

جامعة محمد الشريف مساعديّة - سوق اهراس
Université Mohamed-Chérif Messaadia Souk Ahras
Faculté des Sciences et Technologie
Département Génie Mécanique



Polycopié de cours

Fiabilité

2016/2017



3^{ème} Année Licence
Maintenance Industrielle

Par Y. SAHRAOUI
Maître de conférences classe B
Département de génie mécanique

SOMMAIRE

CHAPITRE I: Fiabilité opérationnelle	1
I.1. Introduction.....	1
I.2. Définition de la fiabilité adoptée par les spécialistes	2
I.3. Fiabilité opérationnelle et fiabilité prévisionnelle	2
I.4. Domaine d'utilisation.....	3
I.5. Le classement des données de retour d'expérience	3
I.5.1. Le classement.....	3
I.5.2. La méthode de Pareto	4
I.6. Taux de défaillance et courbe en baignoire	7
I.6.1. Détermination expérimentale de la courbe en baignoire:	9
I.6.2. Calcul du taux de défaillance instantané.....	12
I.7. Expressions mathématiques de la fiabilité.....	13
I.7.1. Fonction de répartition.....	13
I.7.2. Fonction de survie ou Fiabilité	13
I.7.3. Taux de défaillance.....	14
I.7.4. Moyenne des temps de bon fonctionnement (MTBF)	14
Chapitre II: Méthodes d'évaluation de la fiabilité	15
II.1. Introduction	15
II.2. Approches statistiques	15
II.2.1. Les lois de probabilité utilisées en fiabilité	16
II.3. Approche physique	29
II.3.1. Approche de la fiabilité des structures (Méthodes résistance-contrainte).....	29
Chapitre III: Fiabilité des systèmes	33
III.1. Introduction	33
III.2. Système série.....	33
III.3. Système parallèle.....	33
III.3.1. Notion de redondance	34
III.3.2. Configuration redondance r/n	34
III.4. Configuration mixte	35
III.4.1. Configuration série-parallèle.....	35
III.4.2. Configuration parallèle-série.....	36
III.5. Configuration quelconque	36
Chapitre IV: Maintenabilité des systèmes	41

IV.1. Introduction.....	41
IV.2. Les critères de maintenabilité :	41
IV.3. Les indicateurs :	42
IV.3.1. Cycle de maintenance d'un équipement réparable.....	42
IV.4. Objectif de maintenabilité :	43
IV.5. Approche d'une étude de maintenabilité :	43
IV.5.1. Mise en évidence des éléments qui permettront d'accroître la maintenabilité :	44
IV.5.2. Diminution de la durée de détection des défaillances :	45
IV.5.3. Diminution de la durée du diagnostic :	45
IV.5.4. Diminution de la durée de réparation.....	45
IV.5.5. Diminution de la durée nécessaire au contrôle :	45
IV.6. Approche mathématique de la maintenabilité $M(t)$	45
IV.6.1. Comparaison Fiabilité-Maintenabilité	46
IV.6.2. Maintenabilité d'un système constitué de plusieurs composants	50
Chapitre V: Disponibilité des systèmes	52
V.1. Définition de la disponibilité $D(t)$	52
V.2. Les sortes de disponibilité	52
V.2.1. Disponibilité moyenne	52
V.2.2. Disponibilité intrinsèque	52
V.2.3. Disponibilité opérationnelle	53
V.2.4. disponibilité instantanée.....	53
V.2.5. disponibilité asymptotique	53
V.3.La logistique dans l'entreprise	54
V.3.1. Rôle de la fonction logistique	54
V.3.2. Logistique et stratégie de l'entreprise	56
V.3.3. logistique et gestion des flux.....	56
IV.4. Disponibilité d'un système constitué de plusieurs composants.....	56
IV.5. Aspect économique (Optimisation du coût total : de Maintenance et d'indisponibilité) ..	57
Chapitre VI: Sureté de fonctionnement (SdF).....	60
VI.1. Définition	60
VI.2. Outils de la sûreté de fonctionnement.....	60
VI.2.1. Arbres de défaillance	60
VI.2.2. Arbres des conséquences (d'événements).....	62

CHAPITRE I: Fiabilité opérationnelle

I.1. Introduction

Face à la dégradation du fonctionnement des systèmes industriels dans les secteurs de production continue (production d'énergie, complexe pétrochimique,...etc.), les opérations de maintenance visent à préserver un niveau de "fiabilité" acceptable tout au long de la durée de vie. La fiabilité est une discipline qui étudie les risques de défaillance d'un système, d'un dispositif ou d'un événement, si l'on peut dire, c'est la science des défaillances. Au sens commun, la notion de la fiabilité correspond à la confiance de l'utilisateur dans l'appareil qu'il utilise. Au sens large, cette discipline peut couvrir notamment les domaines d'activités suivants :

- Détermination des spécifications de fiabilité de matériel ;
- Études prévisionnelles de fiabilité et de sécurité ;
- Retour des informations d'exploitation (collecte des données); essai de fiabilité ;
- la fiabilité opérationnelle.

La politique de maintenance est ensuite indispensable pour diminuer l'écart entre l'objectif "fiabilité prévisionnelle" et l'observation "Fiabilité opérationnelle" (Fig.1.1), au prix de coûts supplémentaires qui sont principalement dus aux pertes d'exploitation pendant la durée d'arrêt du système, lors d'un remplacement correctif ou préventif. L'objectif de la politique de maintenance est donc de rechercher le meilleur compromis entre des exigences contradictoires de coût et de fiabilité.

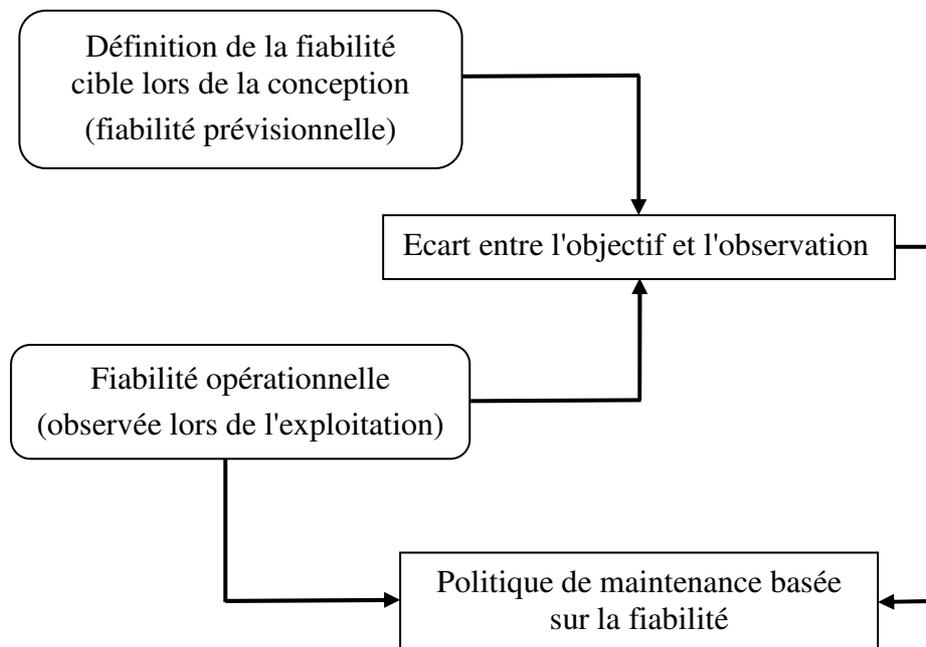


Fig.1. 1. Objectif de la maintenance

L'un des problèmes économiques qui peut être résolu par la connaissance de la fiabilité opérationnelle est la détermination de l'instant le plus propice pour effectuer une maintenance préventive, voir un remplacement. En plus, il sera nécessaire de réaliser des études complémentaires dans les domaines de la maintenabilité, de la sécurité et des calculs probabilistes de la disponibilité, pour envisager une étude de sûreté de fonctionnement exhaustive.

I.2. Définition de la fiabilité adoptée par les spécialistes

"La fiabilité est l'aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise, dans des conditions données, pendant une durée donnée". Elle est exprimée par la probabilité que ce matériel fonctionne sans défaillance pendant un temps donné (t), dans des conditions définies de manière précise. La fiabilité est une fonction du temps représentée par $R(t)=\text{Reliability}$. La fiabilité n'a de signification que pour une durée d'utilisation donnée.

I.3. Fiabilité opérationnelle et fiabilité prévisionnelle

La "fiabilité prévisionnelle" est la fiabilité cible en conception (avant le fonctionnement). Elle est estimée soit de façon théorique (calculs de durée de vie, modélisation, banques de données) soit de façon expérimentale (essais). De ce fait, les études de fiabilité prévisionnelle consiste à prévoir la fiabilité en phase de conception. Pour estimer cette fiabilité, il convient de synthétiser et de fusionner les informations de diverses origines: essais de fiabilité, retour d'expérience du passé, avis d'experts, calculs issus de modèles physiques. La figure 1.2, montre bien la difficulté d'estimer la fiabilité prévisionnelle.

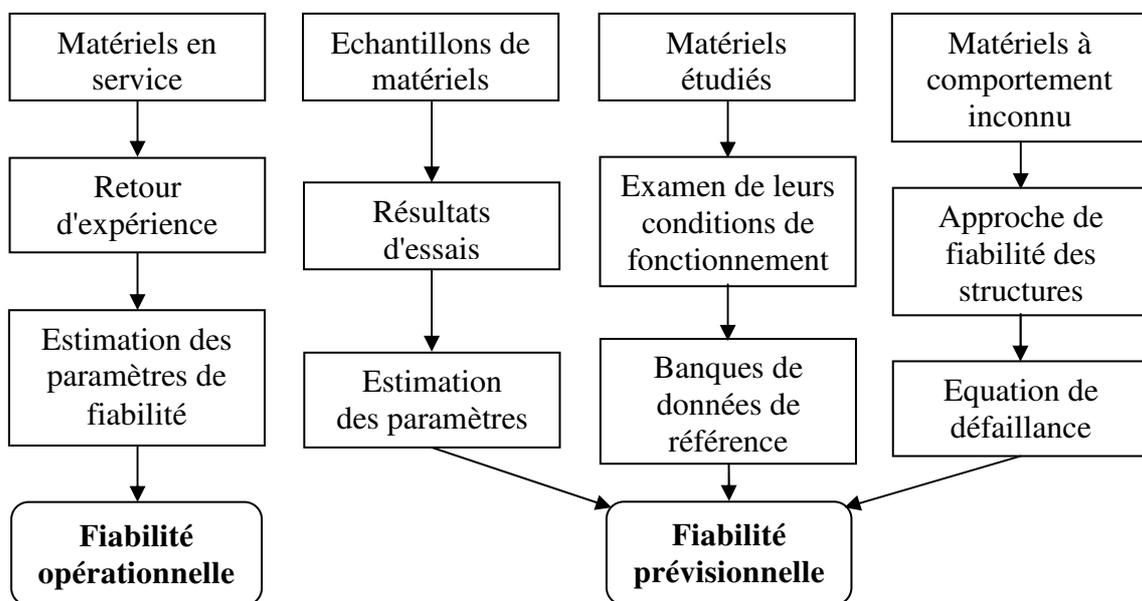


Fig.1.2. *Fiabilité opérationnelle et fiabilité prévisionnelle*

La "Fiabilité opérationnelle" C'est la fiabilité observée sur des systèmes ou des matériels en exploitation normale. Elle dépend des conditions réelles d'utilisation, de l'ambiance entourant les produits, de l'influence du pers+onnel de maintenance et d'exploitation. Elle est obtenue à

partir de données du retour d'expérience. Le but des études de fiabilité opérationnelle est de corriger les défauts de conception.

I.4. Domaine d'utilisation

La fiabilité n'est pas réservée uniquement aux industries de pointe. Des industries aéronautiques, nucléaires, spatiales aux industries de l'automobile, de l'électroménager, du jouet, tout fabricant doit tenir compte de la fiabilité de son produit, de la conception à son exploitation. Pour étudier la fiabilité opérationnelle d'un équipement, il faut savoir analyser les défaillances rencontrées, c'est à dire avoir un retour d'expérience complet et fidèle permettant de trouver la cause première de la défaillance. Il faut être capable de juger si la défaillance est due à la fiabilité propre du composant ou si elle provient d'un non-respect des conditions d'utilisation ou de maintenance, ou d'une erreur humaine. La fiabilité dans l'industrie est une étude délicate. Dans l'industrie, les conditions d'exploitation changent généralement dans le temps et la notion de fonctionnement correct augmente en exigence. Ces changements ne sont pas toujours pris en compte et entraînent des difficultés d'exploitation. De plus, le remplacement de certaines pièces, suite à leurs défaillance ou à une maintenance préventive, change la structure de l'échantillon étudié et donc les résultats des études.

I.5. Le classement des données de retour d'expérience

I.5.1. Le classement

Le Retour d'Expérience (REX) est considéré comme une composante indispensable de toute démarche d'amélioration continue en matière de sûreté de fonctionnement des équipements industriels. Le REX permet d'enregistrer les défaillances, et de restituer la chronologie des défaillances et des opérations de maintenance.

La variable aléatoire est le temps de défaillance. On peut définir les fréquences suivantes:

- la fréquence relative $\frac{n_i}{N} = \frac{\text{effectif de la classe } (t_{i-1}, t_i)}{N}$
- la fréquence cumulée $F_i = \frac{\sum n_i}{N}$

Où i est le rang de la $i^{\text{ème}}$ défaillance.

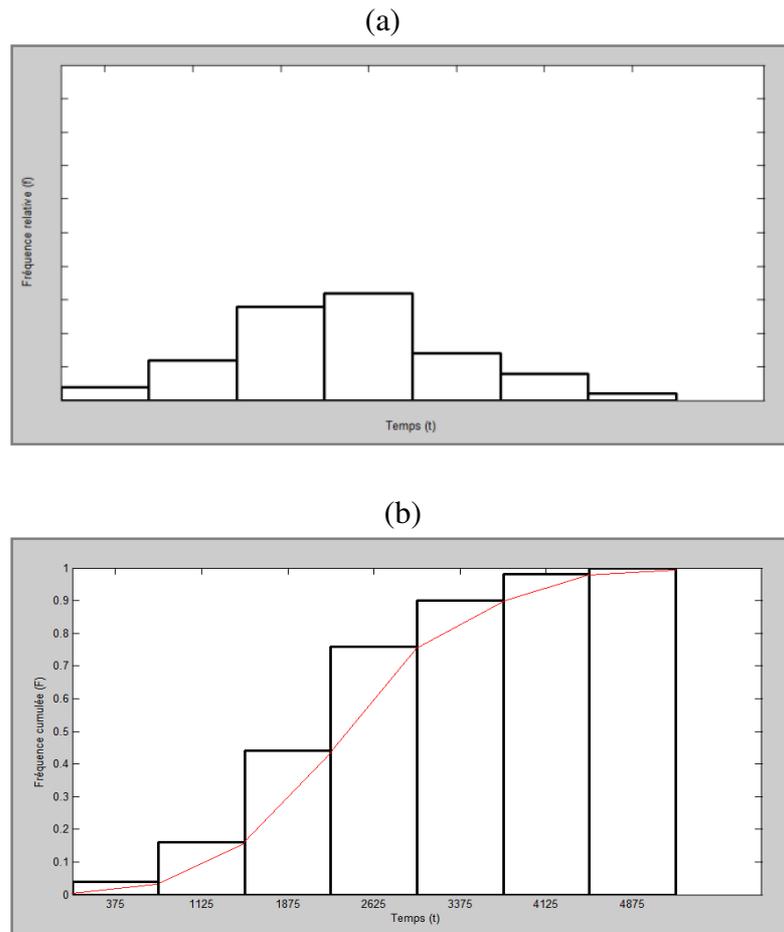


Fig.1.3. Fréquence relative et cumulée

A partir des fréquences relatives et cumulées en traçant:

- l'histogramme (fig.1.3.a), dont la ligne polygonale passant par les centres de classes donne une allure de la distribution des fréquences.
- le diagramme cumulé (fig.1.3.b) se trace à partir des bornes supérieures des classes et donne l'allure de la fonction de répartition, le diagramme inverse des temps de bon fonctionnement donne l'allure de la courbe de fiabilité.

I.5.2. La méthode de Pareto

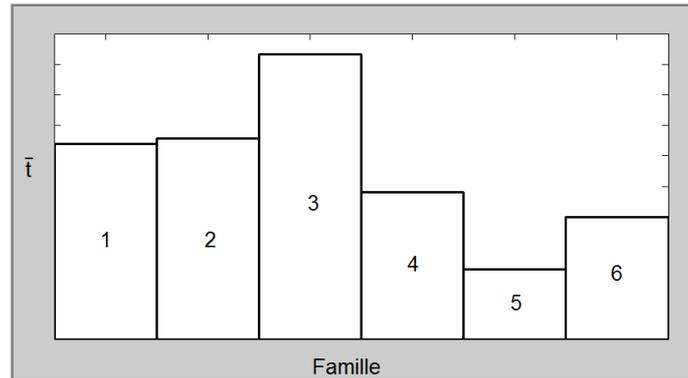
Le diagramme de Pareto est un moyen simple pour classer les phénomènes par ordre d'importance. C'est la première méthode à utiliser lorsque l'on souhaite exploiter un retour d'expérience. Elle consiste à tracer trois graphes (fig.1.4):

- *Le graphe 1* en fonction du nombre de défaillances enregistrées (n) par famille, c'est un indicateur qui caractérise la fiabilité et il oriente vers l'amélioration de la fiabilité des sous-ensembles pénalisants.
- *Le graphe 2* en fonction de la moyenne des durées d'intervention consécutives à ces défaillances (\bar{t}) par famille, c'est un indicateur qui caractérise la maintenabilité et il

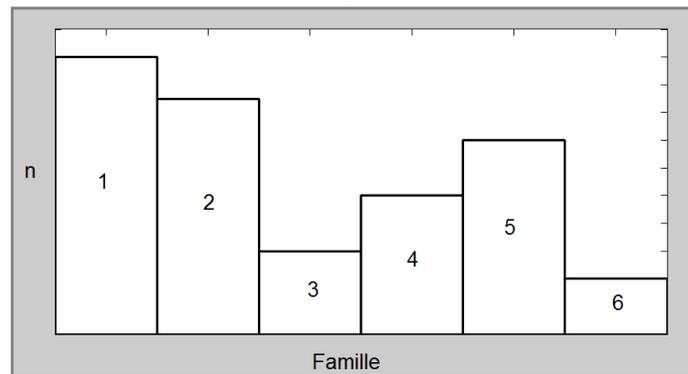
oriente vers l'amélioration de l'aptitude à la maintenance, si cet indicateur s'avère critique.

- *Le graphe 3* en fonction du produit des deux paramètres précédents ($n\bar{t}$), c'est un indicateur qui caractérise la disponibilité (c'est une variable "risque" puisque c'est le produit d'une fréquence par une gravité) et il permet de hiérarchiser les familles en fonction de leur criticité en disponibilité (coût en indisponibilité). Ce qui rend cet outil exploitable pour dégager des priorités d'action sur des bases de criticité économique.

(Graphe 1)



(Graphe 2)



(Graphe 3)

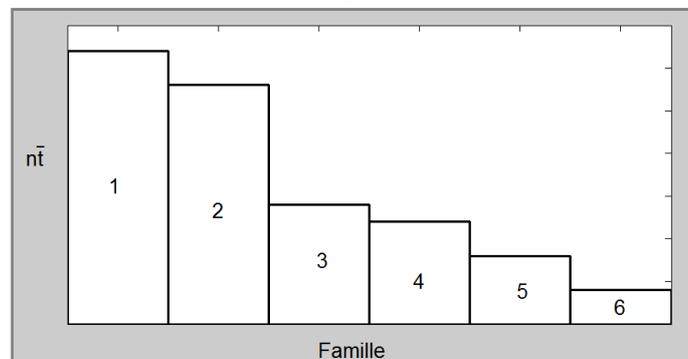


Fig.1.4. La méthode de Pareto. Les indicateurs de sûreté de fonctionnement

Le diagramme Pareto et son utilisation sont aussi connus sous le nom de "règle des 20/80" ou méthode ABC, consiste à classer, à partir du retour d'expérience, les phénomènes par ordre d'importance.

Au début du 20^e siècle, Vilfredo Pareto, économiste et sociologue italien, est le premier qui a représenté graphiquement la répartition des richesses et montrer que 20% de la population italienne détenait 80% de la richesse totale. Le diagramme de Pareto est un histogramme dont les plus grandes colonnes sont conventionnellement à gauche et vont décroissant vers la droite. Une ligne de cumul indique l'importance relative des colonnes. La popularité des diagrammes de Pareto provient d'une part parce que de nombreux phénomènes observés obéissent à la loi des 20/80, et que d'autre part si 20% des causes produisent 80% des effets, il suffit de travailler sur ces 20% là pour influencer fortement le phénomène. En ce sens, le diagramme de Pareto est un outil d'analyse et d'aide à la décision.

I.5.2.1. Représentation graphique

Pareto propose une classification en trois (3) zones: A, B et C d'où l'appellation de "courbe ABC" (fig.1.5)

- Zone A : 20% du nombre des éléments représentent 80% du critère étudié.
- Zone B : les 30% d'éléments en plus représentent 15% en plus du critère étudié.
- Zone C : Les 50% d'élément restants ne représentent plus que 5% du critère étudié.

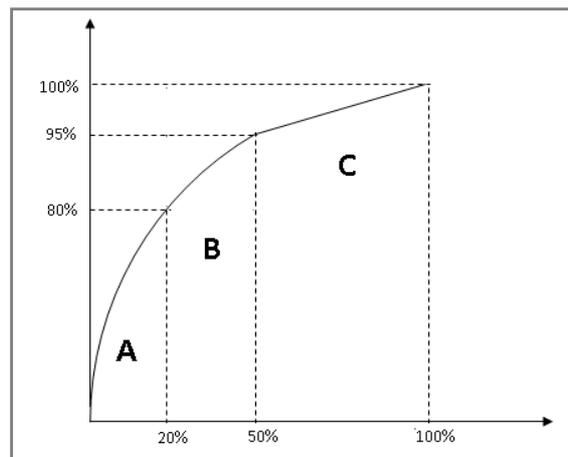


Fig.1.5. Présentation graphique du diagramme Pareto (ou règle 20/80)

Exemple 1.1 :

Le responsable maintenance du transport d'hydrocarbure par canalisations met à votre disposition le tableau des causes de défaillances des pipelines suivant leurs fréquences. Faites une classification ABC des défaillances.

