération (figure V.18), pour un empilement de $[-0^\circ, -0^\circ]$. A partir la 23^{ème} génération, l'évolution devient constante.

VI.7-Optimisation de la flèche de poutre en Aluminium chargées en flexion trois points à différents matériaux de renforcement :

De la même façon que précédemment, on procède à l'optimisation par une minimisation de la flèche de poutre aluminium renforcé par différents matériaux.

La figure suivante présente la flèche de la poutre Aluminium à renforcement carbone-époxyde.

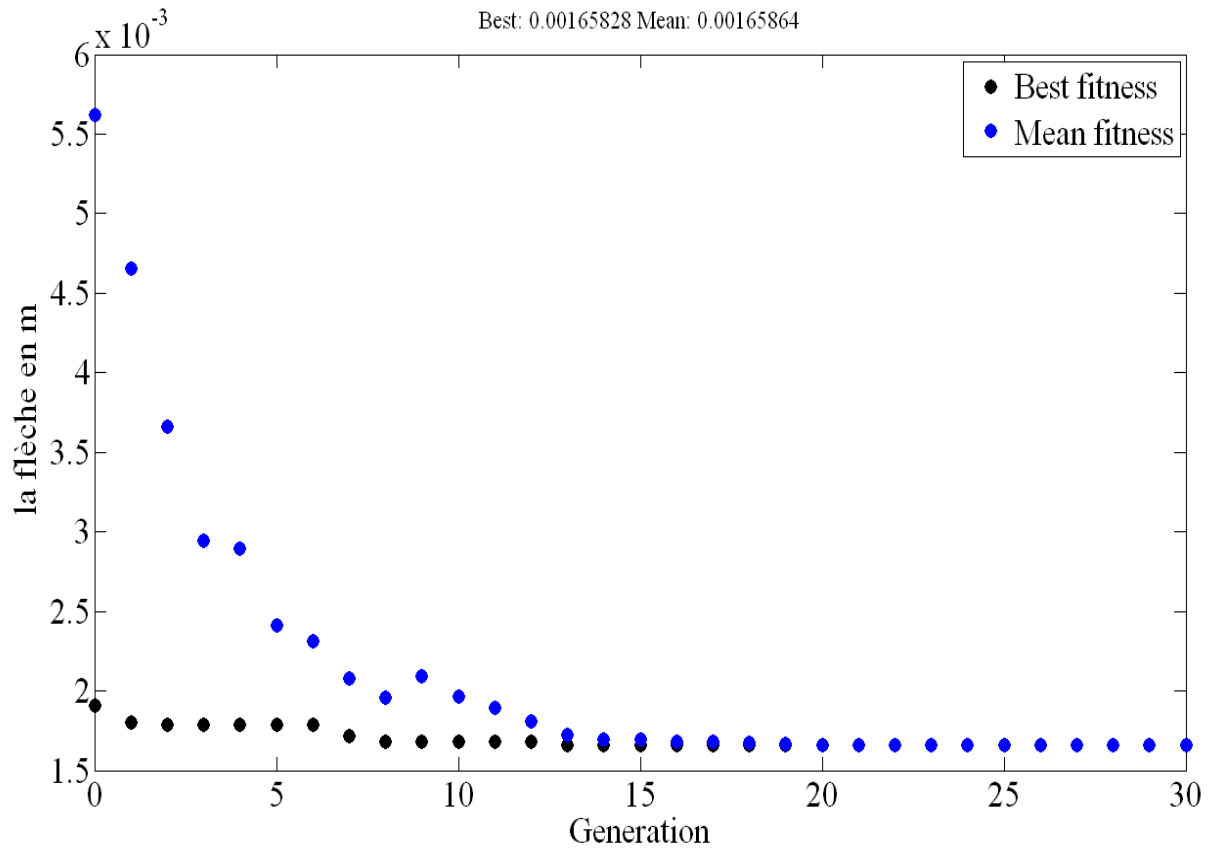


Figure V.19: Variation de la flèche de poutre en Aluminium en flexion 3 points renforcé par 2 couches carbone-époxyde durant 30 générations.