Cet exemple, construit selon la méthode ci-dessus, fait apparaître que les 3 principales causes de défaillances représentent 80% de tous les causes. Or $3/15 = 0.20$, soit 20% des causes qui accumulent 80% des effets.

Tableau 1.1. Causes de défaillances des pipelines suivant leurs fréquences

Code	Causes de défaillances	Fréquences
X1	fissure	5
X2	défaut de Corrosion	35
X3	mauvaise installation	3
X4	interférence de tierce partie	80
X5	matériau non conforme	1
X6	problème de résistance	2
X7	inclusion	1
X8	défaut cristallin	1
X9	erreur de maintenance	5
X10	qualité de l'opérateur	3
X11	défaut d'organisation	3
X12	fatigue	4
X13	défaut de soudure	18
X14	défaut du chanfreinage	2
X15	Eraflure	2

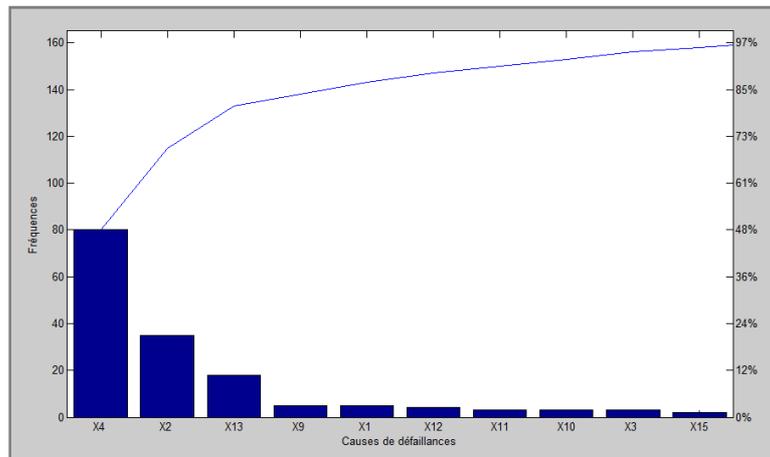


Fig.1.6. Courbe ABC des causes de défaillances des pipelines

I.6. Taux de défaillance et courbe en baignoire

Le taux de défaillance, noté $\lambda(t)$, caractérise la vitesse de variation de la fiabilité au cours du temps, c'est un indicateur de fiabilité qui représente:

- soit une proportion de survivants à l'instant t, tirée d'un échantillon (i.e. la fonction $\lambda(t)$).
- soit un taux supposé constant de défaillance par unité d'œuvre (heure, nombre de cycles,...) exprimé sous la forme générale:

$$\frac{\text{Nombre de défaillances}}{\text{Durée d'usage}}$$

Il s'obtient expérimentalement soit à partir d'essais de fiabilité, soit à partir des relevés en cours d'exploitation. Le taux d'avarie d'un élément est le résultat d'une interaction entre la résistance propre de cet élément (conception, fabrication) et le spectre des contraintes de fonctionnement.

La variation du taux de défaillance $\lambda(t)$ d'un équipement le long de sa durée de vie est représenté par une courbe connue a priori, sous le nom "courbe en baignoire", comme le montrent les figures (1.7) et (1.8). Trois grandes périodes peuvent être distinguées:

1. **la période de jeunesse (ou déverminage, rodage,.....):** C'est la phase de défaillance précoce où le taux de défaillance diminue avec le temps. Les pannes sont dues à une mauvaise fabrication et à un contrôle de qualité insuffisant.
2. **la période de maturité (ou vie utile,.....):** C'est la phase de défaillance hasardeuse, le taux de défaillance reste approximativement constant (*matériel électronique*) ou légèrement croissant (*matériel mécanique*) suivant le type de matériel. Les pannes surviennent de façon aléatoire imprévisible, elles sont franches et subites.
3. **la période de vieillissement (ou dégradation, obsolescence,...):** Cette phase généralement visible et entraîne une dégradation accélérée, où le taux de défaillance est très croissant. Les pannes sont dues aux phénomènes de fatigue, d'usure, de corrosion,....etc., donc on parle de période de vieillesse du matériel. Il est alors déclassé, puis rebuté ou parfois reconstruit.

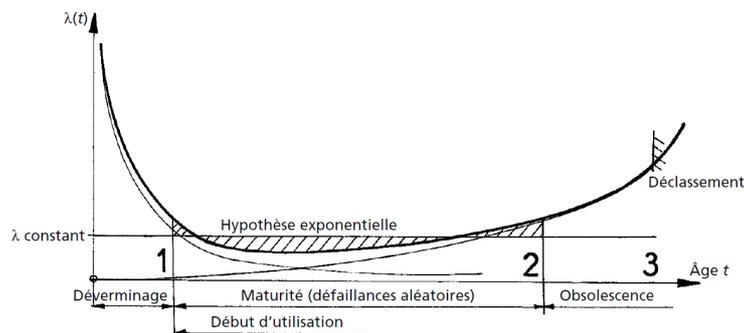


Fig.1.7. Domaine électronique

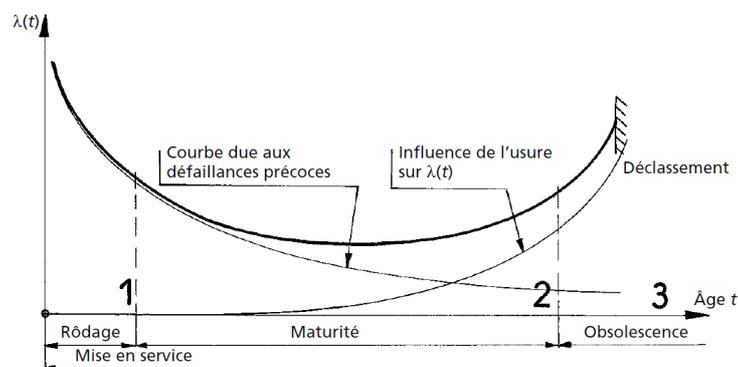


Fig.1.8. Domaine mécanique

Dans la pratique, on retrouvera plusieurs types de "courbes en baignoire" selon le type de matériel. Par exemple, dans le domaine électronique (Fig.1.7), les électroniciens s'intéressent principalement aux périodes 1 de déverminage et 2 de maturité. Par contre, dans le domaine mécanique (Fig.1.8), les mécaniciens sont préoccupés par la période 3, où l'on constate des phénomènes de dégradation: fatigue, usure,.....,etc.; une maintenance préventive doit être mise en place, afin de minimiser la probabilité de défaillance et de tenter de maîtriser le vieillissement des équipements.

Idem pour le "taux de mortalité" d'une vie humaine, il suit cette courbe en baignoire: mortalité infantile et la décroissance de taux des maladies, ensuite la maturité avec les maladies aléatoires et enfin taux croissant avec le vieillissement.

I.6.1. Détermination expérimentale de la courbe en baignoire:

La détermination de façon empirique de la courbe en baignoire nécessite un nombre important de données sur toute la période de vie des matériels, c'est à dire avoir un retour d'expérience complet. Si ce n'est pas le cas, seule une partie de cette courbe sera montrer.

I.6.1.1. Méthode de l'actuariat :

Un actuariat permet de déterminer expérimentalement le taux de défaillance $\lambda(t)$ qui correspond à la probabilité d'avoir une défaillance dans les différents intervalles de temps constituant la vie du matériel étudié. Le taux de défaillance par tranche de temps $\lambda(t)$ est déterminée par la relation suivante:

$$\lambda(t) = \frac{n_i}{N(t_i) \cdot \Delta t_i}$$

Avec :

$n_i = N(t_i) - N(t_i + \Delta t_i)$: nombre de défaillants sur l'intervalle Δt_i

$N(t_i)$: nombre de survivants jusqu'à l'instant t_i (au début de la tranche de temps t_i)

$N(t_i + \Delta t_i)$: nombre de survivants à l'instant $t_i + \Delta t_i$

$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$: intervalle de temps observé

Lorsque les éléments défaillants sont remplacés et N_0 est le nombre initial de dispositifs, alors le taux de défaillance moyen $\lambda(t)$ sur l'intervalle Δt est :

$$\lambda(t) = \frac{n_i}{N_0 \cdot \Delta t_i}$$

Car le lot de dispositifs est constant, donc $N(t_i) = N_0$.

Exemple 1.2: Cas des éléments défectueux non remplacés

Nous avons étudié un lot de 50 électrovannes, soumises en continu à 10 impulsions/minute. À la 50^e heure, il en reste 35. À la 60^e heure, il en reste 29. Quel est le taux de défaillance sur cette classe, par heure et par impulsion?

$$\lambda(t) = \frac{n_i}{N(t_i) \cdot \Delta t_i} = \frac{N(t_i) - N(t_i + \Delta t_i)}{N(t_i) \cdot \Delta t_i} = \frac{35 - 29}{35 \cdot 10} = 17 \cdot 10^{-3} / \text{heure} = 2.86 \cdot 10^{-5} / \text{impulsion}$$

Exemple 1.3: Cas des éléments défectueux remplacés ou réparés

Reprenons les mêmes données de l'exemple précédent et supposons que les électrovannes défectueuses ont été remplacées. Quel est le taux moyen de défaillance ?

Dans ce cas, le taux moyen de défaillance $\lambda(t)$ serait:

$$\lambda(t) = \frac{n_i}{N_0 \cdot \Delta t_i} = \frac{6}{50 \cdot 10} = 12 \cdot 10^{-3} / \text{heure}$$

I.6.1.1.1. Les principales phases de la méthode de l'actuariat:

La synthèse de la méthode de l'actuariat est donnée ci-après:

- **Phase 1: Choix des classes**

La détermination du nombre de classe (r) qui dépend du nombre total de défaillance peut être faite par les règles :

$$r = \sqrt{\sum n_i} \text{ ou bien } r = 1 + 3.3 \log \sum n_i \text{ (règle de Sturges)}$$

RQ: Le nombre de classe doit être telle que la courbe ne soit pas trop déformée.

- **Phase 2: Tableau de recensement**

Pour chaque classe d'âge (1), on établit l'inventaire des machines en service (2), le cumul des heures de fonctionnement des machines survivantes (3), puis le recensement des défaillances sur la classe (4) (tableau 1.2).

Tableau 1.2: Exemple de tableau de recensement

1 Classe	2 Nombre d'équipements	3 Cumul des temps de fonctionnement	4 Nombre de défaillances	5 Taux moyen λ de défaillances
0-150 h
150-300 h
300-450 h	9	$9 \times 150 = 1\ 350$ h	11	$11/1\ 350 = 8,1 \times 10^{-3}$
450-600 h

▪ **Phase 3: Exploitation (la courbe en baignoire)**

Le tableau précédent permet de tracer l’histogramme des défaillances et de visualiser la courbe en baignoire des variations de $\lambda(t)$:

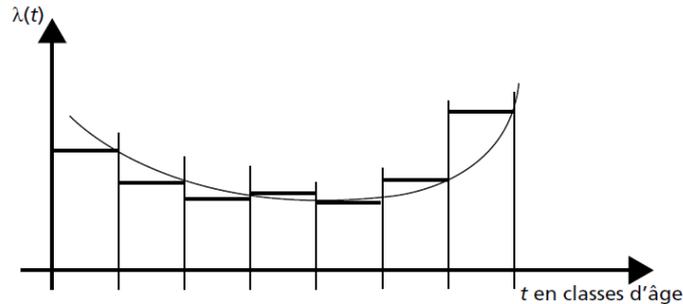


Fig. 1.9. Exploitation des données

Exemple 1.3 :

l'exemple suivant est donné pour l'estimation du taux de défaillance d'un équipement industriel. Trente cinq (35) défaillances ont été observées entre 0 et 6000 heures de fonctionnement.

On a 35 défaillances au bout de 6000 heures de fonctionnement. On choisit $r = 6$ classes de 1000 heures (règle de Sturges).

L'estimation du taux de défaillance et la présentation de la courbe en baignoire empirique de cet équipement sont donnés par le tableau 1.3 et la figure 1.10, respectivement.

Tableau 1.3: Estimation du taux de défaillance

Classe (en heures)	Centre de Classe (h)	Nombre de survivants	Cumul des temps de fonctionnement	Nombre de défaillants	Taux moyen de défaillance $\lambda(t)$
0-1000	500	45	45000	8	0.0002
1000-2000	1500	42	42000	6	0.000143
2000-3000	2500	39	29000	4	0.000138
3000-4000	3500	30	37000	5	0.000135
4000-5000	4500	30	30000	5	0.000166
5000-6000	5500	20	20000	7	0.00035

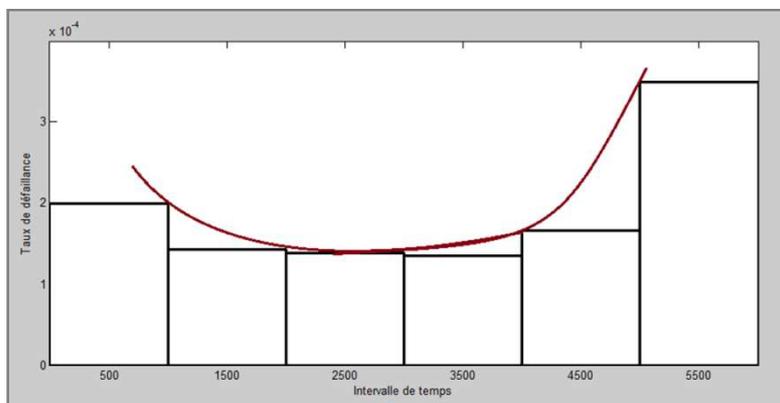


Fig.1.10. Courbe en baignoire empirique

I.6.2. Calcul du taux de défaillance instantané

Il s'applique aux seuls survivants à l'instant t et caractérise leur probabilité conditionnelle de défaillance entre t et $t+dt$

$$\lambda(t) = -\frac{dN}{N(t) \cdot dt} \text{ ou } \frac{dN}{N(t)} = -\lambda(t) \cdot dt$$

Le signe moins (-) s'explique par la décroissance de $N(t)$. Après intégration:

$$N(t) = k \exp\left(-\int_0^t \lambda(t) \cdot dt\right)$$

Pour $t=0$, $N(t)=N_0$, donc :

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\int_0^t \lambda(t) \cdot dt\right)$$

La probabilité de survie ou bien l'estimateur de la fonction empirique de la fiabilité peut s'écrire :

$$R(t) = \frac{N(t)}{N_0} = \frac{\text{nombre de survivants à l'instant } t}{\text{nombre initial}}$$

d'où l'on déduit:

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t) \cdot dt\right)$$

Cette relation est fondamentale, car elle permet le tracé expérimental de la fiabilité en fonction du temps, l'évolution du taux de défaillance étant connue.

Exemple 1.4

Soit 1000 moteurs mis en observation sous fonctionnement. Au bout de 500 h, on constate 650 défaillances, au bout de 1000 h, 870 défaillances, au bout de 1500 h, 950 défaillances et au bout de 2000 h, 982 défaillances. Tracez la fonction de fiabilité.

A partir de l'estimateur empirique de la fiabilité, nous avons tracé la fonction de fiabilité (fig.1.11), c'est une fonction décroissante du temps qui tend vers 0.

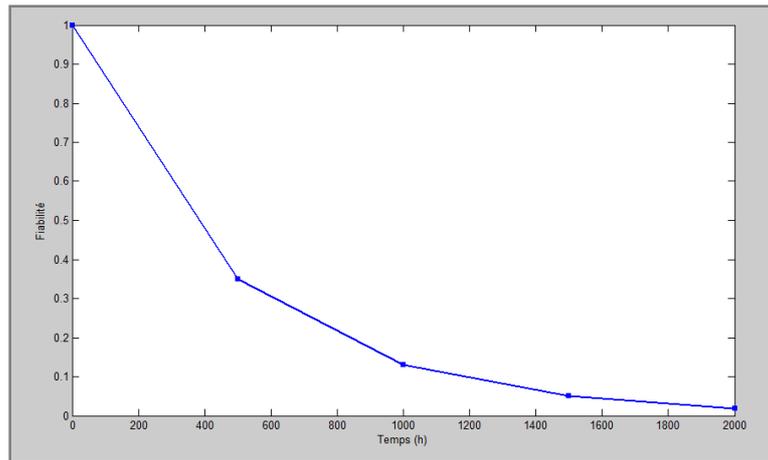


Fig.1.11. Fonction de fiabilité

I.7. Expressions mathématiques de la fiabilité

I.7.1. Fonction de répartition

$F(t)$ représente la probabilité qu'une défaillance survienne avant t_i (entre 0 et t_i).

$$F(t) = P(T < t_i)$$

I.7.2. Fonction de survie ou Fiabilité

$R(t)$ est la probabilité de bon fonctionnement, sans défaillance, jusqu'à t_i (de 0 à t_i).

$R(t)$ et $F(t)$ sont des probabilités complémentaires, telles que :

$$F(t) + R(t) = 1$$

$$\int_0^t f(t) dt + \int_t^{\infty} f(t) dt = 1$$

Où $f(t)$ est la fonction de densité de probabilité:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt}$$

$f(t)$ exprime la probabilité de défaillance dans l'intervalle de temps dt :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1 \text{ et } f(t) \geq 0$$

$$R(t) = P(T > t_i)$$

Si la variable aléatoire est discrète :

$$F(t_n) = \sum_0^n f(t_i)$$

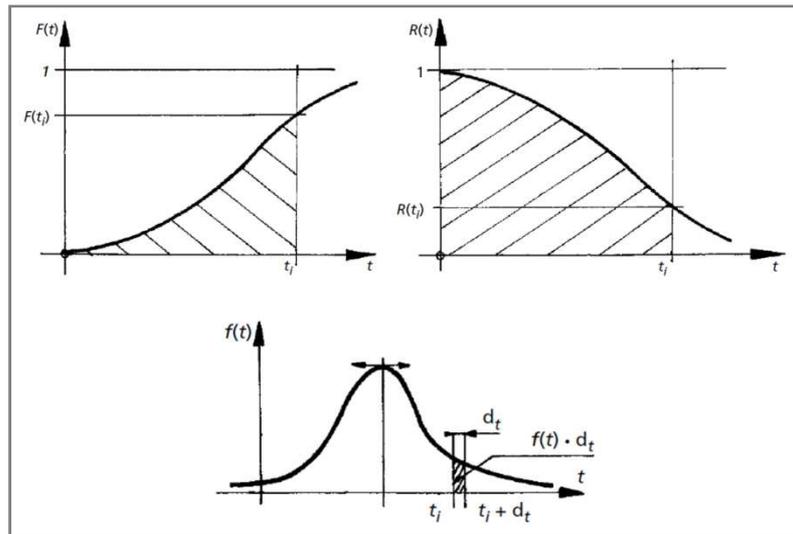


Fig.1.12. Représentations graphiques de $F(t)$, $R(t)$ et $f(t)$

I.7.3. Taux de défaillance

$\lambda(t)$ est la densité de probabilité conditionnelle. C'est la probabilité de défaillance dans l'intervalle de temps dt sachant que le matériel est en bon fonctionnement à t .

Appliquons le théorème des probabilités conditionnelles, la probabilité pour que le matériel soit défaillant entre t et $t+dt$ est donnée par:

$$f(t) = R(t) \cdot \lambda(t)$$

$$\Rightarrow \lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

$$\frac{dR(t)}{R(t)} = -\lambda(t)dt$$

Alors, l'expression générale de la fiabilité s'écrit:

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t) dt\right)$$

La fonction de hasard cumulée est ainsi:

$$H(t) = \int_0^t \lambda(t) dt$$

I.7.4. Moyenne des temps de bon fonctionnement (MTBF)

La durée moyenne entre deux défaillances consécutives est l'espérance mathématique de la variable aléatoire T , obtenu par:

$$MTBF = E(T) = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt$$

Chapitre II: Méthodes d'évaluation de la fiabilité

II.1. Introduction

L'objectif des méthodes d'évaluation de la fiabilité est de définir une estimation du comportement des équipements ou composants, c'est-à-dire que l'estimation d'une fiabilité permet à la fois de comprendre le passé et de préparer le futur.

Les méthodes à utiliser pour évaluer la fiabilité d'un composant dépendent de la taille du retour d'expérience disponible (validé) et la nature du composant (actif ou passif). Les méthodes actuellement utilisées dans l'industrie pour estimer une fiabilité opérationnelle ou une fiabilité prévue, peuvent être classées en deux catégories: Approches statistiques et Approches physiques.

— Pour les composants actifs (les pompes, les compresseurs, ...), l'évaluation se fait essentiellement à partir des approches statistiques. Ces composants sont complexes et ont des multiples mécanismes de dégradation et multiples modes de défaillance, alors la modélisation physique est difficile.

— Pour les composants passifs (les structures, les tuyauteries, les récipients sous pression, ...), on utilise souvent des approches physiques, mais si les données du retour d'expérience sont disponibles, on peut utiliser les approches statistiques. Ces composants ont un faible nombre de mécanismes de dégradation, les cinétiques de dégradation sont lentes et progressives et les défaillances sont rares, mais leurs conséquences sont généralement graves pour la sûreté, la disponibilité et les coûts, alors les approches statistiques sont souvent non adaptées.

II.2. Approches statistiques

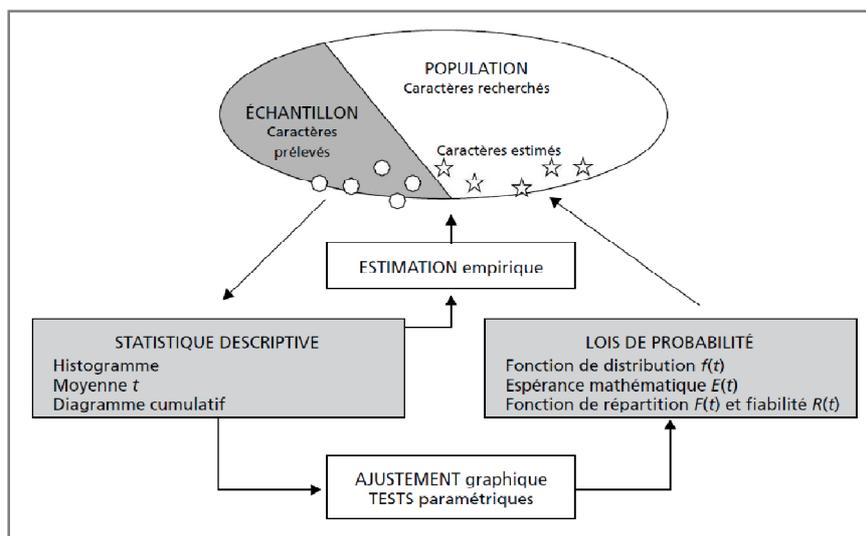


Fig.2.1. Les méthodes d'estimations statistiques de la fiabilité d'un dispositif

L'objectif des analyses statistiques de fiabilité est de caractériser la population mère de défaillances aux fins de connaissance du comportement et de prévisions utiles à la maintenance. Cette caractérisation peut s'obtenir:

- soit à partir de la description statistique de l'échantillon si celui-ci est significatif ;
 - soit par l'exploitation de modèles probabilistes déduits de l'échantillonnage.
- Ces deux méthodes de traitement sont schématisées à la figure 2.1

II.2.1. Les lois de probabilité utilisées en fiabilité

Les lois de probabilités peuvent être discrètes ou continues.

II.2.1.1. Lois discrètes

Par définition, les variables aléatoires discrètes prennent des valeurs entières discontinues sur un intervalle donné. Ce sont généralement le résultat de dénombrement. Parmi les lois discrètes on peut citer la loi hypergéométrique, loi Binomial (ou loi de Bernoulli) et la loi de Poisson.

II.2.1.1.1. La loi Hypergéométrique

Elle correspond à un tirage sans remise. La composition de l'échantillon se modifie donc après chaque tirage. Une urne contient des boules noires et des boules blanches. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées, n le nombre total de boules et b le nombre de boules blanches. La probabilité de voir apparaître x boules blanches au cours de k tirages est:

$$P(X = x) = \frac{C_b^x C_{n-b}^{k-x}}{C_n^k}$$

La moyenne et la variance sont données par:

$$E(X) = \frac{kb}{n}$$

$$V(X) = \sigma^2(X) = \frac{b(n-b)k(n-k)}{n^2(n-1)}$$

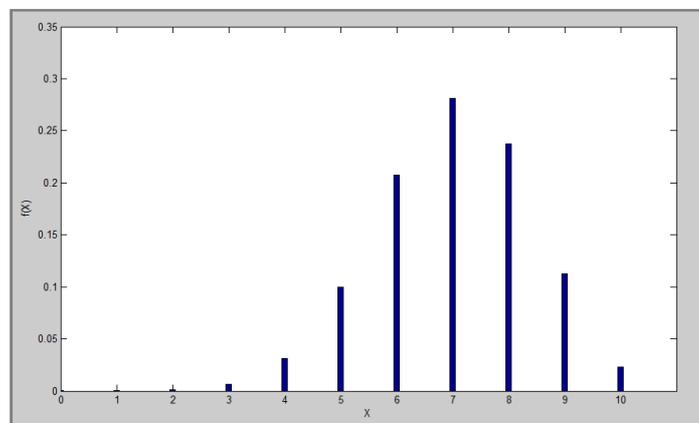


Fig.2.2. Exemple-Loi Hypergéométrique pour $n=100$, $b=70$ et $k=10$

La figure 2.2 montre une représentation graphique de la loi Hypergéométrique pour $n=100$, $b=70$ et $k=10$.

Exemple 2.1 :

Un stock de pièces de rechange contient 50 pièces pour un type de compresseur, parmi ces pièces 5 sont dégradées. Quelle est la probabilité d'en tirer une pièce dégradée pour un échantillon de 4?

$$P(X = 1) = \frac{C_5^1 C_{50-5}^{4-1}}{C_{50}^4} = 0.31$$

II.2.1.1.2. La loi Binomial

Soit une épreuve: $\begin{cases} A & \text{de probabilité } : p \\ \bar{A} & \text{de probabilité } : q = 1 - p \end{cases}$

Le processus de Bernoulli consiste à répéter cette épreuve n fois dans des conditions identiques (tirage avec remise), de sorte que les probabilité p et q sont constante.

La probabilité pour qu'au cours de ce processus, on obtienne k fois le résultat A est donnée par la loi Binomial:

$$B(k, n, p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

La moyenne et la variance sont données par:

$$E(k) = np$$

$$V(k) = np(1-p)$$

La probabilité cumulée (fonction de répartition) s'écrit :

$$F(k) = \text{Prob}(k \leq m) = \sum_{k=0}^m C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

RQ:

- a) Si $np(1-p) > 18 \rightarrow \begin{cases} \text{approximation de la loi Binomial par une loi Normale} \\ \text{de moyenne } np \text{ et d'écart type } \sqrt{np(1-p)} \text{ (cf. paragraphe II.2.1.2.2)} \end{cases}$
- b) Si $p < 0.1$ ($n \geq 30$) $\rightarrow \begin{cases} \text{approximation de la loi Binomial par une loi de Poisson} \\ \text{de paramètre } m = np \text{ (cf. paragraphe II.2.1.1.3)} \end{cases}$

La figure (2.3) fournit un exemple de la loi Binomiale pour $n=5$ et $p=0.25$.

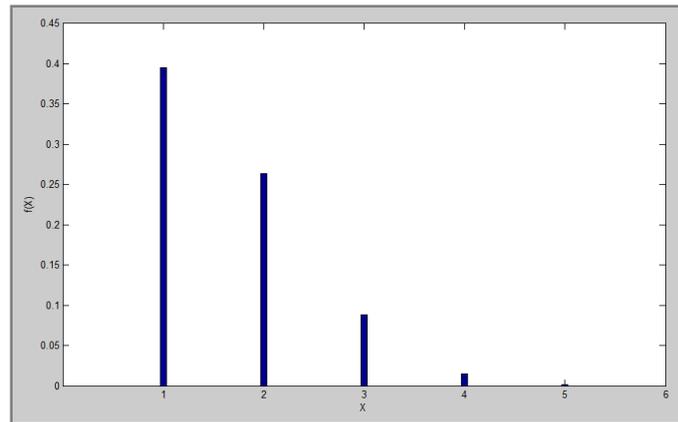


Fig.2.3. Exemple-Loi Binomiale pour $n=5$ et $p=0.25$

Exemple 2.2 :

Dix pour cent (10%) des roulements produit par une entreprise sont défectueux. Pour réaliser le montage d'un système mécanique, on doit utiliser 6 roulements. Quelle est la probabilité que parmi ces 6 roulements:

- 1) Un est défectueux ?
- 2) Moins de 3 sont défectueux ?

1) $P(k = 1) = C_6^1 (0.1)^1 (0.9)^5 = 0.35$

2) $P(k < 3) = \sum_{k=0}^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_6^0 (0.1)^0 (0.9)^6 + C_6^1 (0.1)^1 (0.9)^5 + C_6^2 (0.1)^2 (0.9)^4 = 0.98$

II.2.1.1.3. La loi de Poisson

Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson, si elle peut prendre des valeurs entières 0, 1, 2,... k . La loi de Poisson est une loi à un paramètre m , où la probabilité d'observer $X=k$ événement s'écrit:

$$P(X = k) = P_k = \frac{m^k}{k!} e^{-m}$$

D'où:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$$

$$\mu = E(k) = m$$

$$V(k) = \sigma^2(k) = m$$

La fonction de répartition est:

$$F(x) = \sum_{k=0}^x \frac{m^k}{k!} e^{-m}$$

RQ: La loi de poisson est une loi discrète dont la variable aléatoire est un nombre d'événements, alors que dans la loi Exponentielle (cf. paragraphe II.2.1.2.1), la variable aléatoire est l'intervalle de temps entre deux événements. D'une façon générale, la loi de Poisson est considérée avec un paramètre $m = \lambda t$.

La figure (2.4) montre une représentation graphique de la loi de poisson pour $m=3$.

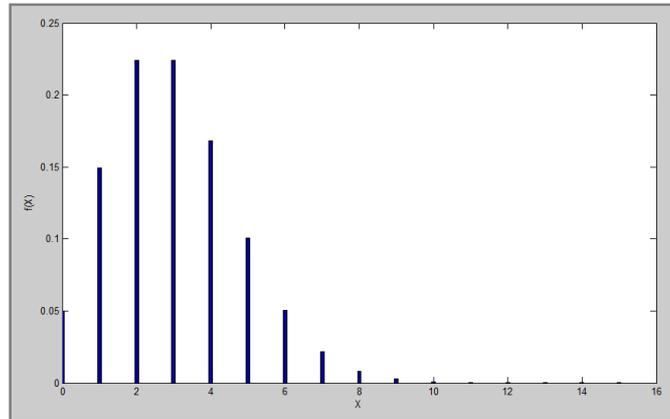


Fig.2.4. Exemples-Loi de Poisson pour $m=3$

Exemple 2.3 :

Dans une installation électrique, il ya en moyenne 21 défaillances par semaine. Quelle est la probabilité qu'il ait 0 défaillance lors d'une journée ?

$$m = \frac{21}{7} = 3 \text{ déf/jour}$$

$$P(X = 0) = \frac{3^0}{0!} e^{-3} = 0.05$$

La probabilité qu'il ait 0 défaillance lors d'une journée est égale à 0.05

II.2.1.2. Loïs continues

Par définition, les variables aléatoires continues prennent des valeurs continues sur un intervalle donné. Les lois les plus utilisées sont la loi exponentielle, loi normale, loi lognormale et la loi de Weibull.

II.2.1.2.1. Model exponentiel

Ce modèle correspond au cas d'un taux de défaillance constant λ ; c'est donc le modèle le plus simple parmi les modèles continus, mais qui ne s'adapte pas très bien aux systèmes mécaniques.

D'après la loi fondamentale de la fiabilité, si λ est constant, on a :

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

La densité de probabilité et la fonction de répartition sont donnée par:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d(1-R(t))}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$F(t) = \int_0^t f(t) dt$$

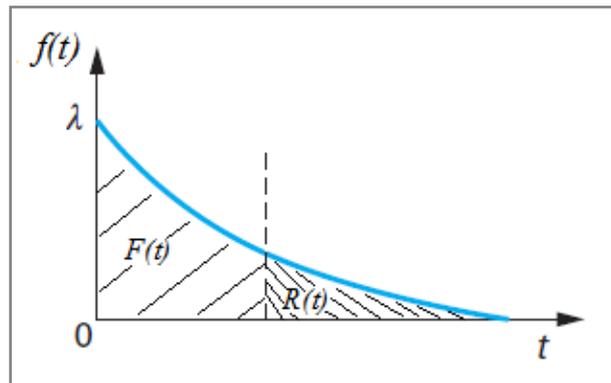


Fig.2.5. Densité de probabilité de la loi exponentielle

Cette loi n'est pas adaptée pour rendre compte du vieillissement, puisque le taux de défaillance est constant, mais elle peut convenir si les opérations régulières de maintenance permettent d'effacer tout effet du vieillissement. L'espérance mathématique et la variance sont comme suit:

$$E(t) = MTBF = \int_0^{\infty} R(t) dt = \frac{1}{\lambda}$$

$$V = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Où $MTBF = \frac{1}{\lambda}$, si $t = MTBF$ on a:

$R(t) = e^{-\lambda \frac{1}{\lambda}} = e^{-1} \approx 0.37$ (chance de survie), comme le montre la figure 2.6.

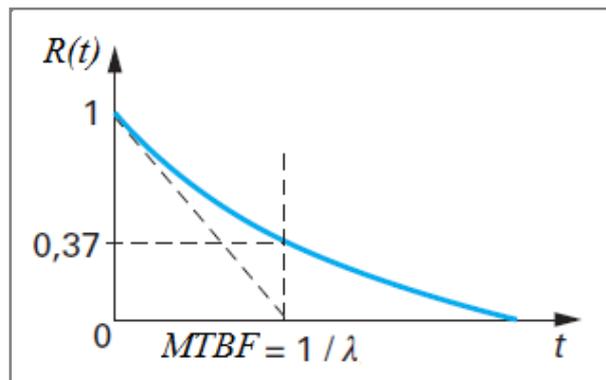


Fig.2.6. Fiabilité et MTBF, dans le cas de la loi exponentielle

- Temps systématique associé à un seuil de fiabilité :

Considérons, par exemple, le seuil 0.90, on obtient :

$$-\lambda t = \ln R(t)$$

$$t = \frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{R} = \frac{0.105}{\lambda}$$

D'où $t = 0.105 \cdot MTBF$, c'est le temps systématique ou la durée de vie associé à un seuil de fiabilité, dans le cas de la loi exponentielle.

Exemple 2.4 :

Un équipement électronique (radar) doit rester 2h/jour sur le pont d'un bateau et 22h au sol (niveau de la mer).

Niveau de la mer: taux de défaillance= $2 \cdot 10^{-6} \text{ h}^{-1}$

Pont du bateau: taux de défaillance= $3,6 \cdot 10^{-6} \text{ h}^{-1}$

Quelle est la probabilité de survie au bout de 500 jours?

Niveau de la mer: $\lambda_1 = 2 \cdot 10^{-6} \Rightarrow t_1 = 22 \cdot 500$

Pont du bateau: $\lambda_2 = 3,6 \cdot 10^{-6} \Rightarrow t_2 = 2 \cdot 500$

$$R_1(t) = e^{-\lambda_1 t_1}$$

$$R_2(t) = e^{-\lambda_2 t_2}$$

$$\Rightarrow R_S(t) = R_1(t) \cdot R_2(t)$$

II.2.1.2.2. Modèle Normal de Gauss

La loi normale est la loi statistique la plus répandue et la plus utile, car elle représente beaucoup de phénomènes stochastiques. Une variable aléatoire absolument continue X suit une loi normale définie par la moyenne μ et l'écart type σ , si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$$

L'espérance et la variance valent:

$$E(x) = \mu$$

$$V(x) = \sigma^2$$

La fonction de répartition est:

$$F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Dont les représentations graphiques des différentes fonctions de la loi Normale sont données par la figure 2.7.

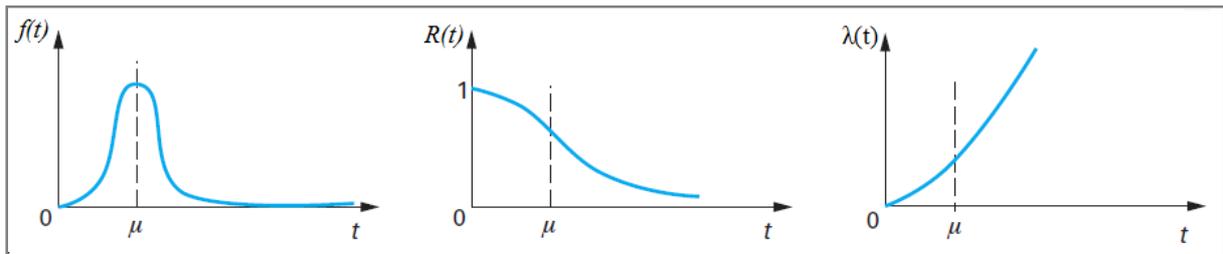


Fig.2.7. Fonctions de la loi Normale

Pour calculer les probabilités associées à la loi normale, on utilise généralement la loi normale réduite. Si t suit une loi Normale (μ, σ) , $u = \frac{t-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite dont la fonction de répartition, notée ϕ , est donnée par :

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

Exemple 2.5:

La durée de vie d'un composant suit une loi normale avec une moyenne $\mu = 2000$ heures est un écart-type $\sigma = 100$ heures.

- 1) Calculer la fiabilité $R(t)$ à $t = 1850$ heures.
- 2) Quelle est la probabilité de tomber en panne entre les limites de 1850 et 2150 heures ?

1) $R(t)$ à $t = 1850$ heures.

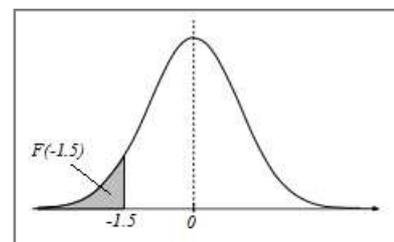
$$R(t) = 1 - F(t)$$

$$U = \frac{t - \mu}{\sigma} = \frac{1850 - 2000}{100} = -1.5$$

$$F(U) = F(-1.5) = 1 - F(1.5) = 1 - 0.93319 = 0.06681$$

$$R(t) = 1 - 0.06681$$

$$R(t) = 0.93319$$



2) Probabilité de tomber en panne entre les limites de 1850 et 2150 heures:

$$U_1 = \frac{t_1 - \mu}{\sigma} = \frac{1850 - 2000}{100} = -1.5$$

$$F(U_1) = F(-1.5) = 1 - F(1.5) = 1 - 0.93319 = 0.06681$$

$$U_2 = \frac{t_2 - \mu}{\sigma} = \frac{2150 - 2000}{100} = 1.5$$

$$F(U_2) = F(1.5) = 0.93319$$

$$F(U) = F(U_2) - F(U_1) = 0.93319 - 0.06681$$

⇒ Prob de défaillance $F(t) = 0.86638$

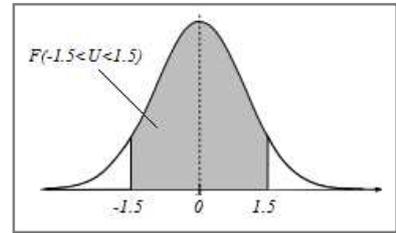


Tableau 2.1. Fonction de répartition de la loi normale réduite

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de z

z	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
F(z)	0,998650	0,999032	0,999313	0,999517	0,999663	0,999767	0,999841	0,999892	0,999928	0,999952
z	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
F(z)	0,999968	0,999979	0,999987	0,999991	0,999995	0,999997	0,999998	0,999999	0,999999	1,000000

Nota. La table donne F(z) pour z positif. Pour z négatif, il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table. Exemple : $F(-1,37) = 1 - F(1,37) = 1 - 0,9147 = 0,0853$.

Exemple 2.6:

L'usine A est spécialisée dans la fabrication des transformateurs de tension ($V_{cc} = 10 \text{ V}$). La variable aléatoire X mesurant la tension suit une loi normale de moyenne 10 V et d'écart type 0.2

- 1) La société B cliente de A n'accepte que les transformateurs dont la tension de sortie se situe dans l'intervalle [9,54 10,46]. Quel est le pourcentage prévisible de pièces refusées ?
- 2) supposant que ce pourcentage est égale 2%, on désigne par Y le nombre de transformateurs refusés dans un lot de 100. Quelle est la probabilité d'avoir $Y=3$ en utilisant une loi binomiale et la loi de Poisson

$$U_1 = \frac{10.46-10}{0.2} \Rightarrow F(U_1) = 0.9893 \quad (\text{voir le tableau 2.1})$$

$$U_2 = \frac{9.54-10}{0.2} \Rightarrow F(U_2) = 1-0.9893 = 0.0107$$

1) Le pourcentage prévisible de pièces refusées : $P = 1 - [F(U_1) - F(U_2)] = 0.021$

2) $P(n, k, p) = P(100, 3, 0.2) = C_{100}^3 p^3 (1-p)^{100-3}$

$$P = \frac{m^k}{k!} e^{-m} \quad \text{avec } m = np \text{ et } k = 3$$

II.2.1.2.3. Modèle Lognormal

La loi lognormale est définie en fonction de la loi normale:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

La fonction de répartition est:

$$F(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{x} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] dx$$

Figure 2.8 montre l'allure des différentes fonctions de la loi Lognormale

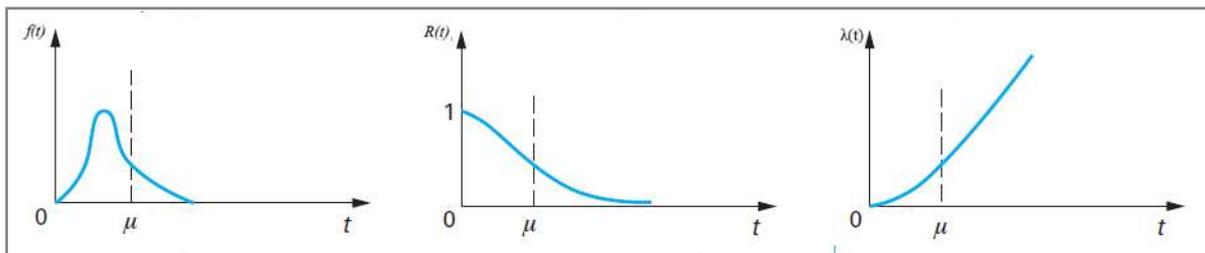


Fig.2.8. Fonctions de la loi lognormale

Il est également possible d'utiliser une loi lognormale avec décalage à l'origine. Cette loi s'est montrée particulièrement adaptée à la modélisation des résultats des essais de fatigue. Les paramètres statistiques sont:

$$\text{Moyenne} = \exp\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right]$$

$$\text{Variance} = (e^{\sigma^2} - 1) \cdot e^{2\mu + \sigma^2}$$

$$\text{Médiane} = e^{\mu}$$

$$\text{Médiane} = e^{\mu}$$

$$\text{Mode} = e^{\mu - \sigma^2}$$

Exemple 2.7:

La durée de vie d'un composant, mesurée en heures, suit une loi lognormale de paramètres: $\mu = 10$ et $\sigma = 2$. Calculer la fiabilité à $t=20000$ h et la moyenne de la durée de vie.

$$U = \frac{\ln 40000 - 10}{2} = 0.3 \Rightarrow F(0.3) = 0.6179 \text{ (voir le tableau 2.1)}$$

$$\text{D'où: } R(t = 40000) = 1 - 0.6179 = 0.3821$$

$$\text{Et: } \text{Moyenne} = \exp\left[10 + \frac{2^2}{2}\right] = 162754 \text{ heures}$$

II.2.1.2.4. Modèle de Weibull

La loi de weibull se caractérise par trois paramètres: γ le paramètre de position, η le paramètre d'échelle et β le paramètre de forme. La densité de probabilité s'écrit:

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{t - \gamma}{\eta}\right)^\beta\right)$$

Ainsi, la fonction de répartition et la fiabilité sont:

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t - \gamma}{\eta}\right)^\beta\right)$$

$$R(t) = \exp\left(-\left(\frac{t - \gamma}{\eta}\right)^\beta\right)$$

Le paramètre de position γ a la dimension de l'unité d'usage ($]-\infty, +\infty[$), permet de définir l'origine de l'échelle du temps (qui fixe l'instant à partir duquel on étudie la fiabilité), en supposant que pour $t < \gamma$, la probabilité de défaillance est nulle. Le paramètre d'échelle η a aussi la dimension de l'unité d'usage ($\eta > 0$). Le paramètre de forme β ($\beta > 0$) est sans dimension, permet la représentation des différents scénarios d'évolution: Taux de défaillance constant, croissant ou décroissant. Il peut ainsi simuler toute la courbe en baignoire de la vie du composant (fig.2.9) en la décomposant en trois parties qui doivent être raccordées en respectant certaines contraintes de continuité.