Les résultats obtenus pendant 30 générations montrent que la flèche prend une valeur minimale à la 18^{ème} génération à empilement $[0^\circ, 0^\circ]$. En outre, on remarque que la flèche prend des valeurs stables.

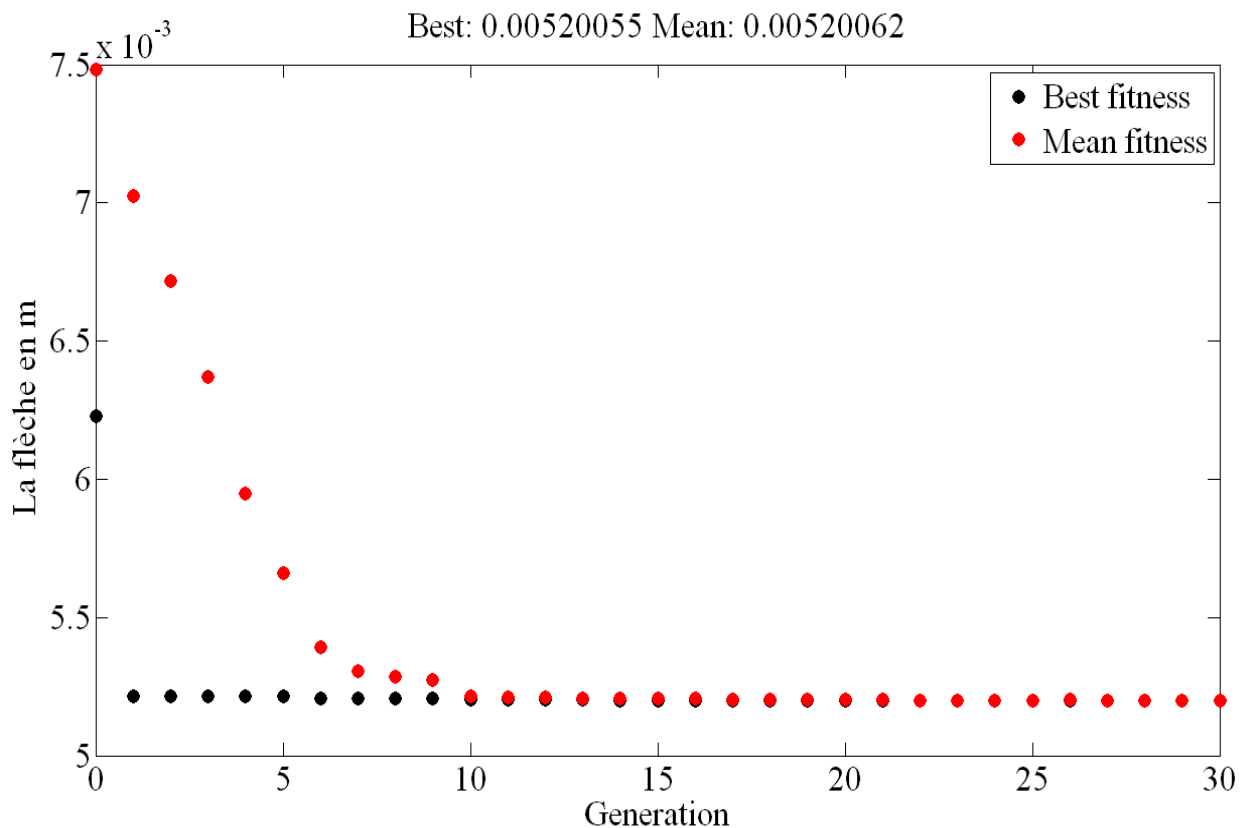


Figure V.20: Variation de la flèche de poutre en Aluminium en flexion 3 points renforcé par 2 couches verre-époxyde durant 30 générations.

Dans le cas de renforcement verre-époxyde la figure V.20 montre que la flèche atteint sa valeur minimal vers la 11^{ème} génération a empilement de $[-0^{\circ},0^{\circ}]$. A partir la 12^{ème} génération, l'évolution devient constant.