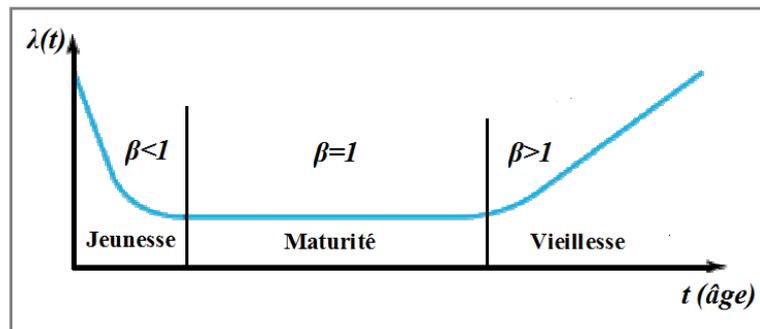


Fig.2.9. Différents scénarios d'évolution du taux de défaillance en fonction du paramètre β

Le taux de défaillance vaut:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1}$$

Le taux de défaillance est une fonction du temps et les ordres de grandeurs du paramètre de forme β sont donnés comme suit:

$\beta < 1$, $\lambda(t)$ décroît : caractéristique de la période de jeunesse

$\beta = 1$, $\lambda(t)$ constant : indépendance du temps, on retrouve la loi exponentielle, caractéristique de la période de maturité

$\beta > 1$, $\lambda(t)$ croît : c'est la période de vieillissement, d'usure ou de dégradation

- $1 < \beta < 2$: Croissance de plus en plus faible avec l'augmentation du temps
- $\beta = 2$: Taux de défaillance linéaire
- $\beta > 2$: Croissant de la cinétique de dégradation
- $\beta \approx 3.5$: Distribution quasi-symétrique (sensiblement normale)
- $1.5 \leq \beta \leq 2.5$: Dégradation semblable à la fatigue
- $3 \leq \beta \leq 4$: Dégradation semblable à la corrosion ou l'usure

La figure 2.10 montre l'influence du paramètre de forme β sur les différentes fonctions de la loi de Weibull.

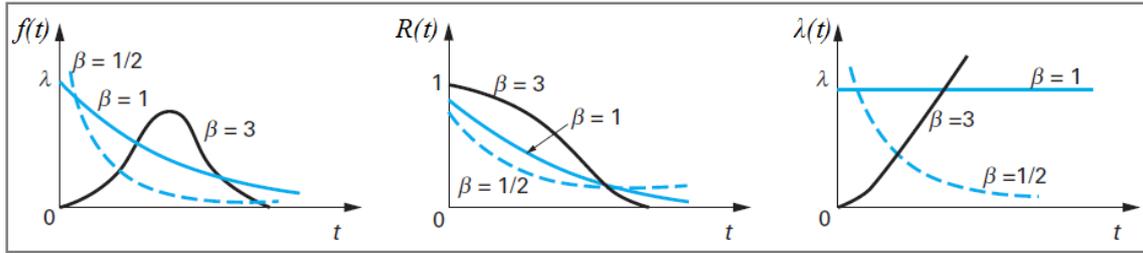


Fig.2.10. influence du paramètre de forme β sur les différentes fonctions de la loi de Weibull.

La moyenne et la variance sont données par:

$$E(t) = MTBF = \gamma + \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$V = \sigma^2 = \eta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right)^2 \right]$$

❖ **Durée de vie associée à un seuil de fiabilité**

$$R(t) = \exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right)$$

$$\ln \frac{1}{R(t)} = -\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta$$

$$\Rightarrow t = \gamma + \eta \left[\ln \frac{1}{R(t)} \right]^{1/\beta}$$

Exemple 2.8:

Un échantillon de six roulements à billes est soumis à des essais de fiabilité. Les résultats sont les suivants: $4 \cdot 10^5$, $1.3 \cdot 10^5$, $9.8 \cdot 10^5$, $2.7 \cdot 10^5$, $6.6 \cdot 10^5$, $5.2 \cdot 10^5$ cycles.

- 1) Déterminer les paramètres de la loi de Weibull.
- 2) Calculer la moyenne du temps de bon fonctionnement (MTBF).
- 3) Calculer la fiabilité à $t=MTBF$.
- 4) Déterminer par calcul la périodicité d'un entretien systématique basé sur une fiabilité de 0.9 (ce qui signifie une défaillance admise de 10%).
- 5) Représenter graphiquement les différentes fonctions de la loi de Weibull

1) Avec l'usage de Matlab, le tracé de Weibull (fig.2.11) permet de déterminer la loi de fiabilité du roulement à billes, caractérisée par $\beta=1.8$, $\eta = 5.58 \cdot 10^5$ cycles et $\gamma = 0$.

$\beta=1.8$ signifie que la dégradation de ce roulement à billes est due à un phénomène de fatigue.

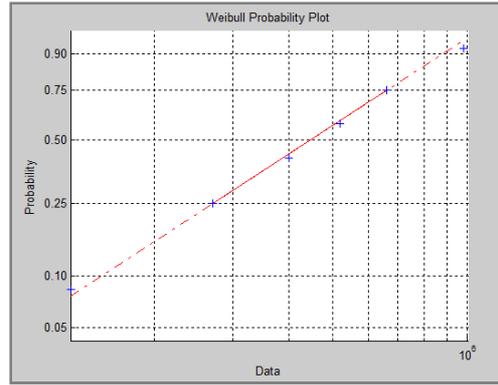


Fig.2.11. Tracé de Weibull

$$2) \quad MTBF = \gamma + \eta \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) = 5.58 \cdot 10^5 \Gamma \left(1 + \frac{1}{1.8} \right) = 5 \cdot 10^5 \text{ cycles.}$$

3) Fiabilité à $t=MTBF$:

$$R(MTBF) = \exp \left(- \left(\frac{MTBF}{5.58 \cdot 10^5} \right)^{1.8} \right) = 0.44 = 44\%$$

Ce qui signifie que la chance de ce roulement pour rester fiable à $t= MTBF$ est 44 % .

4) Durée de vie associée à un seuil de fiabilité:

$$t_{\text{systématique}} = 5.58 \cdot 10^5 \left[\ln \frac{1}{0.9} \right]^{1/1.8} = 1.5 \cdot 10^5 \text{ cycles}$$

5) Représentation graphique des différentes fonctions: $R(t)$, $F(t)$, $f(t)$ et $\lambda(t)$.

La connaissance des trois paramètres de la loi de Weibull permet d'écrire les quatre équations et d'en déduire les quatre courbes représentatives (fig.2.12).

$$R(t) = \exp \left(- \left(\frac{t}{5.58 \cdot 10^5} \right)^{1.8} \right)$$

$$F(t) = 1 - \exp \left(- \left(\frac{t}{5.58 \cdot 10^5} \right)^{1.8} \right)$$

$$f(t) = \frac{1.8}{5.58 \cdot 10^5} \left(\frac{t}{5.58 \cdot 10^5} \right)^{1.8-1} \exp \left(- \left(\frac{t}{5.58 \cdot 10^5} \right)^{1.8} \right)$$

$$\lambda(t) = \frac{1.8}{5.58 \cdot 10^5} \left(\frac{t}{5.58 \cdot 10^5} \right)^{1.8-1}$$

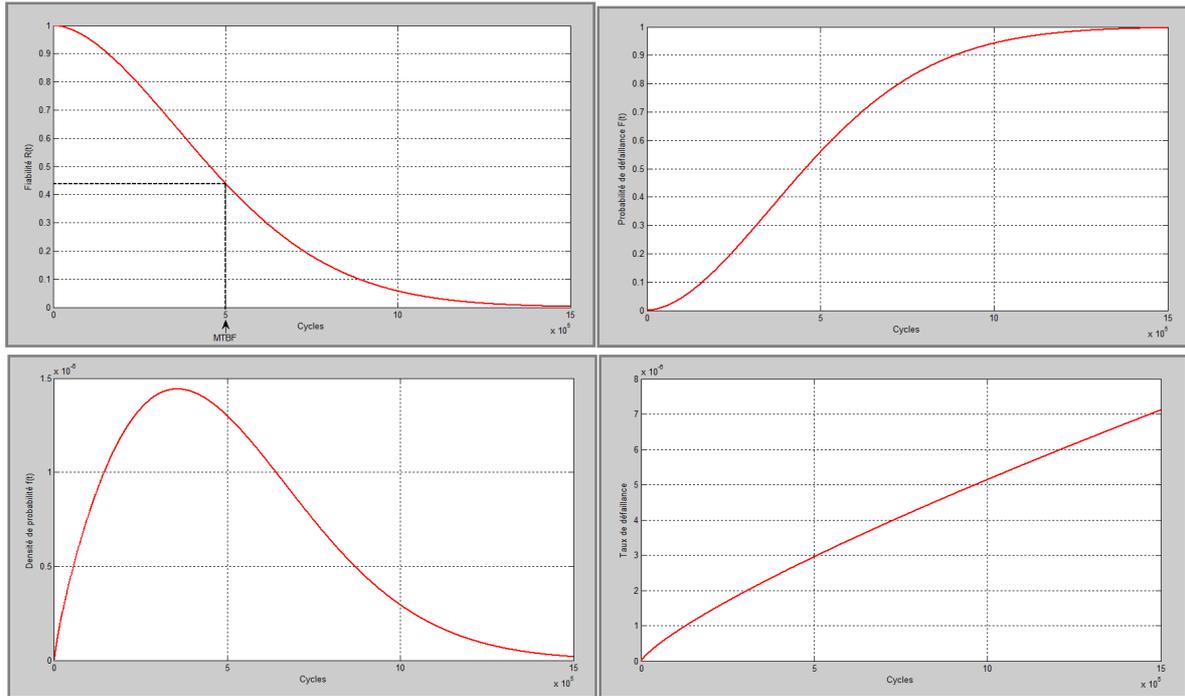


Fig.2.12. Représentation graphique des différentes fonctions de la loi de Weibull (pour un roulement à billes)

II.3. Approche physique

Les méthodes résistance-contrainte ou l'approche de la fiabilité des structures représentent un exemple de cette catégorie.

II.3.1. Approche de la fiabilité des structures (Méthodes résistance-contrainte)

Ces méthodes sont très utilisées en mécanique pour les structures passives ou lorsqu'il n'y a pas de défaillance observées. Elles consistent à donner un aspect probabiliste à la notion de coefficient de sécurité. Ce sont les méthodes les plus simples. L'équation de défaillance s'écrit :

$$Z = R - C$$

Il y aura défaillance si la résistance R se trouve inférieure à la contrainte C .

On considère la distribution $f(c)$ de la contrainte C de moyenne μ_c et d'écart type σ_c et la distribution $g(r)$ de la résistance R de moyenne μ_r et d'écart type σ_r (fig.2.13).

Si l'on suppose que la contrainte C et la résistance R sont indépendantes, on a :

$$f(x) = f(c) \cdot g(r)$$

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(c) \cdot g(r) dc dr$$

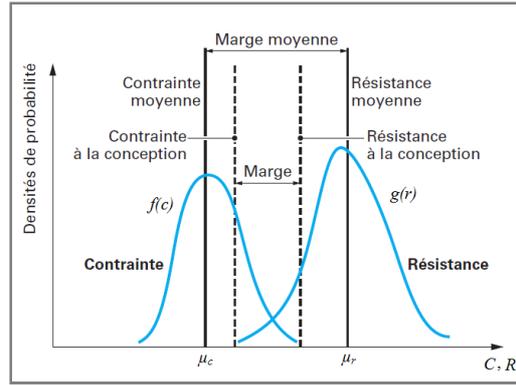


Fig.2.13. Approche résistance-contrainte

Soit, avec la fonction de répartition :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dy$$

$$P_f = P(R - C \leq x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_R(y) f_C(y) dy$$

La fiabilité évaluée au cours du temps correspond à la fonction de répartition de la durée de vie. A un instant t de la durée de vie de la structure, la probabilité de défaillance instantanée est :

$$P_f(t) = P[R(t) \leq C(t)]$$

Si les densité instantanées $f_R(x,t)$ et $f_C(x,t)$ sont connues, la probabilité de défaillance instantanée $P_f(t)$ peut être calculée par l'intégrale de convolution :

$$P_f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_R(x,t) f_C(x,t) dx$$

II.3.1.1. Méthodes d'évaluation de la fiabilité

Le problème est difficile, car il faut évaluer l'intersection de deux distributions dans le domaine des queues de distribution, en plus dans les applications pratiques, le modèle physique de ruine est complexe et inclut de nombreuses variables aléatoires. Il n'est pas toujours possible de séparer la résistance et la contrainte. La probabilité de défaillance est très faible. Ces considérations ont conduit au développement de techniques de calcul appropriées aux faibles probabilités. On trouve deux familles de méthodes :

- les méthodes de simulation (Monte Carlo et ses variantes accélérées) ;
- les méthodes d'approximation (FORM-SORM).

II.3.1.1.1. Simulation de Monte Carlo

La simulation de Monte Carlo est une méthode plus exacte et directe de calcul de la probabilité P_f . On estime P_f par le rapport N_f / N_{sim} , où N_{sim} est le nombre total de tirages et N_f est le nombre de tirages ayant conduit à la défaillance (signe négatif de Z). Cette méthode simple dans son principe est très coûteuse en pratique : pour estimer une probabilité de l'ordre de 10^{-k} à 5 % près, il faut de l'ordre de $N_{sim} \approx 4.10^{k+2}$ tirages. Cependant, comme les probabilités P_f sont de l'ordre de 10^{-5} à 10^{-6} , il est nécessaire de réaliser un nombre très important de tirages (de l'ordre de 10^7 à 10^8 tirages).

II.3.1.1.2. Méthodes d'approximations

Les méthodes d'approximations les plus courantes sont les méthodes de fiabilité de premier et de second ordre, respectivement FORM et SORM (Fig.2.14). Ces méthodes sont basées sur le concept de l'indice de fiabilité. La méthode FORM (développement en série de Taylor limitée au premier ordre : First Order Reliability Method) consiste, après transformation, à linéariser la surface d'état limite ($Z = 0$) (approximation linéaire), au point le plus proche de l'origine dans l'espace transformé. L'indice β s'interprète géométriquement : il est la distance au point de la surface de défaillance le plus proche de l'origine de l'espace transformé, le point où la vraisemblance est maximale, où la défaillance est la plus probable. La figure 2.14 montre cette interprétation géométrique : l'indice β peut être interprété comme un indicateur de la marge par rapport à la surface de défaillance. L'intérêt de cette méthode FORM réside dans l'économie en temps de calcul, mais l'inconvénient est qu'il s'agit d'une approximation.

Si après transformation, on utilise une approximation de la surface d'état limite par une surface quadratique (Second Order Reliability Method: SORM). Les méthodes FORM et SORM qui sont des méthodes d'approximation, sont généralement bien suffisantes, compte tenu des incertitudes existantes par ailleurs.

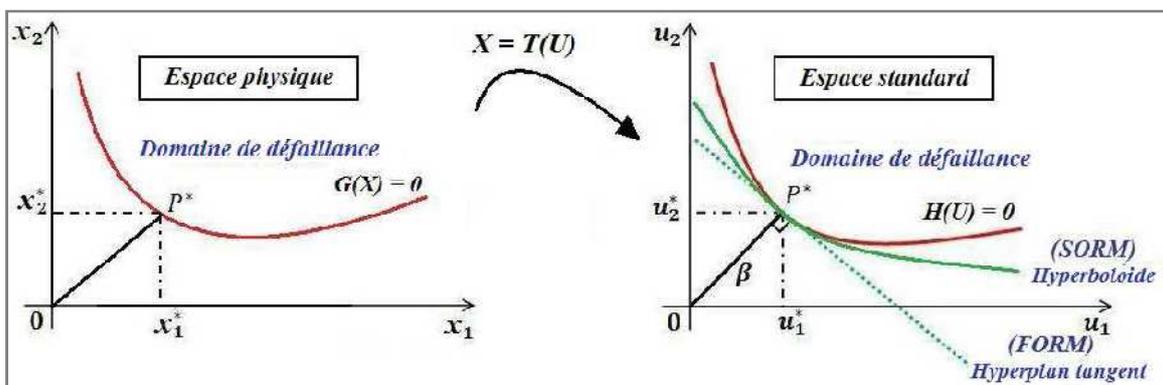


Fig.2.14. Illustration du principe des approches FORM et SORM.

II.3.1.2. Cas particulier où les deux distributions $f(c)$ et $g(r)$ sont normales

La différence de deux variables aléatoires normales est une variable aléatoire normale. Si $X = r - c$ est la variable aléatoire, on a :

$$\mu_x = \mu_r - \mu_c$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_c^2}$$

On pose la variable réduite : $U = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x}$

Et :

$$R = P(X > 0) = P\left(U > -\frac{\mu_x}{\sigma_x}\right)$$

$$\Rightarrow R = P\left(U > -\frac{\mu_r - \mu_c}{\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_c^2}}\right)$$

Si R et C sont des lois « log normales » (formule approchée) :

$$R = P\left(U > -\frac{\ln \mu_r - \ln \mu_c}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_r}{\mu_r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_c}{\mu_c}\right)^2}}\right)$$

Exemple 2.9:

La répartition des contraintes d'une structure (en Mpa) est une loi N(250, 50) alors que celle de la résistance est une loi N(370, 30).

-En utilisant le théorème central limite, calculer la fiabilité de la structure.

La répartition des contraintes d'une structure (en Mpa) est une loi N(250, 50) alors que celle de la résistance est une loi N(370, 30).

$X = R - C$: C'est l'équation de défaillance

On pose la variable réduite : $u = \frac{x - m_x}{\sigma_x}$

$$m_x = m_R - m_C = 370 - 250 = 120$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_C^2} = \sqrt{(30)^2 + (50)^2} = 58$$

$$R = \text{prob}(R > C) = \text{prob}(x > 0) = \text{prob}\left(u > -\frac{m_x}{\sigma_x}\right) = \text{prob}\left(u > -\frac{120}{58}\right)$$

$$\Rightarrow R = \text{prob}(u > -2.07) = 0.9808 \quad (\text{voir le tableau 2.1})$$

Chapitre III: Fiabilité des systèmes

III.1. Introduction

Un matériel (ou un système) peut être considéré comme un assemblage de composants configurés en série, parallèle, mixte ou quelconque. Si l'on modélise ces configurations, la fonction de fiabilité $R_{\text{système}}(t)$ de ce matériel est en fonction des fiabilités $R_i(t)$ de ses composants.

La représentation graphique du comportement d'un système est appelée digramme de fiabilité ou de succès, sa traduction anglaise est : "Reliability block diagram".

III.2. Système série

La représentation graphique d'un système série en diagramme de fiabilité est donnée par la figure 3.1.

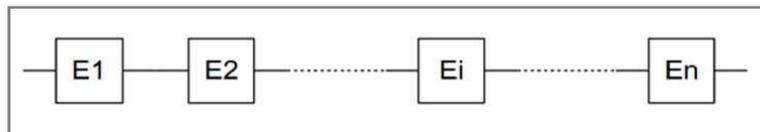


Fig.3.1. Configuration série

Le système est dit en série, si la défaillance d'un élément entraîne la défaillance du système, et si les défaillances sont indépendantes, la fiabilité du système est égale au produit des fiabilités des composants montés en série :

$$R_{\text{système}}(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot \dots \cdot R_i(t) \cdot \dots \cdot R_n(t)$$

$$\Rightarrow R_{\text{système}}(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t)$$

III.3. Système parallèle

S'il suffit que l'un des éléments fonctionne pour que le système fonctionne, alors l'ensemble est dit parallèle. La représentation graphique d'un tel système en diagramme de fiabilité est la suivante:

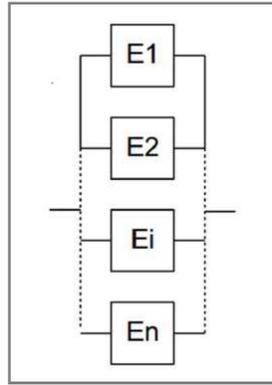


Fig.3.2. Configuration parallèle

La probabilité de défaillance de n éléments en parallèle est:

$$F_{\text{système}}(t) = F_1(t) \cdot F_2(t) \cdot \dots \cdot F_i(t) \cdot \dots \cdot F_n(t)$$

$$\Rightarrow 1 - R_{\text{système}}(t) = (1 - R_1(t)) \cdot (1 - R_2(t)) \cdot \dots \cdot (1 - R_i(t)) \cdot \dots \cdot (1 - R_n(t))$$

Alors :

$$R_{\text{système}}(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t))$$

III.3.1. Notion de redondance

Plus il ya des composant en parallèle, meilleur est la fiabilité. Sous le nom de redondance, on utilise cette propriété pour accroître la fiabilité d'un système.

Signalons qu'il y a deux types de fonctionnement dans le cas de la redondance:

- **Redondance active** : On parle de redondance active, quand tous les composants sont en fonctionnement permanent et il suffit qu'au moins un composant fonctionne pour que le système fonctionne.
- **Redondance passive** : la redondance est dite passive ou (standby) quand les composants surabondants ne sont mis en service qu'au moment du besoin.

III.3.2. Configuration redondance r/n

Un système à redondance **r/n** est un système qui ne fonctionne que si au moins **r** composants parmi **n** fonctionnent (fig.3.3).

III.4.2. Configuration parallèle-série

Cette configuration se représente de la façon suivante:

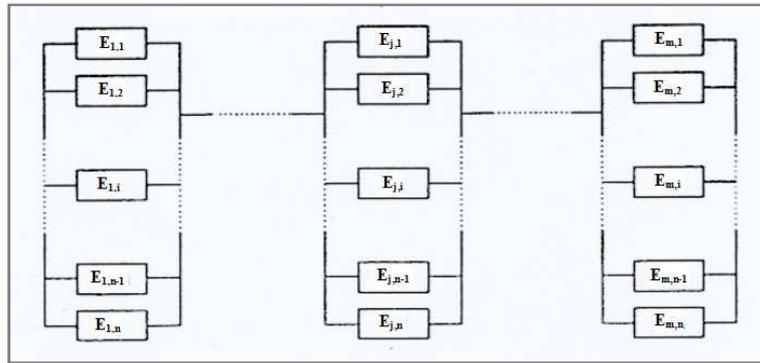


Fig.3.5. Configuration parallèle-série

La fiabilité de l'ensemble est évaluée par la relation suivante:

$$R_{\text{systeme}}(t) = \prod_{i=1}^n \left[1 - \prod_{j=1}^{m_i} (1 - R_{ji}(t)) \right]$$

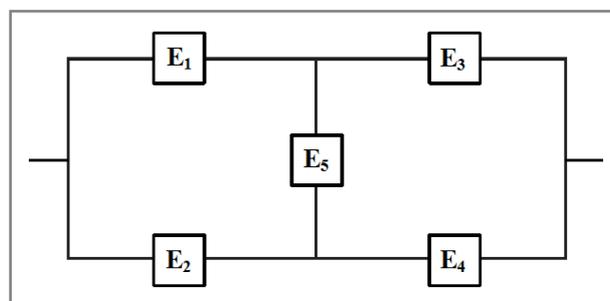
III.5. Configuration quelconque

Dans le cas où le systèmes ni série, ni parallèles, ni mixte, le théorème des probabilité totales (Bayes) est employer pour mener l'étude du système. Ce théorème est donné par la relation suivante:

$$P(S) = P(S | E) \cdot P(E) + P(S | \bar{E}) \cdot P(\bar{E})$$

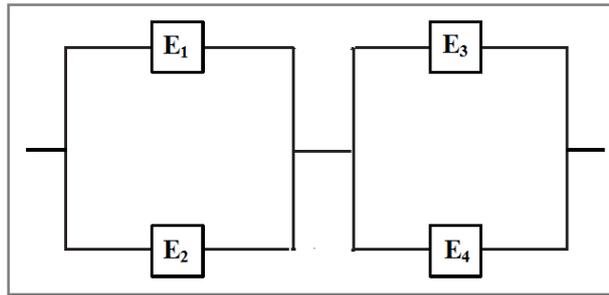
Cette méthode consiste à effectuer des conditionnements successifs qui vont permettre de ramener le système à des configurations connues (en envisageant plusieurs cas où un ou plusieurs composants sont en panne ou en état de marche.

Exemple 3.1: système en pont



Pour ce système, si l'on considère le cas où l'élément E₅ est en panne et celui en état de marche, on revient à des configurations série et parallèle.

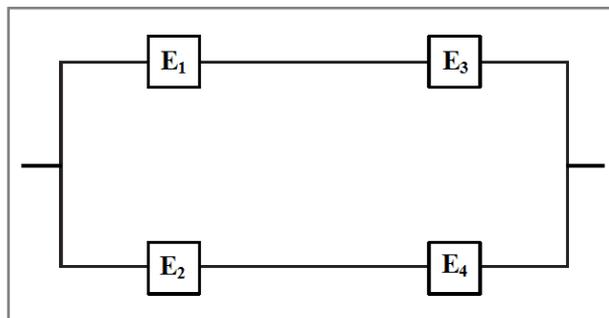
1) Si E_5 est en état de marche, le système devient comme suit:



Il s'agit d'un système parallèle-série, d'où :

$P(\text{Système fonctionne à l'instant } t \mid E_5 \text{ fonctionne à l'instant } t)$ peut être évaluée.

2) Si E_5 est en panne, le système devient comme suit:



Il s'agit d'un système série-parallèle, d'où :

$P(\text{Système fonctionne à l'instant } t \mid E_5 \text{ défaillant à l'instant } t)$ peut être évaluée.

Le théorème des probabilités totales permet d'écrire :

$$R_{\text{Système}}(t) = P(\text{Système fonctionne à l'instant } t \mid E_5 \text{ fonctionne à l'instant } t) \cdot R_{E_5}(t) + P(\text{Système fonctionne à l'instant } t \mid E_5 \text{ défaillant à l'instant } t) \cdot [1 - R_{E_5}(t)]$$

On a alors :

$$R_{\text{Système}}(t) = R_{S|E_5}(t) \cdot R_{E_5}(t) + R_{S|\bar{E}_5}(t) \cdot [1 - R_{E_5}(t)]$$

Où:

$R_{S|E_5}(t)$ est la fiabilité du système à l'instant t sachant E_5 est fiable à l'instant t

$R_{S|\bar{E}_5}(t)$ est la fiabilité du système à l'instant t sachant E_5 est défaillant à l'instant t

$R_{E_5}(t)$ est la fiabilité de E_5 à l'instant t

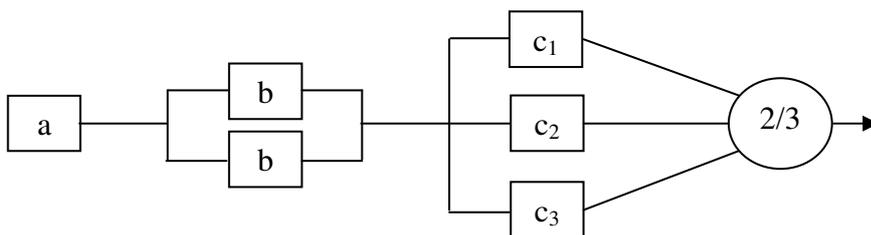
Exemple 3.2 :

Un système de contrôle constitué de 3 sous-systèmes séparés en série, tout les composants suivent la loi exponentielle. Les sous-systèmes sont :

- a) un composant simple a un taux de défaillance de $1 \times 10^{-6} \text{ h}^{-1}$;
- b) deux composants identiques ayant un taux de défaillance de $8 \times 10^{-6} \text{ h}^{-1}$ et que au moins un seul des deux soit fiable pour que le sous-système b soit fiable ;
- c) trois composants ayant des taux de défaillances de $5 \times 10^{-6} \text{ h}^{-1}$, $2 \times 10^{-6} \text{ h}^{-1}$, $10 \times 10^{-6} \text{ h}^{-1}$ et que deux au moins soient bons pour que le sous-système c soit fiable.

- Calculer la fiabilité du système pour une période de 5000h.

Diagramme de fiabilité du système de contrôle:



$$R_S(t) = R_a(t)R_b(t)R_c(t)$$

$$R_a(t) = e^{-\lambda_a t}$$

$$R_b(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda_b t})^2$$

$$R_c(t) = R_{c_1}(t)R_{c_2}(t)\overline{R_{c_3}(t)} + R_{c_1}(t)\overline{R_{c_2}(t)}R_{c_3}(t) + \overline{R_{c_1}(t)}R_{c_2}(t)R_{c_3}(t) + R_{c_1}(t)R_{c_2}(t)\overline{R_{c_3}(t)}$$

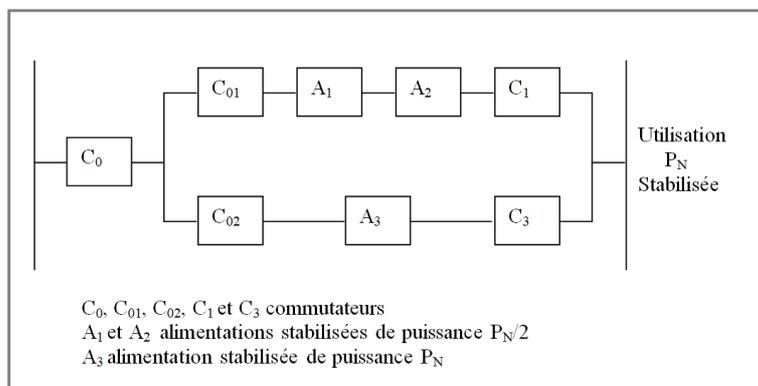
$$R_{c_1}(t) = e^{-\lambda_{c_1} t} \Rightarrow \overline{R_{c_1}(t)} = 1 - e^{-\lambda_{c_1} t}$$

$$R_{c_2}(t) = e^{-\lambda_{c_2} t} \Rightarrow \overline{R_{c_2}(t)} = 1 - e^{-\lambda_{c_2} t}$$

$$R_{c_3}(t) = e^{-\lambda_{c_3} t} \Rightarrow \overline{R_{c_3}(t)} = 1 - e^{-\lambda_{c_3} t}$$

Exemple 3.3 :

Un système d'alimentation électrique stabilisée est réalisé suivant le schéma ci-dessous :



Pour obtenir en utilisation la puissance P_N stabilisée, on peut fonctionner :

- Soit avec A_1 et A_2 en service (C_0, C_{01}, C_1 fermés et C_{02} et C_3 ouverts).
- soit avec A_3 en service (C_0, C_{02}, C_3 fermés et C_{01} et C_1 ouverts).

On souhaite calculer la fiabilité du système pour 2000 heures de fonctionnement de l'ensemble, sachant que l'on prévoit deux cas d'utilisation :

- 1) A_1 et A_2 sont utilisés durant 1000 heures, puis A_3 les autres 1000 heures ;
- 2) On utilise un cycle de fonctionnement de 100 heures d'utilisation de A_1 et A_2 suivi de 10 heures d'utilisation de A_3 , et ainsi de suite durant 2000 heures.

Hypothèse

Pour calculer la fiabilité du système, on est conduit à considérer que tous les composants ont une fiabilité qui suit une loi exponentielle (taux de défaillance constant).

Données

MTBF des commutateurs = 20 000 h.
MTBF des alimentations = 8 000 h.

-Détermination des valeurs de fiabilité

Commutateurs :

MTBF = 20 000 h ; $\lambda = 1/\text{MTBF}$ cas de la loi exponentielle $\lambda = 1/20\,000 = 50 \cdot 10^{-6}$
Fiabilité $R = e^{-\lambda t} = e^{-50 \cdot 10^{-6} \cdot t}$

Alimentation :

MTBF = 8 000 h ; $\lambda = 1/\text{MTBF}$ cas de la loi exponentielle $\lambda = 1/8\,000 = 125 \cdot 10^{-6}$
Fiabilité $R = e^{-\lambda t} = e^{-125 \cdot 10^{-6} \cdot t}$

1-Etude du premier cas :

Branche L_1 et L_2 utilisées durant 1 000 h
Commutateur C_0 utilisé pendant 2 000 h

Fiabilité des commutateurs C_{01}, C_{02}, C_1, C_3

$R = e^{-\lambda t} = e^{-50 \cdot 10^{-6} \cdot t}$ avec $t = 1\,000$ h
 $R = e^{-50 \cdot 10^{-6} \cdot 1000} = e^{-50 \cdot 10^{-3}} = e^{-0.050} = 0.951$

Fiabilité du commutateur C_0

$RC_0 = e^{-\lambda t} = e^{-50 \cdot 10^{-6} \cdot t}$ avec $t = 2\,000$ h
 $RC_0 = e^{-50 \cdot 10^{-6} \cdot 2000} = e^{-100 \cdot 10^{-3}} = e^{-0.1} = 0.905$

Fiabilité des alimentations A_1, A_2, A_3

$R_A = e^{-\lambda t} = e^{-125 \cdot 10^{-6} \cdot t}$ avec $t = 1\,000$ h
 $R_A = e^{-125 \cdot 10^{-6} \cdot 1000} = e^{-125 \cdot 10^{-3}} = e^{-0.125} = 0.8825$

Fiabilité du système :

$$RL_1 = RC_{01}.RA_1.RA_2.RC_1$$

$$RL_1 = 0,951.0,8825.0,8825.0,951 = 0,704$$

$$RL_2 = RC_{02}.RA_3.RC_3 = 0,951.0,8825.0,951 = 0,798$$

$$1-RL_{12} = (1-RL_1).(1-RL_2) = (1-0,704).(1-0,798) = 0,296.0,202 = 0,0598$$

$$D'où RL_{12} = 1-0,0598 = 0,940$$

$$R_{systeme} = RC_0 . RL_{12} = 0,905.0,940 = 0,85$$

R_{système} = 0.85

2-Etude du second cas :

dans le cas d'une loi exponentielle, la fiabilité ne dépend pas de l'age des composants mais de la durée de leur mission. On a donc pour :

La branche L₁, une durée de mission de 100 h ;

La branche L₂, une durée de mission de 10 h,

Alors que le commutateur C₀ est toujours utilisé pendant 2 000 h.

Fiabilité de la ligne L₁ :

Fiabilité des commutateurs C₀₁, C₁, durée de mission 100 h :

$$R = e^{-\lambda t} = e^{-50 \cdot 10^{-6} \cdot t} \quad \text{avec } t = 100 \text{ h}$$

$$R = e^{-50 \cdot 10^{-6} \cdot 100} = e^{-50 \cdot 10^{-4}} = e^{-0.0050} = 0.995$$

Fiabilité des alimentations A₁, A₂ durée de mission 100 h :

$$R_A = e^{-\lambda t} = e^{-125 \cdot 10^{-6} \cdot t} \quad \text{avec } t = 100 \text{ h}$$

$$R_A = e^{-125 \cdot 10^{-6} \cdot 100} = e^{-125 \cdot 10^{-4}} = e^{-0.0125} = 0.987$$

$$\text{Fiabilité } L_1 = RL_1 = RC_{01}.RA_1.RA_2.RC_1 = 0,995^2 . 0,997^2 = 0,964$$

Fiabilité de la ligne L₂ :

Fiabilité des commutateurs C₀₂, C₃, durée de mission 10 h :

$$R = e^{-\lambda t} = e^{-50 \cdot 10^{-6} \cdot t} \quad \text{avec } t = 10 \text{ h}$$

$$R = e^{-50 \cdot 10^{-6} \cdot 10} = e^{-50 \cdot 10^{-5}} = e^{-0.00050} = 0.9995$$

Fiabilité des alimentations A₁, A₂ durée de mission 10 h :

$$R_A = e^{-\lambda t} = e^{-125 \cdot 10^{-6} \cdot t} \quad \text{avec } t = 10 \text{ h}$$

$$R_A = e^{-125 \cdot 10^{-6} \cdot 10} = e^{-125 \cdot 10^{-5}} = e^{-0.00125} = 0.9987$$

Fiabilité du système :

$$RL_2 = RC_{02}.RA_3.RC_3 = 0,9995^2.0,9987 = 0,998$$

$$1-RL_{12} = (1-RL_1).(1-RL_2) = (1-0,964).(1-0,998) = 0,036.0,002 = 72.10^{-6}$$

$$D'où RL_{12} = 0,9999$$

$$R_{systeme} = RC_0.RL_{12} = 0,905.0,9999 = 0,905$$

R_{système} = 0,905

Chapitre IV: Maintenabilité des systèmes

IV.1. Introduction

Accroître la productivité ne consiste pas forcément à investir dans des équipements fortement automatisés. Par contre elle peut être améliorée en :

- réduisant les stocks ;
- augmentant la qualité ;
- améliorant les résultats de maintenance.

Après analyse de la disponibilité, nous pouvons dire que la maintenabilité est la composante principale de la maintenance. Elle peut se traduire comme étant une caractéristique permettant d'assurer l'aptitude à la maintenance dans les meilleures conditions possibles.

« Dans les conditions d'utilisation données pour lesquelles il a été conçu, la maintenabilité est l'aptitude d'un bien à être maintenu ou rétabli dans un état dans lequel il peut accomplir une fonction requise, lorsque la maintenance est accomplie dans des conditions données, avec des procédures et des moyens prescrits. » (NF EN 13306).

IV.2. Les critères de maintenabilité :

Liste de critères à considérer avant achat d'un équipement industriel :

A) Critères liés à la conception d'un bien :

- Interchangeabilité, normalisation des composants, standardisation des matériels et de leurs éléments.
- Indicateurs de dégradation, de défaillance et définition de leurs seuils ;
- Modularité de l'architecture, des parties « commande » et « opératives » ;
- Compteurs d'unités d'usage ;
- Technologie classique et en nombre limité ;
- Temps de localisation, de diagnostic, de dépannage ;
- Aptitude au démontage (accès, outillages non spéciaux) ;
- Pas de réglages complexes après démontage.

B) Critères liés aux informations :

- Valeur des fiches techniques ;
- Existence de notices d'installation, d'entretien....

C) Critères liés au suivi d'un bien :

- Evolution des fabrications ;
- Efficacité et sérieux du service après vente du fournisseur ;
- Facilité d'obtention des rechanges ;

D) Critères liés à la gestion de l'utilisateur :

- Homogénéité du parc (nature de technologie)
- Conception de l'installation (accès, reconfiguration possible...)
- Moyens à dispositions (logistique)
- Dossier machine à jour.

IV.3. Les indicateurs :

L'indicateur privilégié du maintenancier correspond aux temps d'immobilisation. Ces temps d'immobilisation se décomposent en 2 grandes parties.

A) Les délais d'intervention : Ils sont relatifs à l'organisation pour assurer la fonction maintenance.

Exemple : Si la maintenance de premier niveau (taches et interventions simples) est effectuée par l'opérateur lui-même, ce délai devient nul pour les micros défaillances.

B) La durée d'intervention : Elle peut être améliorée par l'aide au diagnostic. En attendant la banalisation des systèmes experts, un simple petit microprocesseur intégré dans l'équipement peut déjà indiquer, en cas de défaillance, les composants ou éléments en cause.

IV.3.1. Cycle de maintenance d'un équipement réparable

La figure 4.1 illustre les temps caractéristiques de réparation et maintenabilité, où nous pouvons distinguer les périodes suivantes:

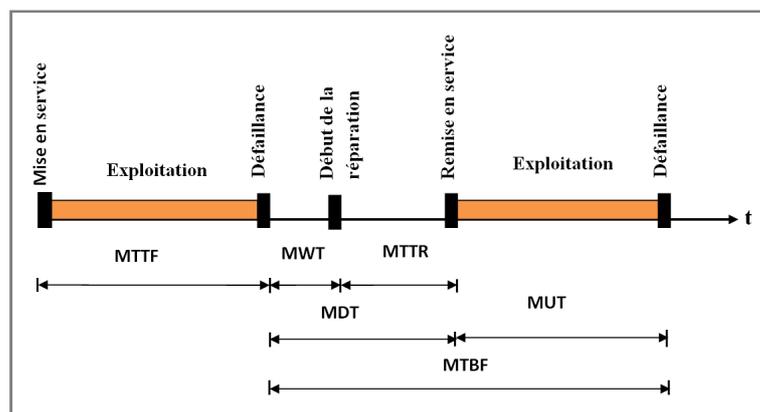


Fig.4.1. Cycle de maintenance d'un équipement réparable

- **MTTF** (Mean Time To first Failure): espérance du temps moyen à la première défaillance (i.e. temps moyen d'apparition de la première défaillance après la mise en service de l'équipement). Pour les systèmes non réparables, le MTTF correspond à l'espérance de la durée de vie opérationnelle.
- **MTBF** (Mean Time Between Failure): espérance du temps entre deux défaillances successives du même composant, y compris les arrêts pendant la maintenance (i.e. ce temps est défini par l'intervalle entre les instants de début des deux défaillances successives). Le MTBF est divisé en une partie opérationnelle, appelée temps moyen de fonctionnement MUT, et une partie non-opérationnelle appelée temps moyen d'arrêt MDT.
- **MUT** (Mean Up Time): temps moyen de fonctionnement, pendant lequel l'équipement est opérationnel.
- **MDT** (Mean Down Time): temps moyen d'arrêt ; il s'agit de l'intervalle non-opérationnel, compté à partir du début de la défaillance et jusqu'à la remise en service

en fin de maintenance. le temps moyen d'arrêt MDT est à son tour divisé en deux parties : temps moyen d'attente MWT et temps moyen de réparation MTTR.

- **MWT** (Mean Waiting Time): temps moyen d'attente dû au délai de découverte de la défaillance, aux procédures administratives et à l'attente des équipes et des pièces commandées ou transportée.
- **MTTR** (Mean Time To Repair): temps moyen de réparation (i.e. durée nécessaire pour exécuter l'intervention, ayant mis en place les moyens humains et matériels, jusqu'à la remise en service).

IV.4. Objectif de maintenabilité :

Il est recommandé de se fixer un paramètre quantifié à chaque fois que cela sera possible. Quelques exemples d'objectifs :

Maintenance corrective :

- M.T.T.R. (soit la moyenne de la distribution des temps de réparation).
- La médiane (elle représente la durée de 50% des taches de réparation).
- La durée maximale des taches de réparation pour une probabilité donnée.

Maintenance préventive :

-Pour la maintenance préventive systématique il convient d'indiquer la périodicité admissible des différentes interventions, et la durée admissible des taches pour chaque périodicité envisagée.

Pour la maintenance préventive conditionnelle il convient d'indiquer le temps de la surveillance.

L'objectif de maintenabilité peut aussi être spécifié sous la forme d'un temps cumulé maximal d'immobilisation pour une période d'observation donnée.

Le temps cumulé d'immobilisation (*TCI*) est la somme des temps nécessaires aux interventions de maintenance corrective (M.C) et aux interventions de maintenance préventive (M.P).

$$TCI = Nb(c)M_c + Nb(p)M_p$$

Nb(c) : nombre d'interventions de maintenance corrective durant la mission ou la période d'observation considérée.

M_c : moyenne des temps de réparation (*MTTR*).

Nb(p) : nombre d'interventions de maintenance préventive durant la mission ou la période d'observation considérée.

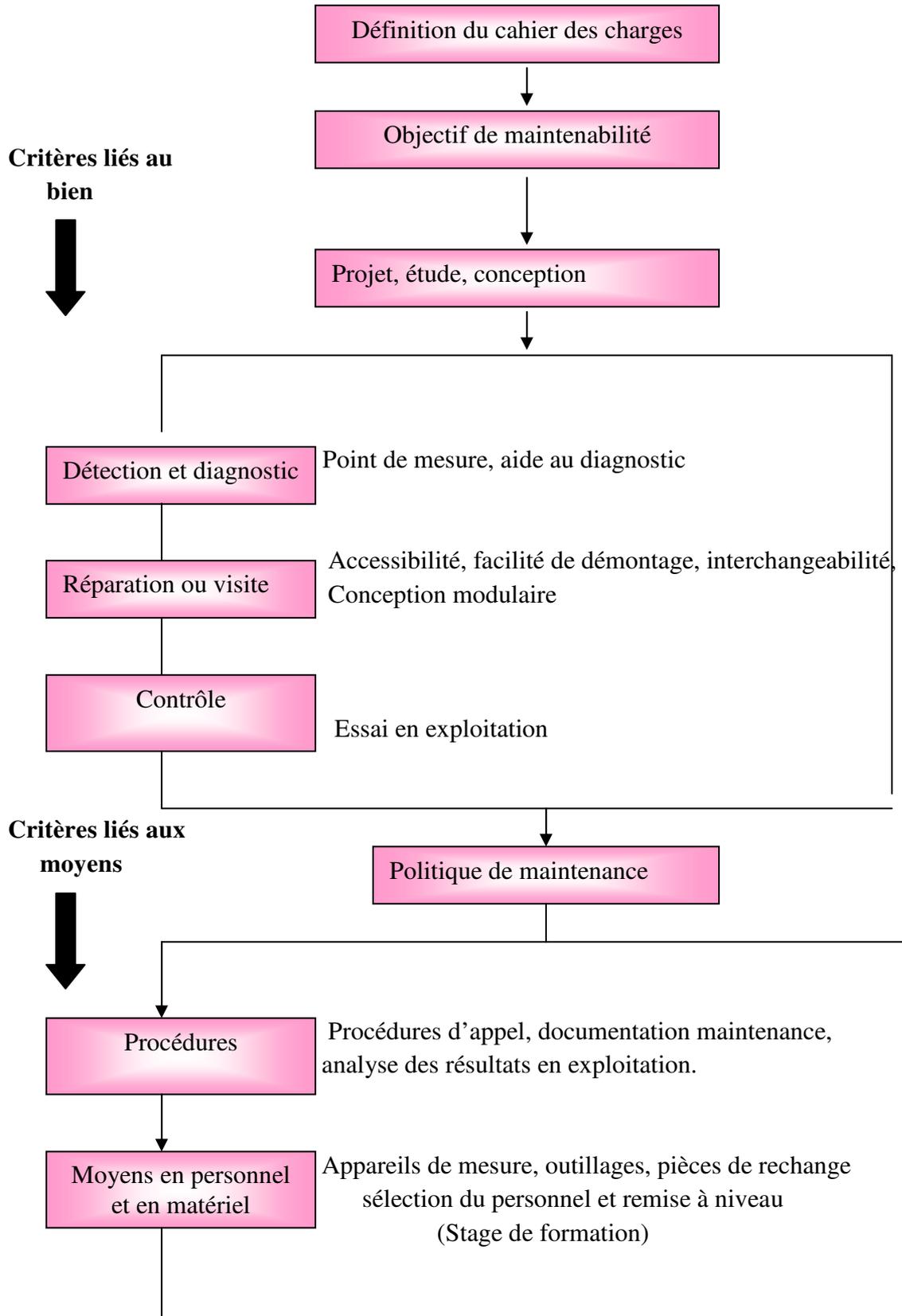
M_p : moyenne des temps pour les interventions de maintenance préventive.