V.8-Conclusion :

Dans la première partie de ce chapitre on a développé une méthode analytique basée sur la théorie des stratifiés pour calculer la flèche de flexion des structure métallique renforcer par différent matériaux composite a des orientation des fibres déférents .à partir de ses résultat en peut déduire que pour l'orientation des fibres a 0° les renforcement en carbone-époxyde pour les deux matériaux (Acier , Aluminium) se caractérise par une performance élevée et faible résistance du verre-époxyde influant sur la performance de toute la structure métallique.

Les séquences d'empilements de renforcement $[0^{\circ},0^{\circ}]$, $[0^{\circ},45^{\circ}]$, $[0^{\circ},90^{\circ}]$.confirme la haute résistance de carbone époxyde sur la minimisation de la flèche des poutres, ce ci

favorise l'utilisation du carbone-époxyde comme matériaux de renforcement des poutres en Aluminium chargé en flexion 3 points.

Dans les empilements $[0^\circ, 45^\circ]$, $[0^\circ, 90^\circ]$, la nature du matériau des renforcements n'a pas d'effet sur la résistance des poutres en Acier chargé en flexion et conduit les deux matériaux à des comportements similaires avec des longueur différent des poutres.

Les résultats de l'optimisation par l'utilisation d'une méthode analytique, et l'amélioration de la performance de la structure métallique en modes de flexion 3 points renforcé à différents matériaux composite, par l'application d'une méthode probabiliste basée sur les principes des algorithmes génétiques sont acceptables. Ils ont confirmés le rôle de la fibre de carbone dans l'amélioration de la flèche minimale en flexion trois points de la structure métallique.

Conclusion générale

Le sujet de renforcement on utilisant des matériaux composite à fait l'objet d'une recherche extensive durant les dernières décennies.

Grace a leurs caractéristiques mécanique et physico- chimique, les matériaux composite se sont taillé une place importante, de nos jours le collage en matériaux composite est l'une des méthodes de réparation et de renforcement les plus employées.

Le choix de renforcement en matériaux composites à fibres de verre, carbone à matrice époxyde est du aux propriétés mécanique spécifiques largement supérieures à celle des matériaux classique et constituent la source de la résistance a la rupture de tout structure.

Dans le cadre d'un problème d'optimisation de la flèche d'une structure métallique soumise a la flexion 3 points, nous considérons que les dimensions des structures (épaisseurs, largeur de la poutre) sont constantes et nous nous intéressons surtout à l'amélioration des performances des fibres dans le matériau composite constituent le renforcement pour obtenir des flèches optimales.

L'objectif principal de notre travail est d'optimiser par les algorithmes génétiques les flèches par différents matériaux composite stratifié.

D'après les résultats présenté on relève que la résistance à la flèche de la structure métallique est favorise par l'emploi du carbone-époxyde comme matériau de renforcement.

L'utilisation du deux couches de renforcement à différents orientation des fibres $[0^\circ, 0^\circ]$, $[0^\circ, 45^\circ]$, $[0^\circ, 90^\circ]$ montre que pour l'empilement $[0^\circ, 0^\circ]$,sur la poutre en acier, La flèche diminue de 38% par rapport à celle d'une seul couche à orientation égale 0° du renfort carbone-époxyde et de 16% par rapport au verre époxyde ,pour la poutre en aluminium le changement et de 49%en carbone-époxyde et 41% de verre-époxyde.

Le changement de l'orientation des fibres à $[0^\circ, 45^\circ]$, $[0^\circ, 90^\circ]$ n'influe pas sur la flèche des poutres, car aucun changement de la flèche n'est remarqué.

Un programme de conception par algorithme génétique à été établi pour optimiser la flèche de ces matériaux .l'algorithme génétique implémenté repose sur l'utilisation des operateurs génétiques simples, à savoir la sélection le croisement à un point et la mutation simple.

CONCLUSION GENERALE

Les résultats de l'algorithme génétique sont obtenus à partir d'une population de 30 individus pour 30 générations.