Remarque : *Nb(c)* et *Nb(p)* sont des paramètres de fiabilité.

IV.5. Approche d'une étude de maintenabilité :

Une étude de maintenabilité doit être développée dès le stade de la conception des équipements ou des projets.

IV.5.1. Mise en évidence des éléments qui permettront d'accroître la maintenabilité :



IV.5.2. Diminution de la durée de détection des défaillances :

-Dispositifs de vérification :

Appareils de mesure (débit, pression, température, etc...), voyants, niveau à visualiser, dispositif d'essai ou d'étalonnage.

Les dispositifs de vérification permettent de suivre le bon fonctionnement des matériels.

- Dispositifs de recherche de défauts :

Les dispositifs de recherche de défauts peuvent être manuels ou automatiques.

IV.5.3. Diminution de la durée du diagnostic :

Les dispositifs de vérification permettent aussi une réduction de la durée de diagnostic.

D'autres éléments interviennent :

-Le repérage et l'accessibilité des points de mesures ;

-La qualité de la documentation de maintenance ;

-Les procédures logiques, méthodiques de vérification (logigramme de dépannage, tableau de diagnostic, etc.) ;

-Connaissance des probabilités de défaillance (arbre de défaillance).

IV.5.4. Diminution de la durée de réparation

Il est possible de rendre minimale la durée d'une intervention de maintenance en agissant sur :

-L'accessibilité :

Remarque : pour améliorer l'accessibilité d'un élément dans un ensemble il sera indispensable de prendre en compte la probabilité de remplacement, l'encombrement, le poids, la fragilité.

-La facilité de démontage et de remontage : Priorité aux interventions fréquents.

-L'interchangeabilité :

Remarque : Une étude ergonomique du poste de travail peut s'avérer nécessaire si l'intervention est répétitive.

IV.5.5. Diminution de la durée nécessaire au contrôle :

La durée de la phase de contrôle d'un matériel peut être diminuée par :

-Les possibilités d'essais en exploitation à l'aide de vérification (ou de contrôle incorporés), d'appareils de mesures spécifiques conçus pour faciliter la maintenance et le contrôle.

-La connaissance des limites de tolérances admissibles des caractéristiques à mesurer.

IV.6. Approche mathématique de la maintenabilité $M(t)$

La maintenabilité c'est le complément à 1 de la probabilité pour que le système ne soit pas réparé sur l'intervalle $[0, t]$, sachant qu'il est défaillant à l'instant $t = 0$.

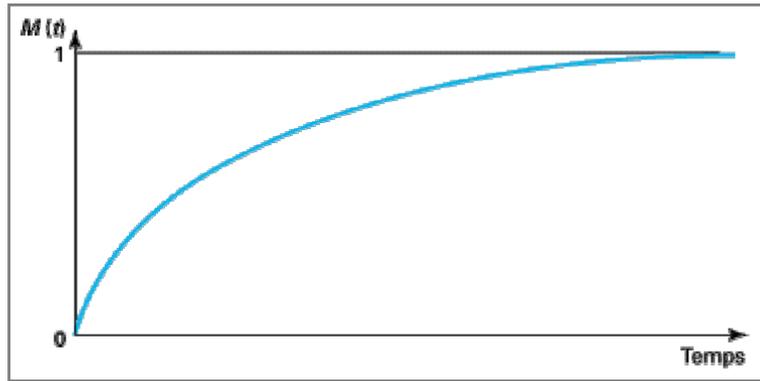


Fig.4.2. Représentation graphique de la fonction de maintenabilité

- La variable aléatoire est le temps de réparation et la densité de probabilité du temps de réparation est $g(t)$.

$$M(t) = P(\text{entité réparée sur } [0, t])$$

$M(t)$ est une fonction non décroissante

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = 1$$

La fonction de répartition est notée :

$$M(t) = \int_0^t g(t) dt = 1 - e^{-\int_0^t \mu(t) dt}$$

Où $\mu(t)$ est le taux de réparation :

$$\mu(t) = \frac{g(t)}{1 - M(t)}$$

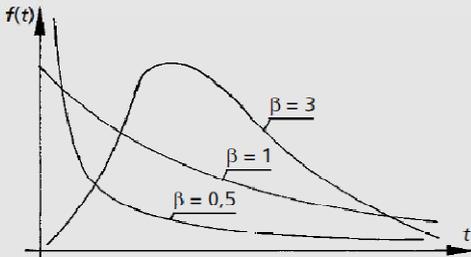
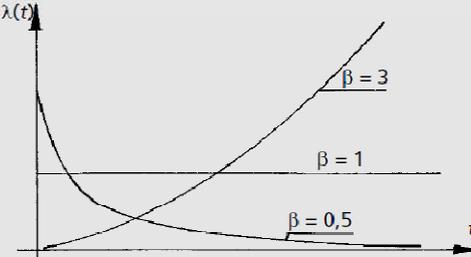
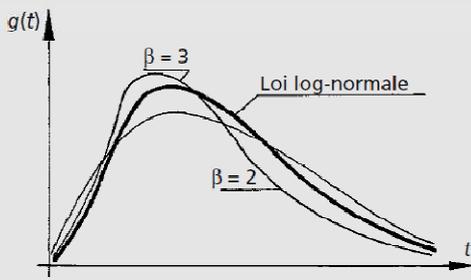
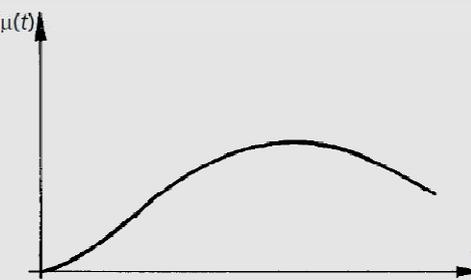
Le temps moyen de réparation MTTR est donné par:

$$MTTR = \int_0^{\infty} t \cdot g(t) dt = \int_0^{\infty} [1 - M(t)] dt$$

IV.6.1. Comparaison Fiabilité-Maintenabilité

Cette comparaison de ces deux analyses est synthétisée au tableau 4.1

Tableau 4.1. Comparaison Fiabilité-Maintenabilité

Fiabilité	Maintenabilité
Probabilité de « durée de bon fonctionnement »	Probabilité de « durée de réparation »
$R(t) = P(T_p > t)$	$M(t) = P(T_R < t)$
Variable aléatoire : temps de fonctionnement	Variable aléatoire : temps de réparation
Densité de probabilité du temps avant défaillance : $f(t)$	Densité de probabilité du temps de réparation : $g(t)$
Fiabilité : $R(t) = \int_t^{+\infty} f(t)dt = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$	Maintenabilité : $M(t) = \int_0^t g(t)dt = 1 - e^{-\int_0^t \mu(t)dt}$
Taux de défaillance : $\lambda(t)$: $\lambda(t)dt = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$	Taux de réparation $\mu(t)$: $\mu(t)dt = \frac{g(t)}{1 - M(t)}$
MTBF = mean time between failures : $MTBF = \int_0^{+\infty} t \cdot f(t)dt = \int_0^{+\infty} R(t)dt$	MTTR = mean time to repair : $MTTR = \int_0^{+\infty} t \cdot g(t)dt$
Relation fondamentale : $f(t) = \lambda(t) \cdot e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$	Relation fondamentale : $g(t) = \mu(t) \cdot e^{-\int_0^t \mu(t)dt}$
Lois usuelles : si $\lambda = \text{constant}$, loi exponentielle : $R(t) = e^{-\lambda t}$ si $\lambda(t)$ est variable, loi de Weibull (loi à 3 paramètres)	Lois usuelles : si $\mu = \text{constant}$, loi exponentielle : $M(t) = 1 - e^{-\mu t}$ si $\mu(t)$ est variable, loi log-normale (distribution fréquente des durées d'interventions de maintenance), paramètres m et σ
	
	
Application : systèmes réparables ou non	Application : systèmes réparables

Exemple 4.1: (hypothèse exponentielle)

L'ensemble des résultats observés sur des pompes d'une entreprise spécialisé dans le traitement des eaux résiduaires au niveaux des tâches de réparation figurent dans le tableau suivant:

TTR : temps de réparation en h. (x_i)	Nombre d'interventions (n_i)
0.5	3
1	10
1.5	12
2	5
2.5	2

Supposons que le temps de réparation suit la loi exponentielle, représenter graphiquement la fonction de la maintenabilité.

- Hypothèse exponentielle, alors la fonction de la maintenabilité est représentée par la fonction de répartition de la loi exponentielle, selon la formule :

$$M(t) = 1 - e^{-\mu t}$$

Où le taux de réparation: $\mu = \frac{1}{MTTR}$

Calcul de la moyenne: $MTTR = \bar{X} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = 1.39 \Rightarrow \mu = \frac{1}{1.39} = 0.72$

$$M(t) = 1 - e^{-0.72t}$$

D'en déduire la courbe représentative de la fonction de maintenabilité $M(t)$ (fig.4.3), c'est une fonction croissante du temps.

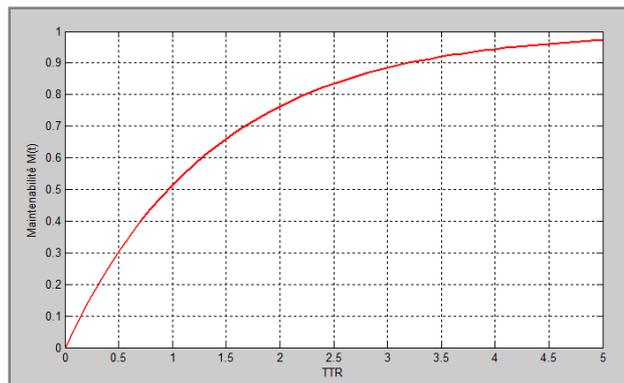


Fig. 4.3. Maintenabilité des pompes en fonction de TTR

Exemple 4.2: (Loi normale)

Une révision mensuelle est programmée sur un matériel important fonctionnant en journée continue. Le tableau ci-dessous représente un échantillonnage des 100 dernières interventions:

1) Calculer la moyenne et l'écart type

- 2) Sachant que les durées de réparation suit une loi normale, tracer la fonction de densité de probabilité
 3) Quelle est la maintenabilité ou la probabilité de réparer ce matériel en 5 h ?

TTR : temps de réparation en h. (x_i)	Nombre d'interventions (n_i)
0.5	5
1.5	10
2.5	28
3.5	32
4.5	15
5.5	5
6.5	5

1) Calcul de la moyenne: $MTTR = m = \bar{X} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = 3.27$

Calcul de l'écart type: $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^2 n_i}{\sum n_i} = 1.8771 \Rightarrow \sigma = 1.37$

2) La densité de probabilité est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2}$$

Dont la distribution des durées d'intervention autour de la moyenne est donnée par la figure 4.4

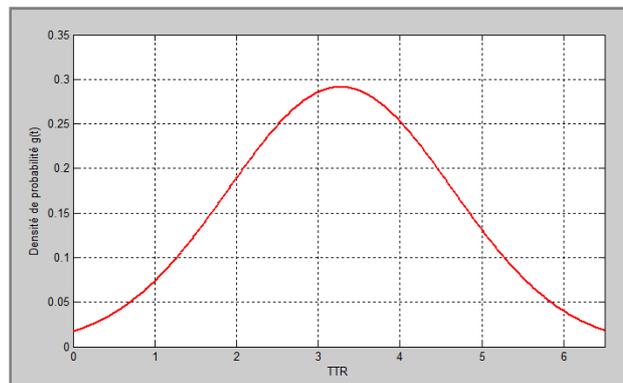


Figure 4.4. Fonction de densité de probabilité- loi normale

3) Probabilité de réparer ce matériel à $t=5$ h:

$$U = \frac{t - m}{\sigma} = \frac{5 - 3.27}{1.37} = 1.26 \Rightarrow F(1.26) = 0.8962 \text{ (voir le tableau 2.1)}$$

$$\text{D'où: } M(t=5) = 0.8962$$

Exemple 4.2: (Loi lognormale)

La durée d'intervention sur un équipement industriel, mesurée en heures, suit une loi lognormale de paramètres: $m = 2$ et $\sigma = 0.6$.

- 1) Tracer la fonction de densité de probabilité
- 2) Calculer la moyenne de la durée d'intervention et $M(t)$ à t égal la moyenne.

1) La densité de probabilité est comme suit :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln t - m}{\sigma} \right)^2 \right]$$

Alors, la représentation graphique de la densité de probabilité est donnée par la figure 4.5.

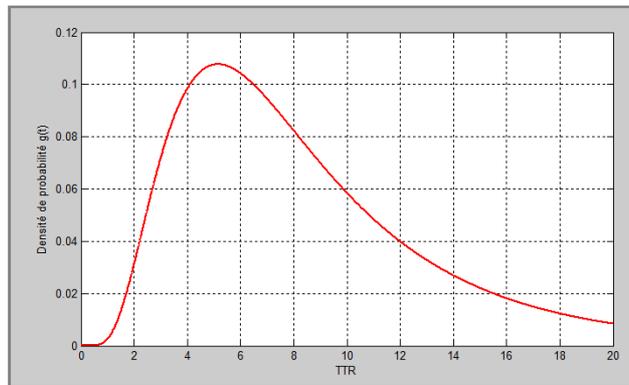


Figure 4.4. Fonction de densité de probabilité - Loi lognormale

2) Calcul de la moyenne de la durée d'intervention et $M(t)$:

$$\text{Moyenne} = \exp \left[m + \frac{\sigma^2}{2} \right] = \exp \left[2 + \frac{(0.6)^2}{2} \right] = 8.85 \text{ heures}$$

$$U = \frac{\ln(t) - 2}{0.6} = \frac{\ln(8.85) - 2}{0.6} = 0.3 \Rightarrow F(0.3) = 0.6179 \text{ (voir le tableau 2.1)}$$

$$\text{D'où: } M(t = 8.85) = 0.6179$$

IV.6.2. Maintenabilité d'un système constitué de plusieurs composants

- **Composants en séries**

$$M(t) = \prod_{i=1}^n M_i(t)$$

Dans le cas exponentiel:

$$M(t) = \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\mu_i t})$$

- **Composants en parallèles**

$$M(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - M_i(t))$$

Si les taux de réparations sont constants :

$$M(t) = 1 - e^{-\sum_i^n \mu_i t}$$

Chapitre V: Disponibilité des systèmes

V.1. Définition de la disponibilité $D(t)$

« Aptitude d'un bien à être en état d'accomplir une fonction requise dans des conditions données, à un instant donné ou durant un intervalle de temps donné, en supposant que la fourniture des moyens extérieurs est assurée. »

$$D(t) = P(\text{entité non défaillant à } t)$$

$$1 - D(t) = \text{indisponibilité}$$

Si l'entité n'est pas réparable, $D(t) = R(t)$

V.2. Les sortes de disponibilité

V.2.1. Disponibilité moyenne

La disponibilité moyenne sur un intervalle de temps donné peut être évaluée par les rapports suivants :

$$D_M = \text{temps de disponibilité} / (\text{temps de disponibilité} + \text{temps d'indisponibilité})$$

$$D_M = \text{TCBF} / (\text{TCBF} + \text{TCI})$$

Où :

TCBF = Temps cumulé de bon fonctionnement.

TCI = Temps cumulé d'immobilisation

Remarque :

Le temps cumulé d'immobilisation comprend les temps d'intervention et les temps logistiques.

V.2.2. Disponibilité intrinsèque

Cette disponibilité est évaluée en prenant en compte les moyennes de bon fonctionnement et les moyennes de réparation ce qui donne:

$$D_M = \text{MUT} / (\text{MUT} + \text{MTTR})$$

Avec :

MUT = moyenne de temps de bon fonctionnement

MTTR = moyenne des temps d'intervention de maintenance

Cette disponibilité correspond à des conditions idéales, c'est à dire avec un support logistique parfait.

Relation : MUT et TCBF d'une part.

MTTR et TCI d'autre part.

$$\text{MUT} = \frac{\text{TCBF}}{\text{NC}} ; \text{MTTR} = \frac{\text{TCI}}{\text{NC}}$$

Avec: NC = nombre d'interventions de maintenance avec immobilisation.

V.2.3. Disponibilité opérationnelle

Pour cette mesure, sont prise en compte les temps logistiques ce qui donne :

$$D_o = \frac{MUT}{MUT + MDT}$$

V.2.4. disponibilité instantanée

Pour un système avec l'hypothèse d'un taux de défaillance λ constant et d'un taux de réparation μ constant, on montre que la disponibilité instantanée a pour expression :

$$D(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$

V.2.5. disponibilité asymptotique

Lorsque λ et μ sont indépendants du temps on constate que la disponibilité tend vers une valeur constante. Cette valeur est souvent dénommée disponibilité asymptotique et se note A_∞ elle est égale à :

$$A_\infty = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu}}$$

Ou encore, lorsque le temps t tend vers l'infini, la limite D de la fonction $D(t)$ est égale à :

$$D = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Le résultat est valable lorsque λ est constant, c-à-d pendant la période de vie utile de matériel, ce la correspond à la loi exponentielle. Avec ces hypothèse nous avons :

$$MUT = \frac{1}{\lambda}, \quad MTTR = \frac{1}{\mu}$$

Ce qui entraîne :

$$D = \frac{MUT}{MUT + MTTR} = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + 1/\mu} = \frac{1/\lambda}{\mu/\lambda\mu + \lambda/\lambda\mu} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Avec :

- λ : taux instantané de défaillance du système ;
- μ : taux instantané de réparation du système.

V.3.La logistique dans l'entreprise

Le concept de logistique a émergé dans l'entreprise il y a quelques années comme l'une des fonctions clés aux quelles le management doit s'intéresser. Il ne s'agit pas d'un concept nouveau, car les organisations les plus anciennes « faisaient de la logistique », mais la complexification des tâches, des produits des réseaux de circulation des bien, de la distribution et de l'assistance après-vente, la nécessité d'améliorer sans cesse la qualité, ont provoqué des évolutions de la logistique, évolutions qui se poursuivent à tel point que la logistique requiert des formations spécifiques.

V.3.1. Rôle de la fonction logistique

La logistique peut être définie comme l'art et la manière de concevoir, coordonner, gérer et contrôler l'ensemble des flux de produits et d'informations, au travers des activités (figure 5.1) :

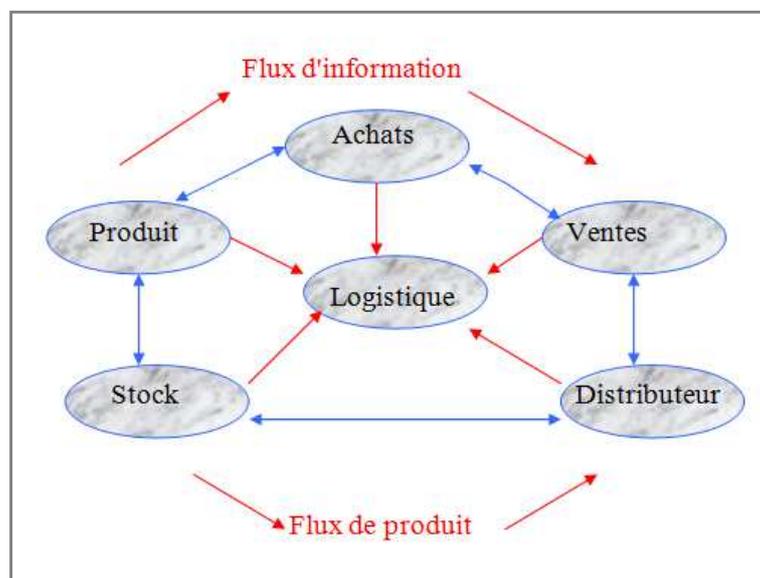
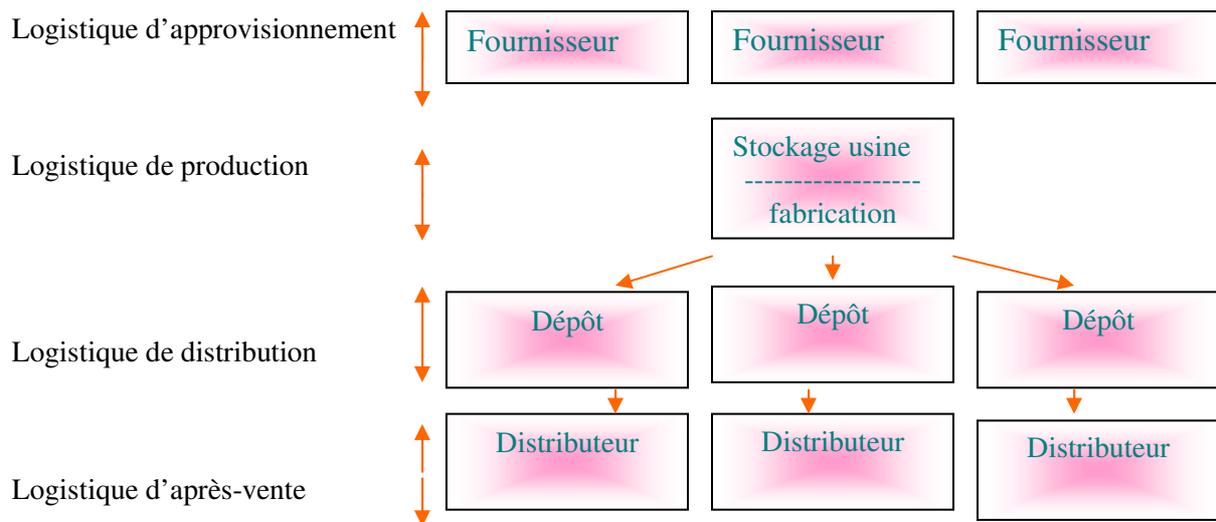


Fig.5.1. flux de produits et d'information

- D'étude ;
- D'approvisionnement et d'achat ;
- De production ;
- De stockage ;
- De distribution ;
- De vente et d'après-vente ;

La logistique est un état d'esprit, une façon d'aborder les problèmes de circulation des flux de matières, de produits et d'information afin d'assurer au moindre coût une qualité globale donnée (figure 5.1)



La logistique assure un dialogue avec certains nombres d'autres fonctions notamment :

***Les études :**

Prise en compte des contraintes logistiques pendant les choix des solutions;

***Les achats :**

Participation au choix des fournisseurs, conception des équipements de manutentions et de stockage;

***La production :**

Planification en conciliant les objectifs des vendeurs avec les contraintes des équipements et ressources humaines et financières de fabrication, résolution des problèmes de circulation des produits;

***Le stockage :**

Détermination des stockages les plus réduits possible les mieux adaptés et les moins coûteuse;

***La distribution :**

Participation au choix des systèmes de transport et de distribution des produits;

***La vente :**

Préconisation pour l'élaboration et la mise en place des systèmes de prévision des ventes et pour le conditionnement et l'emballage ;

***L'après vente :** Maintenance des produits.

Mais il y a des freins à la performance logistique due notamment à :

-L'écoulement des flux : barrières au transport, contraintes administratives, disparité des réseaux existants;

- La performance insuffisante des systèmes d'information ;

-La reconnaissance, dans l'entreprise de l'importance et du rôle de la fonction logistique, de son aspect transversal consistant à l'impliquer de puis la conception du produit jusqu'à son usage par le destinataire final.

-Néanmoins, la logistique est une source d'amélioration dans l'entreprise grâce au gain de coûts qu'elle peut apporter, aide à la pénétration des marchés et à la détermination des besoins de la clientèle.

V.3.2. Logistique et stratégie de l'entreprise

Le problème stratégique consiste souvent à créer des avantages concurrentiels pour les produits que l'on commercialise, pour l'essentiel ces avantages peuvent être ;

-Des coûts moins élevés que ceux des concurrents directs, souvent obtenus par une production de masse, des ventes standardisées et des effets d'expérience, permettant des prix de vente compétitifs ; dans de tels cas la logistique est surtout une question de transport, de stockage, de liaison avec les distributeurs et l'ensemble des opérations logistiques doit être réalisé au moindre coût, s'entendant à la fois dépenses directes et amortissement des installations et des équipements;

-Des produits différenciés réellement d'une analyse marketing ; il s'agit de jouer sur les performances, la fiabilité ; la durée, le service...la logistique concourt à l'atteinte de cet objectif par la fiabilité, le coût logistique est alors moins important que la qualité ;

V.3.3. logistique et gestion des flux

Si les objectifs de la logistique concernent la gestion des flux matériels.

Elle s'appuie sur la gestion de flux d'information ou flux immatériels.

On indique sur la figure 5.2 une schématisation dans le cas d'un processus industriel

IV.4. Disponibilité d'un système constitué de plusieurs composants

- **Composants en séries**

$$D_i(\infty) = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}$$

$$D_i(\infty) = \prod_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}$$

- **Composants en parallèles**

$$D(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - D_i(t))$$

Si les taux de réparations sont constants :

$$D(\infty) = 1 - \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \right)$$

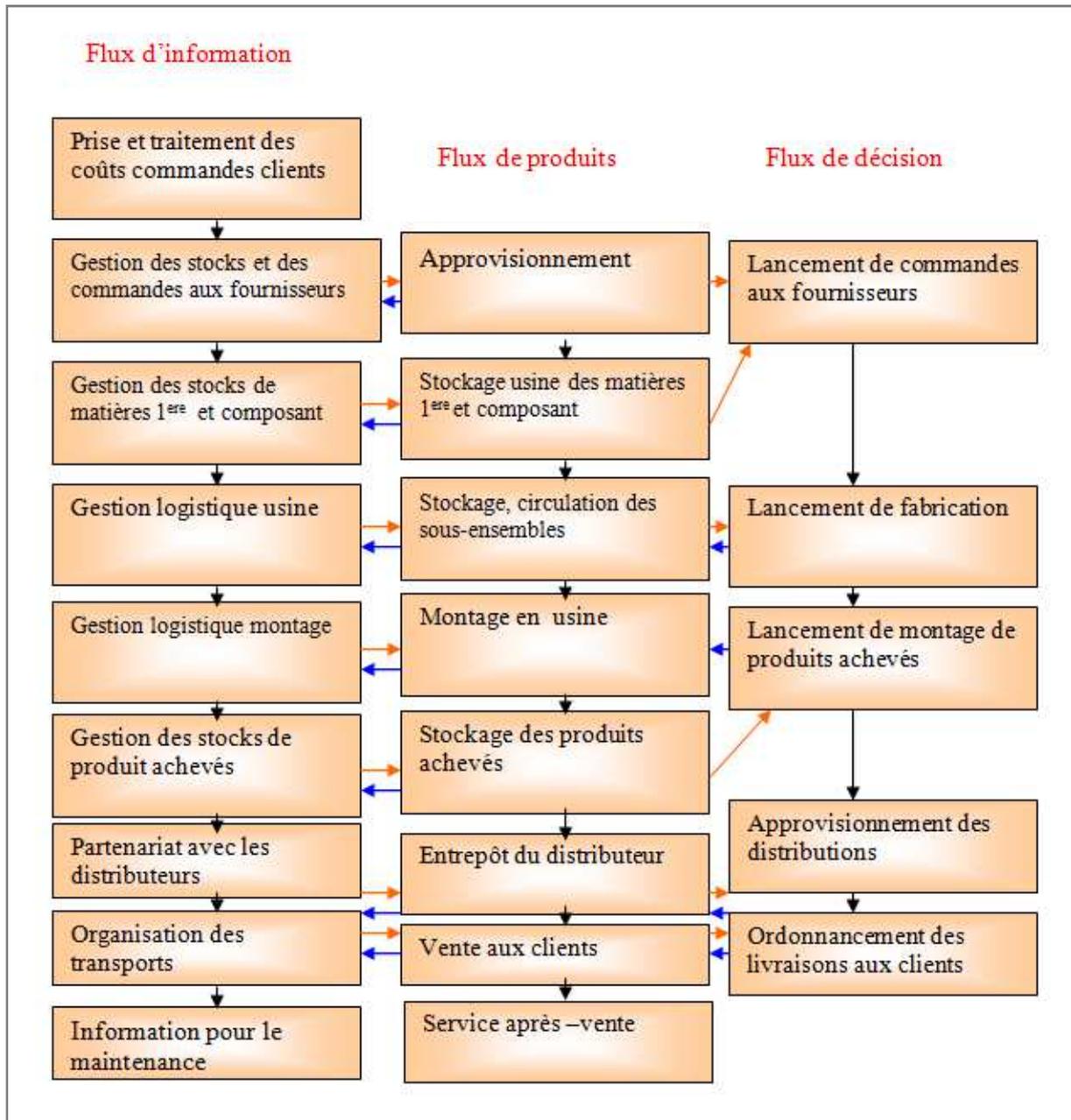


Fig.5.2 : schéma simplifié des flux et processus de décision

IV.5. Aspect économique (Optimisation du coût total : de Maintenance et d'indisponibilité)

Optimiser la politique de maintenance à partir d'une loi de fiabilité ne suffit pas. Il faut également réaliser une analyse économique.

Le coût de maintenance et le coût d'indisponibilité (dû à la défaillance) varient en sens inverse, dans la mesure où la réduction des temps d'indisponibilité est le résultat d'une maintenance préventive plus efficace (figure 5.3).

On sera sensiblement à l'optimum lorsque :

$$\text{L'espérance du coût de maintenance} \approx \text{L'espérance du coût d'indisponibilité}$$

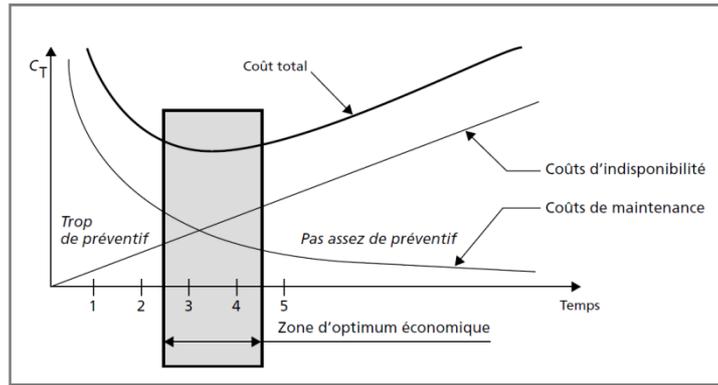


Fig.5.3. Optimum économique

L'optimum du coût total varie avec le vieillissement du matériel. L'optimisation de la maintenance sera donc d'autant meilleure que l'on aura mieux anticipé le comportement en fiabilité du matériel par des calculs de durée de vie. Anticiper ce comportement est impossible sans un retour d'expérience de qualité.

Exemple (Optimisation d'une période d'intervention systématique)

A partir des données statistiques d'un composant, le tracé de Weibull permet de déterminer la loi de fiabilité de ce composant caractérisée par $\beta = 2.26$; $\eta = 382.38$ heures, dont la représentation graphique de la fonction de fiabilité est donnée par la figure 5.4.

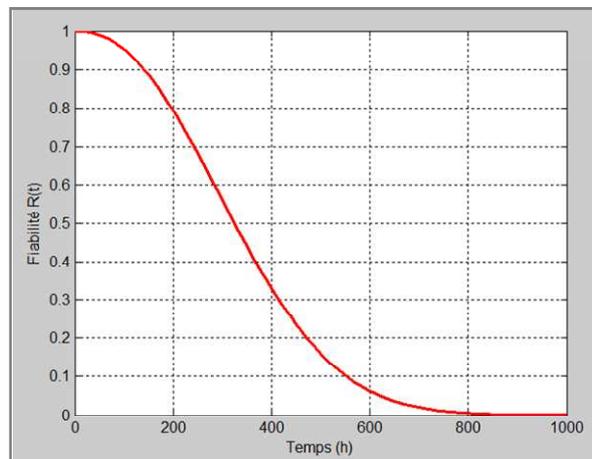


Fig.5.4. Courbe de fiabilité

$\beta = 2.26$ signifie que la détérioration du composant est due à un phénomène de fatigue. La maintenance systématique est donc possible.

Dans notre cas il existe deux conséquences: la première qui correspond à la non-défaillance du composant jusqu'à la période du remplacement systématique (T), ce qui implique un coût de remplacement systématique (CR), et la seconde qui correspond à la défaillance du composant avant le remplacement systématique, ce qui implique un coût de défaillance (CF). Il s'ensuit que le coût total du composant a pour valeur espérée (ECT):

$$ECT = \frac{CR \cdot R(T) + CF \cdot (1 - R(T))}{T \cdot R(T) + \int_0^T t \cdot f(t) dt}$$

Supposons que les coûts de défaillance et de remplacement systématique sont donnés comme suit:

- **Le coût de défaillance (CF)** = coût de produit perdu (CPP)+ coût d'arrêt (CA)+ coût de pièce de rechange (CPR) + coût de maintenance (CM) + coût de dommage supplémentaire (CDS)
- **Le coût de remplacement systématique (CR)** = coût de maintenance (CM) + coût de pièce de rechange (CPR)

$$CF = CPP + CA + CPR + CM + CDS = 50000DA$$

$$CR = CM + CPR = 4000DA$$

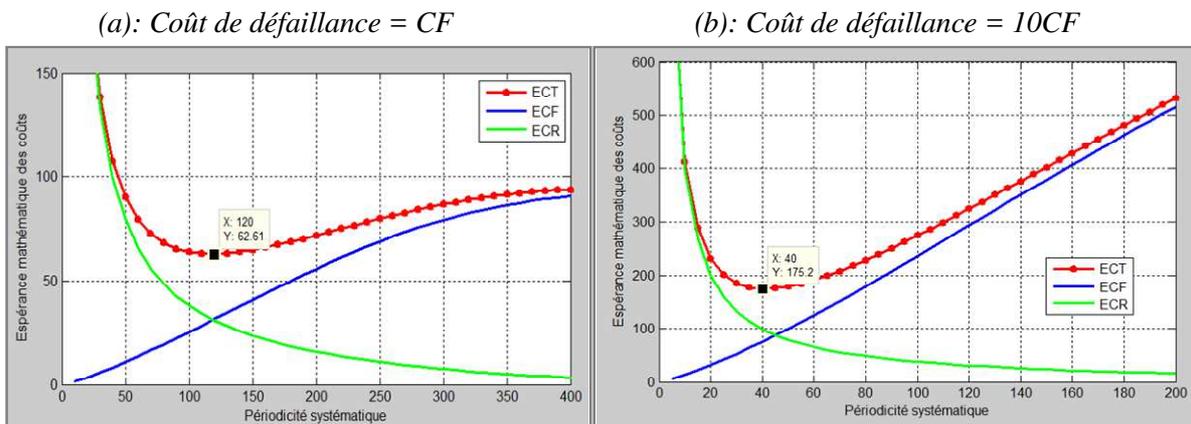


Fig.5.6.: *Esperance des coûts en fonction de l'intervalle entre intervention systématique*

La figure 5.6 montre l'évolution du coût total et de ses composantes, en fonction de l'intervalle entre interventions systématique. Tout d'abord, en analysant la contribution de chacun des coûts dans le coût total, on observe que lorsque l'intervalle entre interventions augmente:

- L'espérance du coût de défaillance (ECF) augmente puisque le problème de défaillance (défaut) croit entre deux interventions et la probabilité de défaillance augmente.
- L'espérance du coût de remplacement (ECR) diminue puisque l'on intervient moins fréquemment.

Avec les valeurs mentionnées ci-dessus, on obtient une période optimale de 120h entre interventions avec une espérance du coût minimum égale à 62.61 DA/h (fig.5.6.a). On peut remarquer aussi que l'augmentation du coût de défaillance mène à réduire l'intervalle de temps entre interventions. Si on prend par exemple un coût de défaillance égal à 10CF (fig.5.6.b), on trouve un intervalle optimal égal à 40h avec une espérance du coût minimum égale à 175.2 DA/h.

Chapitre VI: Sureté de fonctionnement (SdF)

VI.1. Définition

Norme NF X 60-010: la sûreté de fonctionnement est l'ensemble des aptitudes d'un bien qui lui permettent de remplir sa fonction, au moment voulu, pendant la durée prévue, sans dommage pour lui même et son environnement. Elle se caractérise par 4 paramètres: fiabilité, maintenabilité, disponibilité et sécurité.

- ❖ **Sécurité** : aptitude d'une entité à éviter de faire apparaître, dans des conditions données, des événements critiques ou catastrophiques pour les hommes, les équipements ou les biens.

Tableau 6.1. Paramètres de la SdF

Sûreté de fonctionnement Aptitude à assurer un service spécifié			
Sécurité	Disponibilité		+ Logistique de Maintenance
Aptitude à ne présenter aucun danger pour les personnes, les biens et l'environnement.	Aptitude à être en état de marche à un instant donné ou pendant un intervalle de temps donné		Politique et moyens de maintenance.
	+ Fiabilité Aptitude à ne pas présenter de défaillance dans un intervalle de temps donné.	+ Maintenabilité Aptitude à être remis en service dans une durée donnée.	

VI.2. Outils de la sûreté de fonctionnement

VI.2.1. Arbres de défaillance

L'analyse par arbre de défaillance est une méthode de type déductif. En effet, il s'agit, à partir d'un événement redouté défini a priori, de déterminer les enchaînements d'évènements ou combinaisons d'évènements pouvant finalement conduire à cet évènement. Cette analyse permet de remonter de causes en causes jusqu'aux évènements de base susceptibles d'être à l'origine de l'évènement redouté. Les liens entre les différents évènements identifiés sont réalisés grâce à des portes logiques (de type «ET» et «OU»). La définition de l'évènement final, qui fera l'objet de l'analyse, est une étape cruciale pour la construction de l'arbre. Le tableau (6.2) présente les symboles ainsi que les significations qui sont utilisés dans la modélisation d'un diagramme à structure arborescente.

Traitements

Les principaux traitements effectués sur les arbres de défaillances sont la recherche des coupes minimales et l'évaluation quantitative des probabilités d'occurrence.

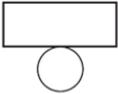
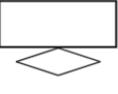
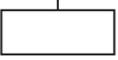
- **Coupes minimales**

Les coupes minimales représentent les plus petites combinaisons d'évènements dont la réalisation simultanée entraîne celle de l'évènement indésirable. Elles ont pour ordre le nombre d'évènements qui les constitue.

- **Arbre de défaillances probabilisé**

Il correspond à l'analyse quantitative. L'utilisation d'un arbre de causes de défaillance pour évaluer la probabilité d'apparition de l'évènement indésirable repose sur les règles classiques de calcul des probabilités composées à évènements indépendants.

Tableau.6.2. Les symboles utilisés pour la construction de l'arbre

Portes logiques	 Porte OU	La porte «OU» indique que l'évènement de sortie se produit si l'un des évènements d'entrée se produit
	 Porte ET	La porte «ET» indique que l'évènement de sortie ne se produit que si tous les évènements d'entrée se produisent en même temps
Evénements d'entrées		L'évènement de base représente le niveau le plus détaillé de l'analyse du système
		Evènement non développé, car l'information n'est pas disponible ou parce que ses conséquences sont insignifiant
Description de l'état		Le rectangle des commentaires est pour des informations complémentaires
Symboles de transfert	Transfert sortant 	La partie de l'arbre qui suit le symbole de transfert sortant se retrouve identique, sans être répétée, à l'endroit indiqué par le symbole de transfert entrant.
	Transfert entrant 	

Soit F_{Xi} la probabilité d'occurrence de l'évènement de base Xi

- Porte « ET » : probabilité de « $X1$ » et « $X2$ » = $F_{X1} \cdot F_{X2}$

Pour une porte simple «ET» avec m évènements de base indépendants, la probabilité d'apparition de l'évènement indésirable TOP est:

$$P(TOP) = \prod_{i=1}^m F_{Xi}$$

- Porte « OU » : probabilité de « $X1$ » ou « $X2$ » = $F_{X1} + F_{X2} - [F_{X1} \cdot F_{X2}]$

Pour une porte simple «OU» avec m évènements de base indépendants, on obtient:

$$P(TOP) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - F_{Xi})$$

VI.2.2. Arbres des conséquences (d'événements)

Comme nous l'avons vu précédemment, l'analyse par arbre des défaillances, vise à déterminer, dans une démarche déductive, les causes d'un événement indésirable ou redouté retenu a priori. A l'inverse, l'analyse par arbre d'évènements suppose la défaillance d'un composant ou d'une partie du système et s'attache à déterminer les évènements qui en découlent. Cette méthode est particulièrement utilisée dans le domaine de l'analyse après accidents en vue d'expliquer les conséquences observées résultant d'une défaillance du système où les scénarios d'accident sont évalués de manière qualitative et quantitative. La figure (6.1) représente la forme générale d'un arbre d'évènements.

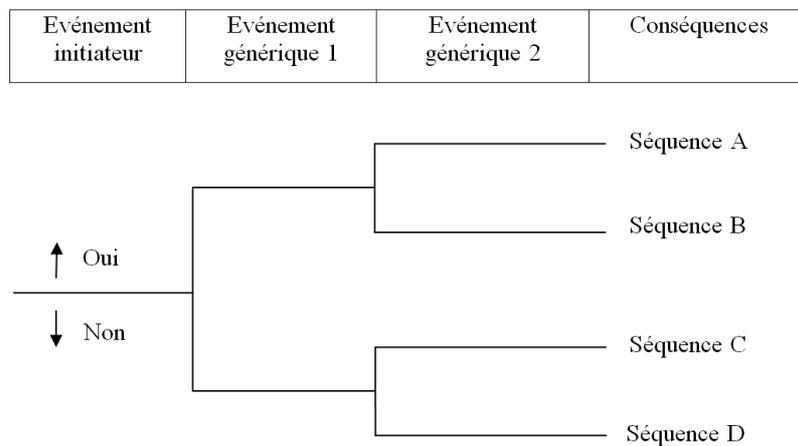


Fig.6.1. Schématisation d'un arbre d'événement

L'évaluation quantitative consiste à déterminer les probabilités d'apparition et les pertes associées aux scénarios résultants, afin d'estimer mathématiquement le risque total, et qui n'est autre que l'espérance du coût des dommages. En termes plus simples, il s'agit de la valeur moyenne des conséquences d'évènements affectés de leur probabilité. Ainsi, un événement e_1 a une probabilité d'occurrence P_1 avec une conséquence probable C_1 ; de même un événement e_n aura une probabilité P_n et une conséquence C_n , alors le risque total (R_{Total}) vaudra:

$$R_{Total} = P_1 \cdot C_1 + P_2 \cdot C_2 + \dots + P_n \cdot C_n = \sum_{i=1}^n P_i \cdot C_i$$

Exemple 6.1. Analyse des causes de défaillances d'un gazoduc enterré

Pour connaître les scénarios pouvant conduire à une défaillance des pipelines enterrés, il faut tout d'abord définir cet événement indésirable:

La défaillance des pipelines est une rupture ou une fuite apparente nécessitant une intervention sur le réseau, sachant que la limite entre rupture et fuite n'est pas toujours bien définie (une rupture est une fuite, mais une fuite n'est pas obligatoirement une rupture).