Les résultats obtenus par l'application de l'algorithme génétique confirment les résultats trouvés par l'utilisation d'une méthode analytique (mathématique).

Références Bibliographiques

- [1] **M. BOUKHEZAR** : réhabilitation et renforcement des poutres au moyen des matériaux composites, Mémoire de magister. Université Mentouri, Constantine (2009).
- [2] **PATRICE POULIOTE** :Abaques pour le dimensionnement du renforcement externe en matériaux composites de poutres en béton armé. Mémoire de M.Sc.A, Université de Sherbrooke (2001).
- [3] **MCKENNA, J.K. et ERKI, M.-A.** Strengthening of Reinforced Concrete Flexural Members Using Extremely Applied Steel Plates and Fiber Composite Sheets — a Survey, Canadian Journal of Civil Engineering, 21, 16-24. (1994).
- [4] **MEIER, U.** Carbon Fiber-Reinforced Polymers: Modern Materials in Bridge Engineering, Structural Engineering International, 2, 7-12. (1992).
- [5] **BOUROUIS .F** , " optimisation de la rupture et de l'endommagement de différents matériaux sandwichs", Thèse de Doctorat ,Université Constantine 1,(2013).
- [6] **GAO, B., KIM, J.K. ET LEUNG, C.K.Y.** Experimental study on RC beams with FRP strips bonded with rubber modified resins, Composites Science and Technology 64, p.2557–2564. (2004)
- [7] **SAADATMANESH, H. et EHSANI, M.** RC Beams Strengthened with GFRP Plates. I: Experimental Study, Journal of Structural Engineering, 117(11), 3417-3433. (1991).
- [8] **N.ATTARI**, Réhabilitation et Renforcement des Poutres et Nœuds en Béton Armé par des Matériaux Composites. Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Sud, France. (2010).
- [9] **ARDLIINI, M. et NANNI, A.** Behavior of Precracked RC Beams Strengthened with Carbon FRP Sheets, Journal of Composites for Construction, 1(2), 63-70. (1997).
- [10] **M'BAZAA, I** .Renforcement en flexion de poutres en béton armé à l'aide de lamelles matériaux composites: optimisation de la longueur des lamelles, Mémoire de maîtrise ès sciences appliquées, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, 139p. (1995).
- [11] **J.D. MATHIAS X. BALANDRAUD M. GREDIAC** Optimisation d'un patch composite pour le renforcement d'une voilure. LAMI (Laboratoire de Mécanique et Ingénieries),IFMA/UBP Campus des Cézeaux BP 26563175 AUBIERE Cedex
- [12] **MISSIMOUN, M.** Renforcement en flexion de poutres en béton armé à l'aide de matériaux composites : optimisation de l'orientation des fibres, Mémoire de maîtrise ès sciences appliquées, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, 160p. (1995).

- [13] **YLVAIN CHATAIGNER, ARNAUD GAGNON, MARC QUIERTANT, KARIM BENZARTI, CHRISTOPHE AUBAGNAC** Renforcement par composites collées des structures métalliques de génie civil : durabilité du transfert des efforts à l'interface composite/métal .Revue des composites et des matériaux avancés, 2012, 22 (2), pp 155-170. <10.3166/rcma.22.155-170>. <hal-00852036> .
- [14] **BIZINDAVYI, L. et NEALE, K. W.** Transfer Lengths and Bond Strengths for Composites Bonded to Concrete, Journal of Composites for Construction, 3(4), 153-160. (1999).
- [15] **JEAN-DENIS MATHIAS** Etude du comportement mécanique de patches composites utilisés pour le renforcement de structures métalliques aéronautiques. Materials. Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand II, French. <tel-00159157> (2005).
- [16] **SPADEA, G., SWAMY et N. BENCARDINO, F.** Ductility or Deformability? Reinforced Concrete Beams Strengthened with Externally Bonded Carbon Fiber Reinforced Polymer Atti del convegno "FRPRCS-4", Baltimore, Maryland, U.S.A., 31 Oct.-5 Nov., 1999, Charles W. Dolan, Sami H. Rizkalla, Antonio Nanni:Baltimore, 1999, Vol. Selected p, pp. 171-180.
- [17] **GLOSSAIRE DES MATERIAUX COMPOSITES - CARMA** -Actualisation décembre 2004
- [18] **Hachette. C.**, "Sur la complémentarité des approches expérimentales et numériques pour la modélisation des mécanismes d'endommagement des composites stratifiés", Thèse de Doctorat de l'Université de Paris VI, (2005).
- [19] **FRANÇOIS-XAVIER IRISARRI** , Stratégies de calcul pour l'optimisation multiobjectif des structures composites. Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier - Toulouse III, (2009).
- [20] **Vizueté, J.M.** "Techniques et systèmes de renfort des structures en béton", Proceedings of The Third ST Workshop, Session IV : Technology 2, Chamonix, 25-28 January 2000, edited by Laeger, H. and Prodon, S., pp.151-158,(2000).
- [21] **Melle Nadia KOUIDER.** Analyse d'éléments de structure métallique à réhabiliter. Mémoire de Magister, Université Badji Mokhtar-Annaba,(2010).
- [22] **MAHDI KARIMA** «L'optimisation multi objectif et l'informatique quantique » Mémoire de Magister, Université Constantine, (2003)

- [23] **OMESSAAD HAJJI**, «contribution au développement de méthodes d'optimisation stochastiques. Application a la conception des dispositifs électrotechniques». Thèse de Doctorat, Université de sciences et technologies de Lille, (2003).
- [24] **NAIMA ZERARI** « les algorithmes génétiques en maintenance ». Mémoire de Magister, Université el Hadj Lakhder Batna, (2006)
- [25] **SIDI MOHAMED DOURI, SOUAD ELBERNOUSSI, HALIMA LAKHBAB** universite mohammed v, rabat. «Cours des Méthodes de Résolution Exactes Heuristiques et Métaheuristiques ».
- [26] **CH. DARWIN**, "The origin of species by means of natural selection" John Marray London, 1st edition (1859).
- [27] **JEAN MARC A, NICOLAS D**, " Algorithmes génétiques", Rapport de Recherche, Ecole Nationale de l'Aviation Civile, Toulouse, (2005).
- [28] **N.BENAHMED**, "Optimisation de réseaux de neurones pour la reconnaissance de chiffres manuscrits isolés: sélection et pondération des primitives par algorithme génétique». Mémoire de la maîtrise en génie de la production automatisée, Université du Québec ,(2002).
- [29] **J.PHILIPPERENNARD**, "Genetic Algorithm Viewer: Démonstration d'un algorithme génétique", www.rennad.org/alif, (Avril 2000).
- [30] **SELVARAY RAMKUMAR**, "Algorithmes génétiques", Rapport, Université Libre de Bruxelles, Belgique, 26 avril 2007.
- [31] **LAYEB A**, "Introduction aux métaheuristiques", Formations Académiques, 2009.
Site: lmdacad.org/download/courses/m2/chapitre5_layeb_ROA.pdf,
- [32] **NICOLAS DURAND**, "Algorithmes génétiques et autres outils d'optimisation appliqués à la gestion de trafic aérien", Rapport de Recherche, Ecole Nationale de l'Aviation Civile, Toulouse, (2004).
- [33] **LAYEB A**, "Introduction aux métaheuristiques", Formations Académiques, 2009.Site: lmdacad.org/download/courses/m2/chapitre5_layeb_ROA.pdf,
- [34] **TERKI AMEL**, "Analyse des performances des algorithmes génétiques utilisant différentes techniques d'évolution de la population".mémoire de magister, Université Mentouri Constantine .

- [35] **T.VALLE ET M.YILDIZOGLU** "Présentation des algorithmes génétiques et de leurs applications en économie", Université de Nantes et Université Montesquieu Bordeaux IV (2001).
- [36] **Mehdi Hajianmalekli and Mohammed S Qatu.** Mechanics of composite Beam Mississippi State University USA. (2011).