➤ *Analyse qualitative*

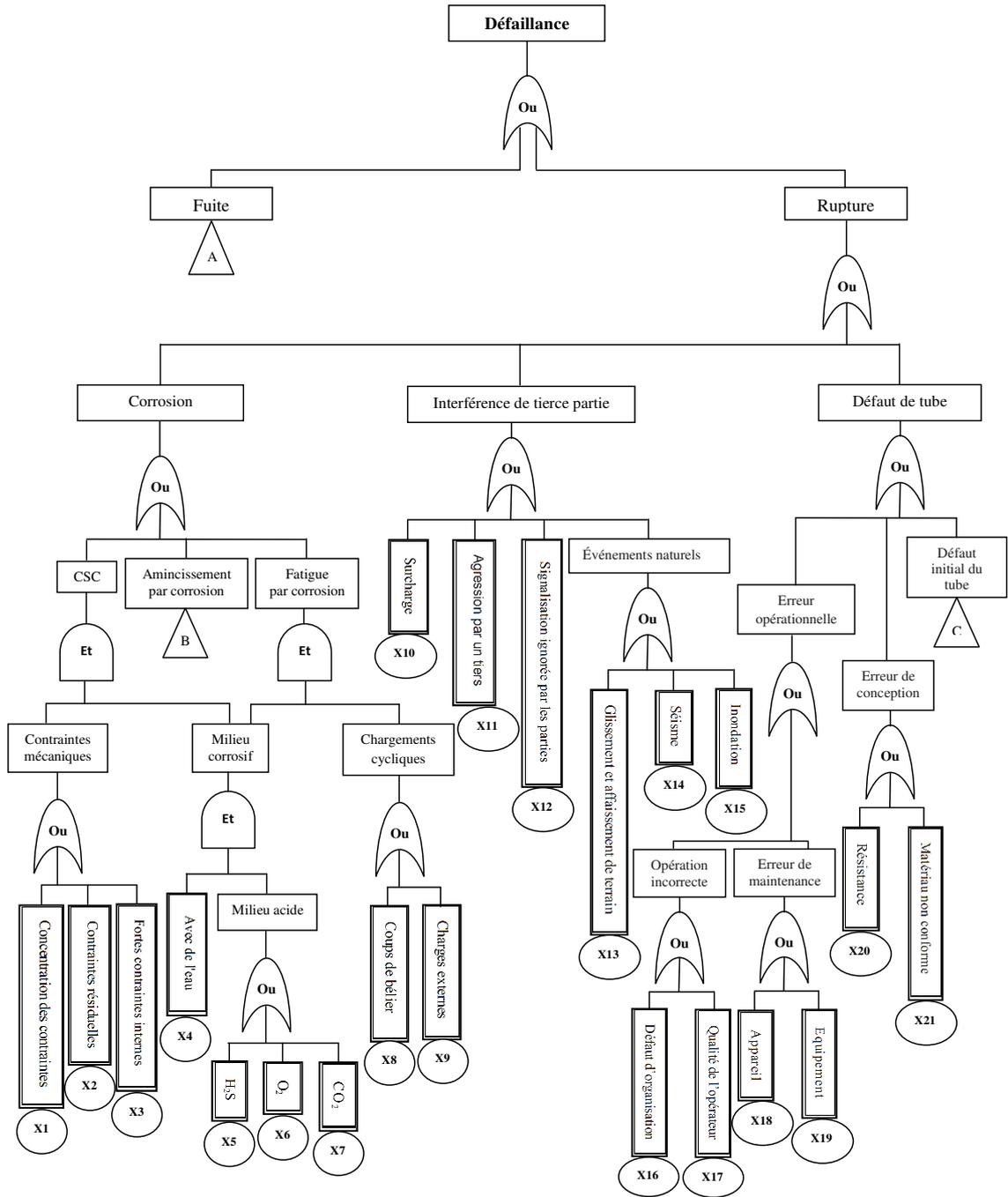
Après une analyse qualitative à l'aide d'un arbre de défaillance, la figure (6.2) précise les principales causes de défaillance des pipelines enterrés. On remarque qu'il y a trois catégories de causes de rupture:

- La corrosion sous toutes ses formes ;
- Les interférences de tierce partie (comme les surcharges, séisme, glissement de terrain,..etc.) ;
- Les défauts de tuyau dus aux erreurs humaines.

Concernant la fuite, on trouve deux causes majeures:

- L'amincissement par corrosion jusqu'à la fuite ;
- Les défauts initiaux (défaut de matériau par exemple).

A partir de ces catégories de causes, on a continué de descendre (i.e. de développer l'arbre) de causes en causes jusqu'aux évènements de base susceptibles d'être à l'origine de la défaillance du gazoduc enterré. Ensuite, nous avons obtenu à la fin un arbre de défaillance composé de 40 évènements de base. Ces derniers sont répertoriés dans le tableau (6.3).



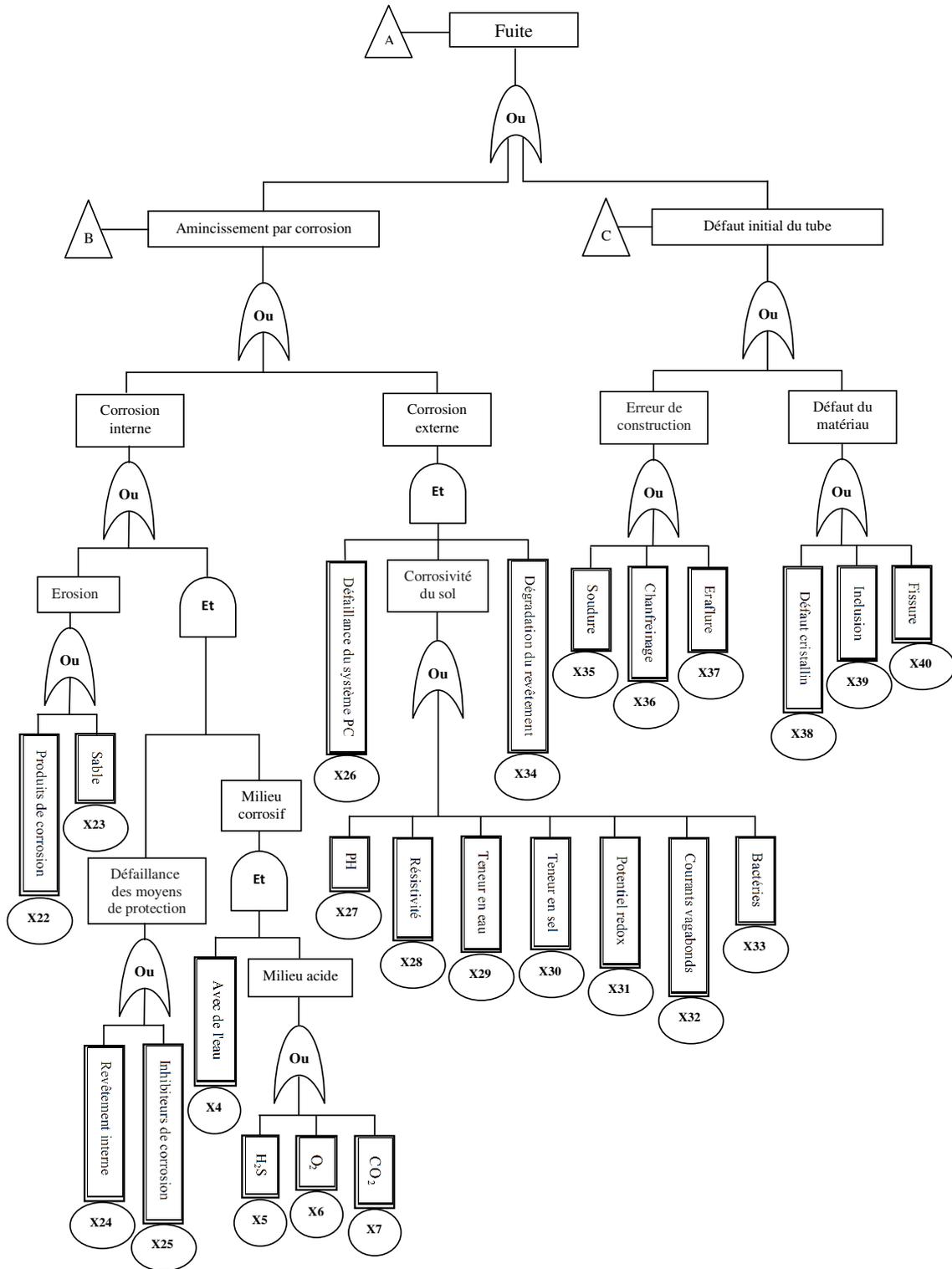


Fig.6.2. Arbre de défaillance d'un gazoduc enterré

Tableau.6.3. Tous les événements de base de l'arbre de défaillance

Code	Evénements de base	Code	Evénements de base
X1	Concentration des contraintes	X21	Matériau non conforme
X2:	Contraintes résiduelles	X22	Déplacement des produits de corrosion à la vitesse du gaz qui rabetent la surface interne de la conduite
X3	Fortes contraintes internes	X23	Déplacement du sable à la vitesse du gaz qui rabote la surface interne de la conduite
X4	Présence de l'eau dans le milieu	X24	Dégradation du revêtement interne
X5	Présence de sulfure d'hydrogène H ₂ S	X25	Détérioration des inhibiteurs de corrosion
X6	Présence d'oxygène O ₂	X26	Défaillance du système de protection cathodique
X7	Présence de dioxyde de carbone CO ₂	X27	pH atteint des valeurs extrêmes
X8	Coups de bélier	X28	Faible résistivité du sol
X9	Charge externe	X29	Forte teneur en eau
X10	Surcharge	X30	Forte teneur en sel
X11	Agression par un tiers	X31	Faible potentiel redox
X12	Signalisation ignorée par les parties	X32	Présence de courants vagabonds
X13	Glissement et affaissement de terrain	X33	Présence des bactéries
X14	Séisme	X34	Dégradation du revêtement externe
X15	Inondation	X35	Défaut de soudure
X16	Défaut d'organisation	X36	Défaut du chanfreinage
X17	Qualité de l'opérateur	X37	Eraflure
X18	Défaut de l'appareil	X38	Défaut cristallin
X19	Défaut de l'équipement	X39	Inclusion
X20	Problème de résistance	X40	Fissure

En utilisant les règles de l'algèbre de BOOLE, l'équation booléenne de l'arbre de défaillance obtenu est donnée comme suit:

$$\begin{aligned}
 \text{Équation booléenne de l'arbre} = & x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + \\
 & x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} + x_{39} + x_{40} + x_{1x5x4} + x_{1x6x4} + \\
 & x_{1x7x4} + x_{2x5x4} + x_{2x6x4} + x_{2x7x4} + x_{3x5x4} + x_{3x6x4} + x_{3x7x4} + x_{5x4x8} + x_{5x4x9} + \\
 & x_{6x4x8} + x_{6x4x9} + x_{7x4x8} + x_{7x4x9} + x_{5x4x24} + x_{5x4x25} + x_{6x4x24} + x_{6x4x25} + \\
 & x_{7x4x24} + x_{7x4x25} + x_{26x27x34} + x_{26x28x34} + x_{26x29x34} + x_{26x30x34} + x_{26x31x34} + \\
 & x_{26x32x34} + x_{26x33x34}
 \end{aligned}$$

Où les coupes minimales sont les suivantes:

Coupes minimales d'ordre 1: x10, x11, x12, x13, x14, x15, x16, x17, x18, x19, x20, x21, x22, x23, x35, x36, , x38, x39, x40

Coupes minimales d'ordre 3: x1x5x4, x1x6x4, x1x7x4, x2x5x4, x2x6x4, x2x7x4, x3x5x4, x3x6x4, x3x7x4, x5x4x8, x5x4x9, x6x4x8, x6x4x9, x7x4x8, x7x4x9, x5x4x24, x5x4x25, x6x4x24, x6x4x25, x7x4x24, x7x4x25, x26x27x34, x26x28x34, x26x29x34, x26x30x34, x26x31x34, x26x32x34, x26x33x34

L'objectif de cette simplification de l'arbre de défaillance par le développement des diverses combinaisons d'événements est de trouver les chemins critiques ou les plus petites combinaisons d'événement entraînant la défaillance du pipeline. Elle permet de mieux maîtriser le système étudié tout en identifiant les maillons faibles sur lesquels une attention particulière doit être portée, comme les 19 coupes minimales d'ordre 1.

Exemple. 6.2. Analyse des conséquences de la défaillance d'un gazoduc

Afin de définir les scénarios développés avec le temps et analyser les conséquences d'une défaillance d'un gazoduc à haute pression, on a utilisé la méthode de l'arbre d'événements, comme le montre la figure (6.3).

➤ *Analyse qualitative*

Après la mise en service d'un gazoduc, on a proposé trois événements initiateurs:

- Apparition d'une rupture
- Apparition d'une fuite
- Survie totale ou bon fonctionnement du gazoduc

Pour les événements intermédiaires, on a mis deux:

- Ignition immédiate
- Ignition retardée

Par exemple, si on a une fuite ou une rupture sans avoir une inflammation, seul une perte du matériel est considérée qui demande une intervention de maintenance. Par contre, s'il ya une source d'inflammation, on peut avoir une conséquence plus grave comme l'explosion, ce qui implique des morts, des blessures, des pertes de matériels,.....etc. Dans le cas où il ya une survie totale ou un bon fonctionnement du gazoduc, on va avoir un gain de production. Tous les scénarios possibles sont détaillés dans le tableau (6.4).

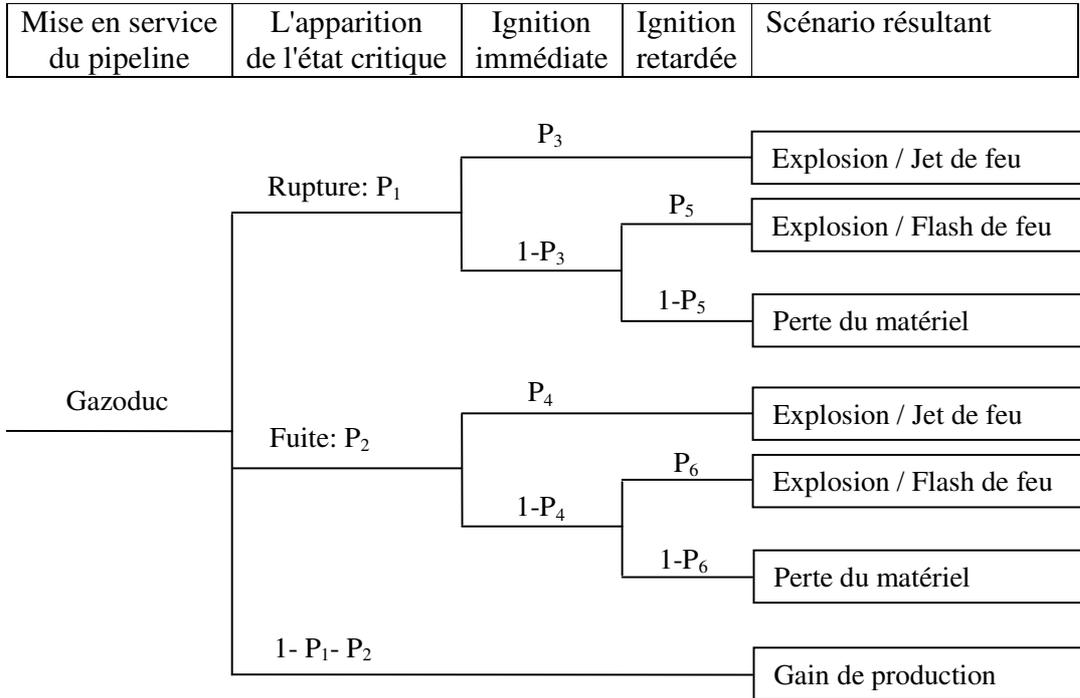


Fig.6.3. L'arbre d'événements pour l'état critique d'un gazoduc

➤ **Analyse quantitative**

La probabilité d'occurrence d'une conséquence suite à une séquence particulière peut alors être estimée, comme le produit de la probabilité d'occurrence de l'événement initiateur et de la probabilité d'occurrence de l'événement selon le cheminement des événements intermédiaires.

Soient:

P_1 : Probabilité d'une rupture

P_2 : Probabilité d'une fuite

P_3 : Probabilité d'ignition immédiate due à la rupture

P_4 : Probabilité d'ignition immédiate due à la fuite

P_5 : Probabilité d'ignition retardée due à la rupture

P_6 : Probabilité d'ignition retardée due à la fuite

Les probabilités d'apparition des différents scénarios sont déterminées d'après l'arbre d'événements élaboré dans l'analyse qualitative (Fig.6.3). Ces probabilités ainsi que les pertes associés aux scénarios résultants sont données dans le tableau (6.4)

Tableau.6.4. Pertes & probabilités d'apparition des différents scénarios

N°	Scénarios	Probabilités	Pertes ou coûts associés aux Scénarios
1	Explosion/Jet de feu dû à la rupture	$P_{S1} = P_1 \cdot P_3$	C_{S1} = Coûts des victimes + Coûts de traitement des blessés + Coûts de production + Coûts des dégâts matériel +
2	Explosion/Flash de feu dû à la rupture	$P_{S2} = P_1 \cdot (1 - P_3) \cdot P_5$	C_{S2} = Coûts des victimes + Coûts de traitement des blessés + Coûts de production + Coûts des dégâts matériel +
3	Perte du matériel dû à la rupture	$P_{S3} = P_1 \cdot (1 - P_3) \cdot (1 - P_5)$	C_{S3} = Coûts de maintenance
4	Explosion/Jet de feu dû à la fuite	$P_{S4} = P_2 \cdot P_4$	C_{S4} = Coûts des victimes + Coûts de traitement des blessés + Coûts de production + Coûts des dégâts matériel +
5	Explosion/Flash de feu dû à la fuite	$P_{S5} = P_2 \cdot (1 - P_4) \cdot P_6$	C_{S5} = Coûts des victimes + Coûts de traitement des blessés + Coûts de production + Coûts des dégâts matériel +
6	Perte du matériel dû à la fuite	$P_{S6} = P_2 \cdot (1 - P_4) \cdot (1 - P_6)$	C_{S6} = Coûts de maintenance
7	Gain de production	$P_{S7} = 1 - P_1 - P_2$	$C_{S7} = -C_P$ où C_P : Coûts de production

Alors, le risque total peut être exprimé par la relation suivante:

$$Risque_{Total} = \sum_{i=1}^n C_{Si} \cdot P_{Si}$$

Où C_{Si} et P_{Si} sont le coût et la probabilité d'apparition du scénario Si , respectivement et n le nombre des scénarios.

$$\Rightarrow Risque_{Total} = C_{S1} \cdot (P_1 \cdot P_3) + C_{S2} \cdot P_1 \cdot (1 - P_3) \cdot P_5 + C_{S3} \cdot P_1 \cdot (1 - P_3) \cdot (1 - P_5) + C_{S4} \cdot P_2 \cdot P_4 + C_{S5} \cdot P_2 \cdot (1 - P_4) \cdot P_6 + C_{S6} \cdot P_2 \cdot (1 - P_4) \cdot (1 - P_6) - C_P \cdot (1 - P_1 - P_2)$$

D'après cette estimation mathématique du risque total, on remarque que ce dernier tend vers des valeurs énormes si la probabilité de défaillance et d'inflammation sont très élevées. Par contre, ce risque tend vers des valeurs négatives (i.e. gain de production) si la probabilité de défaillance est négligeable ou très faible. Donc, il faut prendre des décisions pour diminuer ce risque d'une façon optimale (par exemple, chercher une stratégie optimale de maintenance et d'inspection).

Unité d'enseignement :UEF 3.2.2

Matière :Fiabilité

VHS: 22h30 (cours: 1h30)

Crédits : 2

Coefficient : 1

Objectifs de l'enseignement:

Faire apprendre à l'étudiant les notions de fiabilité des différents systèmes de production, leurs calculs. Aptitude à l'analyse des défaillances et décisions à prendre pour maintenir un système en état.

Connaissances préalables recommandées:

Cours de physique et de maths du L1 et L2.

Contenu de la matière:

Chapitre 1 :Fiabilité opérationnelle(3semaines)

Domaine d'utilisation, comportement des équipements, taux de défaillance ,caractéristiques, représentation graphique.

Chapitre 2 : Méthodes d'évaluation de la fiabilité (2semaines)

Chapitre 3 : Fiabilité des systèmes - Fiabilité prévisionnelle (3semaines)

Chapitre 4 : Maintenabilité des systèmes (3semaines)

Chapitre 5 : Disponibilité des systèmes (2semaines)

Chapitre 6 : Sureté de fonctionnement (2semaines)

Mode d'évaluation: Examen : 100%.

Références bibliographiques:

1. Patrick Lyonnet et Marc Thomas. Fiabilité, diagnostic et maintenance prédictive des systèmes, 2012.
2. Fiabilité diagnostic et maintenance prédictive des systèmes fiabilité technique et humaine, Tec&Doc, 2012.
3. Jean-Claude Morin , Sylvie Gaudeau , Hassan Houraji. Maintenance des équipements industriels , Tome 1, Bac Pro - Livre élève – Ed, 2011.
4. Jean-Claude Morinet Sylvie Gaudeau. Maintenance des équipements industriels, Bac Pro - Livre professeur – Ed, 2011.

5. Aziz Bekri, Ludovic Pigeyre, Pascal Ponson. Top'Fiches Bac Pro Maintenance des Equipements Industriels, 2009.
6. J.S.David. Fiabilité, maintenance et risque, l'Usine Nouvelle, édition Dunod, 2006.
7. A. Lannoy. Analyse quantitative et utilité du retour d'expérience pour la maintenance des matériels et la sécurité, Eyrolles, 1996.
8. P. Lyonnet. Ingénierie de la fiabilité, Ed. Tec & Doc, Lavoisier, Paris, 2006.
9. F. Monchy et J.P. Vernier. Maintenance méthode et organisation, Dunod, 2000
10. A. Lannoy. Introduction à la fiabilité des structures. Techniques de l'ingénieur, Sécurité et gestion des risques, [SE 2 070].
11. A. Villemeur. Sûreté de fonctionnement des systèmes industriels. Edition Eyrolles. 1988.
12. D. Boitel et C. Hazard. Guide de la maintenance, Nathan, 1987
13. P. Chapouille. R. De Pazzis. Fiabilité des systèmes, Masson & Cie, 1968
14. J. Baroth, F. Schoefs, D. Breysse. Fiabilité des ouvrages : Sûreté, variabilité, maintenance, sécurité, Hermès - Lavoisier, 2011.
15. Y. Sahraoui. Optimisation des méthodes d'inspection des pipes. Thèse de doctorat, Université Badji Mokhtar Annaba, Algérie, 2014.